УДК 539.3:534.1

© 1999 г. В.Б. Зеленцов

ОБ ОДНОМ АСИМПТОТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

На основе специальной аппроксимации в комплексной плоскости символа ядра интегрального уравнения контактной задачи строится асимптотическое его решение, являющееся основой решения нестационарной динамической плоской контактной задачи об ударе жестким штампом по упругой полуплоскости при малых временах их взаимодействия. Предлагаемая аппроксимация символа ядра позволяет аппроксимировать его в комплексной плоскости с любой наперед заданной точностью. В отличие от известных подходов ([1,2] и др.) используемая здесь аппроксимация символа ядра интегрального уравнения позволяет получить решение рассматриваемой задачи в виде простых формул, не содержащих сингулярных квадратур.

1. Постановка задачи и ее интегральное уравнение. Рассматривается плоская контактная задача об ударе штампом ширины $2a$ ($|x| \leqslant a$) в упругую полуплоскость ($y \geqslant 0$, $|x| < \infty$) с начальной скоростью внедрения v_0 и без учета сил трения в зоне контакта. Форма штампа и закон его движения в упругой среде определяются функцией $\varepsilon(x, t)(|x| \leqslant a, t \geqslant 0)$. В начальный момент времени учитывая, что до момента внедрения упругая среда находилась в покое, смещения упругой среды $u = u(x, y, t)$ и $v = v(x, y, t)$ и их скорости принимаются равными нулю.

В общепринятых обозначениях теории упругости [2] смешанные граничные условия контактной задачи при $y = 0$ ($t > 0$) имеют вид

$$\begin{aligned} &\tau_{xy} = 0, && -\infty < x < \infty \\ &\sigma_{yy} = 0, && -\infty < x < -a, \ a < x < \infty \\ &v = \varepsilon(x, t), && -a < x < a \end{aligned} \tag{1.1}$$

при условии, что на бесконечности $\left(\sqrt{x^2 + y^2} \to \infty\right)$ смещения u, v вместе со своими частными производными по x, y обращаются в нуль.

С помощью интегральных преобразований Лапласа по времени t [3] и интегрального преобразования Фурье по продольной координате x [4], применяемым к дифференциальным уравнениям теории упругости [2] и к смешанным граничным условиям (1.1) с учетом начальных условий и условий на бесконечности, решение поставленной контактной задачи сводится к интегральному уравнению (ИУ)

$$\int_{-a}^{a} \varphi^L(\xi, p) k(\xi - x, p) d\xi = 2\pi\varepsilon^L(x, p), \quad |x| \leqslant a \tag{1.2}$$

$$k(t, p) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha, p) e^{i\alpha t} d\alpha, \quad K(\alpha, p) = \frac{\sigma_2(\sigma_1^2 - \alpha^2)}{R(\alpha, p)}$$

$$R(\alpha, p) = (\sigma_1^2 + \alpha^2)((\lambda + 2\mu)\sigma_1^2 - \lambda\alpha^2) - 4\mu\alpha^2\sigma_1\sigma_2$$

$$\sigma_1 = (\alpha^2 + p^2 / c_2^2)^{1/2}, \quad \sigma_1 = (\alpha^2 + p^2 / c_1^2)^{1/2}, \quad c_1 = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$$

$$c_2 = (\mu / \rho)^{1/2}$$

относительно неизвестной трансформанты $\varphi^L(x, p)$ контактных напряжений $\varphi(x, t)$, возникающих под штампом, причем $\sigma_{yy}(x, 0, t) = -\varphi(x, t)$. Здесь ρ – плотность материала полуплоскости, λ, μ – упругие постоянные Ламе [2], $\varepsilon^L(x, p)$ – трансформанта Лапласа функции $\varepsilon(x, t)$.

Для трансформант Лапласа вертикальных смещений $v^L(x, y, p)$ и нормальных напряжений $\sigma_{yy}^L(x, y, p)$ ($y \geqslant 0$, $-\infty < x < \infty$) получаются выражения

$$v^L(x,y,p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{LF}(\alpha, p)\left[-2\alpha^2\sigma_2 e^{-\sigma_1 y} + \left(\sigma_1^2 + \alpha^2\right)\sigma_2 e^{-\sigma_2 y}\right]\frac{e^{-i\alpha x}}{R(\alpha, p)}d\alpha \tag{1.3}$$

$$\sigma_{yy}^L(x,y,p) = \frac{2\mu i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{LF}(\alpha, p)\left[-2\alpha^2\sigma_1\sigma_2 e^{-\sigma_1 y} + \left(\sigma_1^2 + \alpha^2\right)((\lambda + 2\mu)\sigma_2^2 - \right.$$

$$\left. -\lambda\alpha^2)e^{-\sigma_2 y}\right]\frac{e^{-i\alpha x}}{R(\alpha, p)}d\alpha$$

В уравнении (1.2) вводятся обозначения (ν – коэффициент Пуассона)

$$p = c_2 p', \quad \beta^2 = c_2^2 / c_1^2 = (1 - 2\nu)/[2(1 - \nu)]$$

Во внутреннем интеграле ИУ (1.2) делается замена $\alpha = p'u$, а во внешнем $\xi = a\xi'$, $x = ax'$. В результате указанных замен и принятых обозначений ИУ (1.2) приводится к безразмерному виду (штрихи опускаем)

$$\int_{-1}^{1} \varphi^L(\xi, p)k\left(\frac{\xi - x}{\Lambda}\right)d\xi = 2\pi f^L(x, p), \quad |x| \leqslant 1 \tag{1.4}$$

$$k(t) = \int_{\Gamma} K(u)e^{iut}du, \quad K(u) = 2(1 - \beta^2)\frac{\sqrt{u^2 + \beta^2}}{R_0(u)}$$

$$R_0(u) = (2u^2 + 1)^2 - 4u^2\sqrt{u^2 + 1}\sqrt{u^2 + \beta^2}$$

$$f^L(x, p) = \frac{2}{a}(1 - \beta^2)\mu\varepsilon^L(x, p), \quad \Lambda = \frac{c_2}{ap}$$

Уравнение (1.4) при этом было умножено на $2(1 - \beta^2)$, контур интегрирования Γ в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ проходит под углом $-\arg p$ к действительной оси ($\tau = 0$).

2. Асимптотическое решение интегрального уравнения при больших p. Символ ядра ИУ (1.4) функция $K(u)$ обладает следующими свойствами: четна по u, вещественна на действительной оси комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$, поведение $K(u)$ в нуле и на бесконечности дается соотношениями

$$K(u) = |u|^{-1} + O(|u|^{-3}), \quad |u| \to \infty \tag{2.1}$$

$$K(u) = K(0) + O(u^2), \quad u \to 0; \quad K(0) = 2\beta(1 - \beta^2) \tag{2.2}$$

В комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ функция $K(u)$ имеет четыре точки ветвления $u = \pm i\beta$ и $u = \pm i$ и два полюса $u = \pm i\eta_0$ (полюсы Релея) [5].

Для однозначного представления функции $K(u)$ в комплексной плоскости u проводятся разрезы, проходящие от точек ветвления $u = i$, $u = i\beta$ до $i\infty$ вдоль положительной части ($\mathrm{Im}u \geqslant 0$) мнимой оси и от точек ветвления $u = -i$ и $u = -i\beta$ до $-i\infty$ вдоль отрицательной части ($\mathrm{Im}u \leqslant 0$) мнимой оси. В разрезанной таким образом плоскости с выколотыми точками полюсов Релея $u = \pm i\eta_0$ функция $K(u)$ является аналитической, включая полосу $|\mathrm{Im}(u)| < \beta$, $\beta < 1 < \eta_0$.

Для построения нулевого члена асимптотики решения ИУ (1.4) при больших значениях параметра p достаточно построить нулевой член асимптотики решения (1.4) при малых значениях параметра Λ. После деформации контура интегрирования Γ в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ в контур, параллельный действительной оси ($\tau = 0$) и располагаемый в полосе $|\mathrm{Im}(u)| < \beta$, нулевой член асимптотики решения ИУ (1.4) при малых Λ представляется в виде суперпозиции решений следующих интегральных уравнений [6]:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{\infty} \varphi_{+}^{L}(\xi,p)k\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right)d\xi = 2\pi f^{L}(x,p), \quad -1 \leqslant x < \infty \\
&\int_{-1}^{1} \varphi_{-}^{L}(\xi,p)k\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right)d\xi = 2\pi f^{L}(x,p), \quad -\infty \leqslant x \leqslant 1 \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\infty}^{L}(\xi,p)k\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right)d\xi = 2\pi f^{L}(x,p), \quad -\infty < x < \infty
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(u)e^{iut}du$$

по формуле

$$\varphi^{L}(x,p) = \varphi_{+}^{L}\left(\frac{1+x}{\Lambda},p\right) + \varphi_{-}^{L}\left(\frac{1-x}{\Lambda},p\right) - \varphi_{\infty}^{L}\left(\frac{x}{\Lambda},p\right) \tag{2.4}$$

С этой целью в первых двух уравнениях (2.3) делаются замены переменных $\xi = \Lambda\xi' - 1$, $x = \Lambda x' - 1$ и $\xi = 1 - \Lambda\xi'$, $x = 1 - \Lambda x'$, соответственно, а в третьем уравнении (2.3) $\xi = \Lambda\xi'$, $x = \Lambda x'$.

В результате указанных замен уравнения (2.3) принимают вид (штрихи опускаем)

$$\int_{0}^{\infty} \varphi_{\pm}^{L}(\xi,p)k(\xi-x)d\xi = 2\pi f^{L}(\pm\Lambda x \mp 1,p)\Lambda^{-1}, \quad 0 \leqslant x < \infty \tag{2.5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\infty}^{L}(\xi,p)k(\xi-x)d\xi = 2\pi f^{L}(\Lambda x,p)\Lambda^{-1}, \quad -\infty < x < \infty \tag{2.6}$$

Уравнения (2.5) являются уравнениями Винера–Хопфа на полуоси, а (2.6) – уравнением свертки на оси [7].

Решение ИУ (2.6) получается применением к нему интегрального преобразования Фурье и дается формулой

$$\varphi_{\infty}^{L}(x,p) = \frac{1}{2\pi\Lambda}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^{LF}(u,p)\exp(-iux)}{K(u)}du \tag{2.7}$$

Решение ИУ (2.5) получается применением к ним стандартной процедуры Винера – Хопфа [9, 10]. В результате чего решение первого ИУ из (2.5) представляется по формуле

$$\varphi_{+}^{L}(x,p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_{+}(u)\exp(-iux)}{K_{+}(u)}du \tag{2.8}$$

где $g_+(u)$ регулярная в верхней полуплоскости ($\mathrm{Im}u > \tau_-$, $0 \leqslant |\tau_-| \leqslant \beta$) функция, определяемая из отношения

$$g_+(u)+g_-(u)=\frac{F_+(u)}{\Lambda K_-(u)};\quad F_+(u)=\int_0^\infty f^L(\Lambda\xi-1,p)\exp(iu\xi)d\xi \tag{2.9}$$

а функции $K_+(u)$ и $K_-(u)$ определяются в результате факторизации функции $K(u)=K_+(u)K_-(u)$; они регулярны в верхней ($\mathrm{Im}u > \tau_-$, $\tau_- \leqslant 0$) и нижней ($\mathrm{Im}u < \tau_+$, $\tau_+ \geqslant 0$) полуплоскостях комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ соответственно.

Решение $\varphi_-^L(x,p)$ уравнений (2.5) дается формулой (2.8), в которой $F_+(u)$ определяется формулами (2.8), (2.9), но при замене в формуле для $F_+(u)$ подынтегрального выражения на $f^L(-\Lambda\xi+1,p)\exp(iu\xi)$.

После вычисления квадратур (2.7), (2.8) и перехода к старым переменным нулевой член асимптотического решения ИУ (1.4) дается формулой (2.4). В общем случае вычисление квадратур типа (2.8) в аналитической форме затруднено, так как $K_+(u)$ и $K_-(u)$ в результате факторизации $K(u)$ даются в сингулярных квадратурах [2].

3. Аппроксимация функции $K(u)$ и ее факторизация. Для получения приближенного решения ИУ динамических стационарных и статических смешанных задач применялся метод, основанный на специальной аппроксимации символа ядра $K(u)$ ИУ вдоль оси ее интегрирования ([6, 8–11] и др.). В качестве аппроксимирующей подбиралась такая функция, факторизация которой осуществлялась бы элементарными средствами и позволяла бы осуществить вычисления квадратур типа (2.8) в аналитической форме. Установлено [10, 11], что при надлежащем подборе аппроксимирующей функции ошибка приближенного решения ИУ не превышает ошибки аппроксимации. При решении нестационарных динамических контактных задач возникает необходимость подбора такого вида аппроксимирующей функции в комплексной плоскости, которая удовлетворяла бы вышеперечисленным требованиям и позволяла бы сохранить в решении физический смысл задачи. Обычные методы аппроксимации функции в комплексной плоскости, например аппроксимации Паде [12], этой цели не удовлетворяют.

Здесь в качестве такой аппроксимации функции $K(u)$, удовлетворяющей всем вышеперечисленным требованиям, предлагается функция $K_0(u)$ следующего вида:

$$K_0(u)=\frac{\sqrt{u^2+\beta^2}}{u^2+\eta_0^2}M_n(u) \tag{3.1}$$

$$M_n(u)=\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}d_k((\sqrt{\beta+iu}-\sqrt{1+iu})^{2k+2}+(\sqrt{\beta-iu}-\sqrt{1-iu})^{2k+2})\right]$$

Постоянные d_k определяются из условий наилучшей аппроксимации $K(u)$ в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$. Полюсы Релея $\pm i\eta_0$ функции $K(u)$ определяются из уравнения $R_0(u) = 0$.

Факторизация $K_0(u)$ (3.1), т.е. представление ее в комплексной плоскости в виде $K_0(u)=K_+^0(u)K_-^0(u)$, осуществляется элементарными средствами и при этом

$$K_\pm^0(u)=\frac{\sqrt{\beta\mp iu}}{\eta_0\mp iu}\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}d_k(\sqrt{\beta\mp iu}-\sqrt{1\mp iu})^{2k+2}\right] \tag{3.2}$$

Функции $K_\pm^0(u)$ обладают свойством

$$K_+^0(u)=K_-^0(-u) \tag{3.3}$$

и являются регулярными соответственно в полуплоскостях $\mathrm{Im}(u) > -\beta$ и $\mathrm{Im}(u) < \beta$

($\beta > 0$) с асимптотиками

$$K_{\pm}^{0}(u)=\frac{1}{\sqrt{-iu}}+O\left(\frac{1}{|u|}\right),\quad |u|\to\infty \tag{3.4}$$

$$K_{\pm}^{0}(u)=\sqrt{K(0)}+O(u),\quad |u|\to 0 \tag{3.5}$$

Отметим, что вид аппроксимации (3.1) не является единственным.

4. Асимптотическое решение ИУ (1.4) с аппроксимированным ядром. Решения $\varphi_{\pm}^{L}(x,p)$ ИУ Винера–Хопфа (2.5) при замене символа ядра $K(u)$ этого уравнения на аппроксимирующую функцию $K_0(u)$ дается общей формулой (2.8), в которой достаточно вместо $K_{\pm}(u)$ подставить $K_{\pm}^{0}(u)$, определенные формулой (3.2). Нулевой член асимптотического решения ИУ (1.4) дается формулой (2.4) после перехода в $\varphi_{\pm}^{L}(x,p)$, $\varphi_{\infty}^{L}(x,p)$ к старым переменным.

Для случая плоского штампа, когда $\varepsilon(x,t)=\varepsilon(t)$ и правая часть ИУ (1.4) принимает вид

$$f^{L}(x,p)=\frac{2}{a}(1-\beta^{2})\mu\varepsilon^{L}(p)$$

где $\varepsilon^{L}(p)$ – трансформанта Лапласа функции $\varepsilon(t)$, решение $\varphi_{\infty}^{L}(x,p)$ ИУ (2.6) представляется формулой

$$\varphi_{\infty}^{L}(x,p)=\frac{\theta\varepsilon^{L}(p)}{\Lambda K(0)},\quad \theta=\frac{2}{a}(1-\beta^{2})\mu \tag{4.1}$$

Решения ИУ (2.5) в этом случае даются формулой

$$\varphi_{\pm}^{L}(x,p)=\frac{\theta\varepsilon^{L}(p)}{2\pi\Lambda K_{-}^{0}(0)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-iux)}{-iuK_{+}^{0}(u)}du \tag{4.2}$$

При вычислении квадратуры в (4.2) делается замена переменной $-iu=s$. В комплексной плоскости $s=u+iv$ подынтегральная функция $[sK_{+}^{0}(is)]^{-1}$ имеет особые точки: в нуле ($s=0$) – полюс первого порядка, две точки ветвления алгебраического типа при $s=-\beta$ и $s=-1$. Для однозначного представления подынтегральной функции (4.2) в комплексной плоскости s проводятся разрезы от $s=-\beta$ и $s=-1$ до $-\infty$ вдоль отрицательной части вещественной оси, с последующим выбором ветвей функции $\sqrt{\beta+s}$ и $\sqrt{1+s}$ при условии $\sqrt{1}=1$. Вычисление интеграла в (4.2) приводит к формуле

$$\varphi_{\pm}^{L}(x,p)=\frac{\theta\varepsilon^{L}(p)}{\pi\Lambda K_{-}^{0}(0)}\left[\int_{1}^{\infty}q(\chi_1(y),y)dy+\int_{\beta}^{1}q(P_n(y),y)\cos[\zeta(y)Q_{n-1}(y)]dy+\frac{\pi}{\sqrt{K(0)}}\right] \tag{4.3}$$

$$q(w,y)=\vartheta(y)\exp(-w-yx),\quad \zeta(y)=\sqrt{y-\beta}\sqrt{1-y}$$

$$\chi_1(y)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}d_k\left(\sqrt{y-\beta}-\sqrt{y-1}\right)^{2k+2}$$

$$\vartheta(y)=\frac{y-\eta_0}{y\sqrt{y-\eta_0}},\quad Q_{n-1}(y)=\frac{1}{\zeta(y)}\operatorname{Im}(-\chi_2(y)),\quad P_n(y)=\operatorname{Re}[-\chi_2(y)]$$

$$\chi_2(y)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}d_k\left(i\sqrt{y-\beta}-\sqrt{1-y}\right)^{2k+2}$$

Возвращаясь в (4.1), (4.3) к старым переменным, учитываем, что в этом случае нулевой член асимптотики решения ИУ (1.4) представляется формулой (2.4).

5. Решение контактной задачи при малых t. Асимптотическое решение поставленной контактной задачи для плоского штампа при малых t получается с помощью перехода в формулах (2.4), (4.1), (4.3) (решения ИУ (1.4)) к оригиналам преобразования Лапласа. Оригиналы функций $\varphi^L_\pm(x,p)$, $\varphi^L_\infty(x,p)$ после возвращения к размерной переменной x в (4.1), (4.3) даются формулами [13]

$$\varphi_\infty(x,t)=\frac{2(1-\beta^2)\mu}{c_2K(0)}E(t) \tag{5.1}$$

$$\varphi_\pm(a\pm x,t)=\frac{2(1-\beta^2)\mu}{\pi K^0_-(0)\sqrt{c_2(a\pm x)}}\left[\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t f_k(\tau,x)\varepsilon(t-\tau)dt+b\sqrt{a\pm x}E(t)\right] \tag{5.2}$$

$$E(t)=\varepsilon'(t)+\varepsilon(0)\delta(t)$$

$$f_1(t,x)=H(t-t_2^\pm)\varkappa(t)\exp(-\psi_1(t,x))$$

$$f_2(t,x)=[H(t-t_1^\pm)-H(t-t_2^\pm)]\varkappa(t)\exp(-P_n(t/t_2^\pm))\cos(\psi_2(t,x))$$

$$\varkappa(t)=\frac{t-t_R^\pm}{t\sqrt{t-t_1^\pm}}$$

$$\psi_1(t,x)=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}d_k\left(\frac{\sqrt{t-t_1^\pm}-\sqrt{t-t_2^\pm}}{t_2^\pm}\right)^{2k+2},\quad \psi_2(t,x)=\frac{\sqrt{t-t_1^\pm}-\sqrt{t_2^\pm-t}}{t_2^\pm}Q_{n-1}\left(\frac{t}{t_2^\pm}\right)$$

$$t_i^\pm=\frac{a\pm x}{c_i}\quad(i=1,2),\qquad t_R^\pm=\eta_0t_2^\pm,\quad b=\frac{\pi K^0_-(0)}{c_2K(0)},$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда, $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, $P_n(t)$, $Q_{n-1}(t)$ определены в (4.3), $\varepsilon(0)$ – начальное (до момента времени $t=0$) внедрение штампа. Нулевой член асимптотического решения контактной задачи определяется формулой

$$\varphi(x,t)=\varphi_+(a+x,t)+\varphi_-(a-x,t)-\varphi_\infty(x,t) \tag{5.3}$$

Полученные формулы (5.1)–(5.3) позволяют провести анализ динамики контактных напряжений $\varphi(x,t)$. В результате такого анализа устанавливается следующее: 1) контактные напряжения пропорциональны скорости внедрения штампа $\varepsilon'(t)$ до прихода волн от краев штампа (для всех $x\in(c_1t-a,\ a-c_1t)$), а затем суммируются с ними; 2) контактные напряжения содержат неподвижные особенности, возникающие в краях штампа ($x=\pm a$) вида $(a+x)^{-1/2}$, а также подвижные особенности на фронтах продольных волн ($\varepsilon(0)\neq 0$), распространяющихся от краев штампа со скоростью c_1, вида $(c_1t-(a\pm x))^{-1/2}$, тогда как фронт поперечной волны, движущийся со скоростью c_2 ($c_2<c_1$), особенности не имеет [1, 2].

В частном случае, когда штамп мгновенно внедряется в упругую среду в начальный момент времени $t=0$ (при этом $\varepsilon(t)=\varepsilon_0H(t)$), контактные напряжения даются формулой (5.3), в которой

$$\varphi_\infty(x,t)=\frac{2(1-\beta^2)\mu\varepsilon_0}{c_2K(0)}\delta(t) \tag{5.4}$$

$$\varphi_\pm(a\pm x,t)=\frac{2(1-\beta^2)\mu\varepsilon_0}{\pi K^0_-(0)\sqrt{c_2(a\pm x)}}\left[\sum_{k=1}^{2}f_k(t,x)+b\sqrt{a\pm x}\delta(t)\right] \tag{5.5}$$

а $f_k(t,x)$ ($k=1,2$) и b даются в (5.2).

В случае аппроксимации $K_0(u)$ вида (3.1) при $n = 0$ в рассматриваемом случае формулы для решения контактной задачи (5.3)–(5.5) принимают наиболее простой вид, так как не содержат квадратур, а $f_k(t, x)$ даются формулами

$$f_1(t,x) = H(t-t_2^{\pm})\varkappa(t)\exp\left[\frac{d_0(1-\beta^2)t_2^{\pm}}{2\left(\sqrt{t-t_1^{\pm}}+\sqrt{t-t_2^{\pm}}\right)^2}\right]$$

$$f_2(t,x) = [H(t-t_1^{\pm}) - H(t-t_2^{\pm})]\varkappa(t)\exp\left[\left(-\frac{1+\beta}{2}+\frac{t}{t_2^{\pm}}\right)d_0\right]\cos(\psi_2(t,x))$$

$$\psi_2(t,x) = \frac{d_0\sqrt{t-t_1^{\pm}}\sqrt{t_2^{\pm}-t}}{t_2^{\pm}}$$

Функция $\varkappa(t)$ дается в (5.2).

Если постоянную аппроксимации d_0 определить из условия $K(0) = K_0(0)$, то

$$d_0 = \ln(\eta_0^2 K(0)\beta^{-1})/(1-\sqrt{\beta})^2$$

Ошибка такой аппроксимации ($n = 0$) для всех $\nu \in [0; 0{,}44]$ вдоль вещественной оси ($\tau = 0$) комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ не превышает 4%, а для всего промежутка $\nu \in [0; 0{,}5]$ – 22%. Увеличение ошибки аппроксимации при $\nu \to 0{,}5$ связано с тем, что материал полуплоскости становится несжимаемым и $K(u)$ при $\nu = 0{,}5$ принимает качественно другой математический вид: аналитическое выражение этой функции содержит только один алгебраический корень.

Полученные формулы для контактных напряжений дают возможность построить волновое поле смещений и напряжений в упругой среде. Для этого можно воспользоваться методом Каньяра–де-Хупа [2, 14] вычисления интегралов в (1.3). Формула для представления волнового поля нормальных напряжений $\sigma_{yy}(x, y, t)$ после применения метода Каньяра–де-Хупа к вычислению интеграла в (1.3) принимает вид

$$\sigma_{yy} = \frac{\mu}{c_2\beta}\varepsilon'\left(t-\frac{y}{c_1}\right) + \frac{4(1-\beta^2)\mu}{c_2K_-^0(0)}\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{t_k^{\pm}}^{t} H_k^{\pm}(\tau,x)\varepsilon(\tau-t)d\tau \qquad (5.6)$$

и содержит четыре интеграла, так как $H_k^{\pm}$,*k*) означает, что берется поочередно либо H_k^+, либо H_k^-. Введены следующие обозначения:

$$H_1^{\pm}(t,x) = \operatorname{Im}\left[\mp\frac{1}{sK_+^0(\pm is)}\frac{(s^2-1/2)^2}{R(s)}\frac{ds}{d\tau}\right]_{s=S_1^{\pm}}, \quad S_1^{\pm} = \begin{cases}\beta(\tau c_1(a\pm x) - y\rho_{11}^{\mp})r_{\pm}^{-2}, & y \leqslant \tau c_1 \leqslant r_{\pm}\\ \beta(\tau c_1(a\pm x) + iy\rho_{12}^{\pm})r_{\pm}^{-2}, & \tau c_1 \geqslant r_{\pm}\end{cases}$$

$$H_2^{\pm}(t,x) = \operatorname{Im}\left[\mp\frac{1}{K_+^0(\pm is)}\frac{\sigma_1\sigma_2}{R(s)}\frac{ds}{d\tau}\right]_{s=S_2^{\pm}}, \quad S_2^{\pm} = \begin{cases}(\tau c_2(a\pm x) - y\rho_{21}^{\mp})r_{\pm}^{-2}, & y \leqslant \tau c_2 \leqslant r_{\pm}\\ (\tau c_2(a\pm x) + iy\rho_{22}^{\pm})r_{\pm}^{-2}, & \tau c_2 \geqslant r_{\pm}\end{cases}$$

$$\rho_{mi}^{\pm} = ((-1)^{i+1}(r_{\pm}^2-\tau^2c_m^2))^{1/2}, \quad m,i = 1,2; \quad r_{\pm} = ((a\pm x)^2+y^2)^{1/2}$$

$$R(s) = (s^2-1/2)^2 + s^2\sigma_1\sigma_2, \quad \sigma_1 = \sqrt{1-s^2}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\beta^2-s^2}$$

$$t_1^{\pm} = \frac{r_{\pm}}{c_1}, \quad t_2^{\pm} = \begin{cases} r_{\pm}/c_2, & \cos\theta < \beta\\ -\beta(a\pm x) - y\sqrt{1-\beta^2}, & \cos\theta > \beta\end{cases}, \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

Функция $K_+^0(u)$ дается формулой (3.5) для общего случая аппроксимации. Формула

(5.6) позволяет дать геометрическую картину волнового поля напряжений $\sigma_{yy}(x, y, t)$ и указать особенности на фронтах упругих волн в упругой полуплоскости [2].

6. Движение штампа в упругой среде. Закон внедрения плоского жесткого штампа $\varepsilon(t)$ в упругую полуплоскость можно определить из дифференциального уравнения (штамп представляется материальной точкой массы M) с начальными условиями

$$M\ddot{\varepsilon}(t) = Q(t); \quad \varepsilon(0) = \varepsilon_0, \quad \dot{\varepsilon}(0) = v_0 \tag{6.1}$$

где $Q(t)$ – сила упругого сопротивления среды.

Для определения трансформанты Лапласа упругой силы сопротивления среды

$$Q^L(p) = -\int_{-a}^{a} \varphi^L(x, p)dx$$

воспользуемся нулевым членом асимптотики $\varphi^L(x, p)$ решения ИУ (1.4). С этой целью асимптотическое решение ИУ при малых t возьмем в новой мультипликативной форме [6]

$$\varphi^L(x, p) = \varphi_+^L(a + x, p)\varphi_-^L(a - x, p)/\varphi_\infty^L(x, p) \tag{6.2}$$

реализация которого приводит к формуле

$$Q^L(p) = -2(1-\beta^2)\mu a \frac{K(0)}{K_-(0)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} \omega^2(iu)\exp(\gamma u)du \tag{6.3}$$

$$\omega(iu) = -(uK_+^0(iu))^{-1}, \quad \gamma = 2/\Lambda, \quad \operatorname{Re} c > 0$$

Функции $K_\pm^0(u)$ даются формулой (3.5).

Для $t < 2a/c_1$ формула (6.3) принимает вид

$$Q^L(p) = -\frac{2(1-\beta^2)\mu K(0)}{K_-(0)} \left[\frac{2ap}{c_2 K_+^2(0)} - \frac{2iK_+'(0)}{K_+^3(0)} \right] \varepsilon^L(p) \tag{6.4}$$

Из решения (6.1) с помощью преобразования Лапласа при использовании выражения (6.4) найдем

$$\varepsilon^L(p) = \frac{\varepsilon_0 p + v_0}{(p + u_*)^2 + \delta_*}, \quad u_* = \frac{\mu a}{\beta c_2 M} \tag{6.5}$$

$$\delta_* = \frac{\mu \zeta_0}{M\beta^2 \eta_0} - u_*^2, \quad \zeta_0 = \sqrt{\beta}\eta_0 \ln[2(1-\beta^2)\eta_0^2] + 2\beta - \eta_0$$

Расчеты показывают, что $\delta_* > 0$ для всех $\nu \in [0; 0{,}44]$, т.е. для тех значений ν, при которых аппроксимация $K_0(u)$ (3.1) при $n = 0$ допускает по отношению к $K(u)$ ошибку меньшую 4% вдоль действительной оси. Для таких ν величина внедрения штампа принимает вид ($\varepsilon_0 = 0$)

$$\varepsilon(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\delta_*}} \exp(-u_* t) \sin \sqrt{\delta_*} t \tag{6.6}$$

Глубина максимального внедрения штампа в упругую среду при этом дается формулой

$$\max \varepsilon(t_*) = \frac{v_0 \theta_*}{\sqrt{\delta_*(1 + \theta_*)}} \exp\left(-\frac{\operatorname{arctg} \theta_*}{\theta_*} \right); \tag{6.7}$$

$$t_* = \frac{1}{\sqrt{\delta_*}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\delta_*}}{u_*}, \quad \theta_* = \frac{u_*}{\sqrt{\delta_*}}$$

где t_* – время максимального заглубления, определяемое из условия $\dot{\varepsilon}(t_*) = 0$.

№	Материал	$\mu \times 10^{10}, \frac{\text{Н}}{\text{м}}$	$\rho \times 10^3, \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}$	ν	max ε, мм	$t_* \times 10^4$, с
1	Алюминий	2,5	2,7	0,35	2,16	1,21
2	Гранит	4,0	3,0	0,10	1,15	0,62
3	Медь	3,0	8,9	0,35	1,82	1,06
4	Сталь	8,0	7,7	0,25	1,24	0,71
5	Стекло	2,9	2,5	0,20	2,13	1,17
6	Чугун	4,4	7,0	0,25	1,60	0,90

По формулам (6.7) производились расчеты max ε и t_* при $M = 200$ кг, $a = 1$ см, $\nu_0 = 30$ м/с. Результаты приведены в таблице для различных материалов с указанием их характеристик [14], принятых при расчетах.

Автор благодарит В.М. Александрова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Флитман Л.М.* Динамическая задача о штампе на упругой полуплоскости // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 4. С. 697–705.
2. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
3. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Операционное исчисление. М.: Высш. шк., 1966. 405 с.
4. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 468 с.
5. *Сеймов В.М.* Динамические контактные задачи. Киев: Наук. думка, 1976. 283 с.
6. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
7. *Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
8. *Нобл Б.* Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
9. *Koiter W.T.* Approximate solution of Wiener-Hopf type untegral equation with applications. Pts I–III // Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenchap. 1954. B. 57. P. 558–559.
10. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
11. *Боев С.И., Сумбатян М.А.* Динамическая контактная задача для упругой полуплоскости при высоких частотах колебания // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 1039–1043.
12. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.
13. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, 1969. 343 с.
14. *De Hoop A.T.* A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems // Appl. Sci. Res. Sec. B. 1960. V. 8. № 4. P. 349–356.
15. *Кошкин Н.И., Ширкевич М.Г.* Справочник по элементарной физике. М.: Наука, 1965. 246 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
13.VIII.1998