УДК 539.3

© 1999 г. В.М. Александров, Д.А. Пожарский

ОБ ОДНОМ АСИМПТОТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ

Предлагается модификация сингулярного асимптотического метода "малых λ" решения интегральных уравнений смешанных задач механики сплошных сред [1] в случае специального поведения символа ядра, встречающегося, например, в контактных задачах теории упругости для цилиндрических и конических тел [2–4]. В качестве примера рассмотрены контактные задачи для упругих цилиндрических тел.

В отличие от традиционного подхода к решению интегральных уравнений рассматриваемого типа [3, 4], в соответствии с которым символ ядра аппроксимировали суммой двух легко факторизуемых функций, что приводило к необходимости последующего применения некоторого итеративного процесса, в данной работе символ аппроксимируется одной легко факторизуемой функцией. Это значительно упрощает схему решения и позволяет получить простые приближенные формулы для механических характеристик. Впервые на возможность такой аппроксимации указано в [5].

1. Многие смешанные задачи механики сплошных сред сводятся к решению интегрального уравнения относительно функции $\varphi(x)$ вида

$$\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)k\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)d\xi=\pi f(x)\quad(|x|\leq 1) \tag{1.1}$$

$$k(t)=\int_0^\infty K(u)\cos ut\,du \tag{1.2}$$

Здесь $f(x)$ и $K(u)$ – известные функции, причем символ ядра (1.2) $K(u)$ – четная, мероморфная в комплексной плоскости функция. Пусть для $K(u)$ имеют место разложения

$$\begin{gathered}K(u)=c_0|u|^{-1}+c_1u^{-2}+c_2u^{-3}+c_3u^{-4}+O\left(|u|^{-5}\right),\quad c_0=1,\quad(|u|\to\infty)\\ K(u)=d_0+d_1|u|+d_2u^2+d_3|u|^3+O(u^4),\quad d_0=A\quad(u\to 0)\end{gathered} \tag{1.3}$$

Рассмотрим две аппроксимации $K(u)$ легко факторизуемыми функциями

$$K^*(u)=\frac{\sqrt{u^2+B^2}}{u^2+C^2}\exp\left(\frac{D}{\sqrt{u^2+E^2}}\right),\quad\frac{B}{C^2}\exp\left(\frac{D}{E}\right)=A,\quad D=c_1 \tag{1.4}$$

$$K^*(u)=\frac{\sqrt{u^2+B^2}}{u^2+C^2}\exp\left(\frac{D|u|}{u^2+E^2}\right),\quad\frac{B}{C^2}=A,\quad D=c_1 \tag{1.5}$$

Положительные постоянные B, C, D, E в этих аппроксимациях следует подбирать так, чтобы функция $K^*(u)$ возможно точнее отражала бы поведение функции $K(u)$ на действительной оси, особенно при $u \to 0$ и $u \to \infty$. Поэтому аппроксимацию (1.4) рекомендуется применять, если в (1.3) $d_1 = 0$. При $d_1 \neq 0$ (что имеет место, например, в задаче, разобранной в [5]) следует использовать аппроксимацию (1.5). Если погрешность аппроксимаций (1.4), (1.5) слишком велика, их без ограничения общности можно усложнить путем домножения аргумента экспоненты и (или) множителя перед экспонентой на дробь – отношение полиномов одинаковой степени относительно u^2.

Для простоты далее ограничимся случаем $f(x) = f$. Известно [6], что главный член асимптотического решения уравнения (1.1) с ядром в форме (1.2), (1.4) или (1.5) при малых λ может быть представлен в форме

$$\varphi(x) = \frac{f}{\lambda}\left[\omega\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) + \omega\left(\frac{1-x}{\lambda}\right) - v\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right] \quad (1.6)$$

а функции $\omega(s)$ и $v(s)$ находят из уравнений

$$\int_0^\infty \omega(\tau)d\tau \int_0^\infty K^*(u)\cos u(\tau - s)du = \pi \quad (0 \leqslant s < \infty) \quad (1.7)$$

$$\int_{-\infty}^\infty v(\tau)d\tau \int_0^\infty K^*(u)\cos u(\tau - s)du = \pi \quad (-\infty < s < \infty) \quad (1.8)$$

Рассмотрим сперва аппроксимацию (1.4). Интегральное уравнение (1.8) решается с помощью теоремы о свертках для преобразования Фурье. В результате получим $v(s) = A^{-1}$. Для решения интегрального уравнения (1.7) применим метод Винера – Хопфа [7]. В итоге получим

$$\omega(s) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{e^{-ius}ds}{(-iu)K_+^*(0)K_+^*(u)} \quad (1.9)$$

где контур Γ – прямая, лежащая чуть выше вещественной оси в плоскости комплексного переменного u, а функции $K_\pm^*(u)$ находят в результате факторизации, т.е. представления

$$K^*(u) = K_+^*(u)K_-^*(u) \quad (1.10)$$

причем функция $K_+^*(u)$ ($K_-^*(u)$) регулярна в полуплоскости $\operatorname{Im} u > -\varepsilon$ ($\operatorname{Im} u < \varepsilon$) и не имеет там нулей; $\varepsilon = \min(B, C, E)$.

Факторизацию (1.10) выполним в виде ([7], с. 107)

$$K_\pm^*(u) = \frac{\sqrt{B \mp iu}}{C \mp iu} e^{Df_\pm(u)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{u^2+E^2}} = f_+(u) + f_-(u), \quad f_\pm(u) = \frac{\pm i}{\pi\sqrt{u^2+E^2}} \ln \frac{u + \sqrt{u^2+E^2}}{\pm iE} \quad (1.11)$$

Здесь функции $f_+(u)$ и $f_-(u)$ регулярны соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im} u > -\varepsilon$ и $\operatorname{Im} u < \varepsilon$.

Теперь найдем, что $K_+^*(0) = \sqrt{A}$. Для удобства примем в выражении (1.9) $u = ip$, тогда с помощью формул (1.11) будем иметь

$$\omega(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_*} \frac{\Omega(p)}{p} e^{ps}dp, \quad \Omega(p) = \frac{p+C}{\sqrt{A(p+B)}} e^{g(p)}$$

$$g(p) = \frac{-D}{\pi\sqrt{p^2-E^2}} \ln \frac{p + \sqrt{p^2-E^2}}{E} \quad (1.12)$$

где контур Γ_* – прямая, лежащая чуть правее мнимой оси в плоскости комплексного переменного p.

Из (1.12) видно, что функция $\Omega(p)$ является преобразованием от $\omega(s)$ по Лапласу – Карсону. Такую связь будем далее обозначать так: $\Omega(p) : \to \omega(s)$. Допустим, что значение постоянной E в (1.4) достаточно велико, так что функцию $\exp[g(p)]$, где $g(p)$ имеет представление (1.12), можно в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ с высокой степенью точности приблизить следующим образом:

$$e^{g(p)} \approx 1 + g(p) \tag{1.13}$$

Подставляя выражение (1.13) в первое соотношение (1.12) и используя справочные таблицы [8] и теорему о свертке для преобразования Лапласа, находим для функции $\omega(s)$ приближенное выражение:

$$\omega(s) = \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{e^{-Bs}}{\sqrt{\pi s}} + \frac{C}{\sqrt{B}}\operatorname{erf}\sqrt{Bs} + I(s)\right), \quad I(s) \leftarrow: \frac{p+C}{\sqrt{p+B}}g(p)$$
$$I(s) = \frac{-D}{\pi}\int_0^s \left[\frac{e^{-B(s-\tau)}}{\sqrt{\pi(s-\tau)}} + \frac{C}{\sqrt{B}}\operatorname{erf}\sqrt{B(s-\tau)}\right]K_0(E\tau)d\tau \tag{1.14}$$

Здесь $\operatorname{erf}(x)$ – интеграл вероятностей, а $K_0(t)$ – функция Бесселя, для вычисления которых удобны специальные аппроксимации ([9], с. 122, 199–200).

Для интегральной характеристики решения уравнения (1.1)

$$P = \int_{-1}^{1} \varphi(x)dx \tag{1.15}$$

на основании (1.6) получим выражение

$$\frac{P}{f} = 2\int_0^{\zeta}\omega(\tau)d\tau - \frac{\zeta}{A}, \quad \zeta = \frac{2}{\lambda} \tag{1.16}$$

Подставляя выражение (1.14) в формулу (1.16) и принимая во внимание, что [8]

$$\int_0^s I(\tau)d\tau \leftarrow: \frac{p+C}{p\sqrt{p+B}}g(p) :\to J(s) = \frac{-D}{\pi}\int_0^s \left\{\frac{C}{B}\sqrt{\frac{s-\tau}{\pi}}e^{-B(s-\tau)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\operatorname{erf}\sqrt{B(s-\tau)}}{\sqrt{B}}\left[1 - \frac{C}{2B} + C(s-\tau)\right]\right\}K_0(E\tau)d\tau \tag{1.17}$$

находим

$$\frac{P}{f} = \frac{2C}{\sqrt{AB}}\left[\left(\zeta - \frac{1}{2B} + \frac{1}{C}\right)\operatorname{erf}\sqrt{B\zeta} + \sqrt{\frac{\zeta}{\pi B}}e^{-B\zeta}\right] - \frac{\zeta}{A} + \frac{2}{\sqrt{A}}J(\zeta) \tag{1.18}$$

Выражение (1.18) при $\lambda \leqslant \lambda_*$ можно значительно упростить, если принять во внимание, что из соотношения

$$\frac{p+C}{p\sqrt{p+B}}g(p) = \frac{-CD}{2\sqrt{B}Ep}\left[1 - \left(\frac{1}{2B} - \frac{1}{C} + \frac{2}{\pi E}\right)p + O\left(p^2\right)\right] \quad (p \to 0) \tag{1.19}$$

вытекает асимптотическое равенство [10]

$$J(s) = \frac{-CD}{2\sqrt{B}E}\left(s - \frac{1}{2B} + \frac{1}{C} - \frac{2}{\pi E} + O\left(s^{-1}\right)\right) \quad (s \to +\infty) \tag{1.20}$$

Внося представление (1.20) в формулу (1.18), получим при $\lambda \leqslant 1/4$

$$\frac{P}{f}=\zeta\left[\frac{C}{\sqrt{AB}}\left(2-\frac{D}{E}\right)-\frac{1}{A}\right]+\frac{C}{\sqrt{AB}}\left[\frac{2}{C}-\frac{1}{B}-\frac{D}{E}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{2B}-\frac{2}{\pi E}\right)\right] \tag{1.21}$$

Отметим, что наряду с аддитивной формой главного члена асимптотического решения задачи при малых λ (1.6) часто применяют эквивалентную мультипликативную форму [6]

$$\varphi(x)=\frac{fA}{\lambda}\omega\left(\frac{1+x}{\lambda}\right)\omega\left(\frac{1-x}{\lambda}\right) \tag{1.22}$$

Рассмотрим теперь аппроксимацию (1.5). Преимуществом аппроксимации (1.5) можно считать то, что при ней значительно легче, чем при (1.4) удовлетворить условию (1.13). Эффективному решению уравнений (1.7), (1.8) мешает неаналитичность функции $K^*(u)$ вида (1.5). Поэтому воспользуемся методом возмущения, заменив функцию $K^*(u)$ выражением

$$K^*(u)=\frac{\sqrt{u^2+B^2}}{u^2+C^2}\exp\left(\frac{D\sqrt{u^2+\varepsilon^2}}{u^2+E^2}\right) \tag{1.23}$$

а затем устремим ε к нулю.

Решение интегрального уравнения (1.8) после такой замены по-прежнему дается выражением $v(s)=A^{-1}$ (но здесь формула для A уже другая).

Факторизацию (1.10) легко выполнить, если аргумент у экспоненты в формуле (1.23) представить так:

$$\frac{D\sqrt{u^2+\varepsilon^2}}{u^2+E^2}=D[g_+(u)+g_-(u)] \tag{1.24}$$

где функции $g_+(u)$ и $g_-(u)$ регулярны соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im} u>-\varepsilon$ и $\operatorname{Im} u<\varepsilon$. Тогда

$$K_\pm^*(u)=\frac{\sqrt{B\mp iu}}{C\mp iu}e^{Dg_\pm(u)} \tag{1.25}$$

Для построения функций $g_\pm(u)$ воспользуемся тождеством

$$\frac{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}}{u^2+E^2}=\frac{1}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}}-\frac{E^2-\varepsilon^2}{2iE}\left[\frac{1}{(u-i\varepsilon)\sqrt{u^2+\varepsilon^2}}-\frac{1}{(u+i\varepsilon)\sqrt{u^2+\varepsilon^2}}\right] \tag{1.26}$$

и известными [7] формулами

$$\frac{1}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}}=f_+(u)+f_-(u),\quad f_\pm(u)=\frac{\pm i}{\pi\sqrt{u^2+\varepsilon^2}}\ln\frac{u+\sqrt{u^2+\varepsilon^2}}{\pm i\varepsilon}$$

$$\frac{1}{(u-\xi)\sqrt{u^2+E^2}}=F_+(u)+F_-(u) \tag{1.27}$$

$$F_+(u)=\frac{f_+(u)\mp f_\pm(\xi)}{u-\xi},\quad F_-(u)=\frac{f_-(u)\pm f_\pm(\xi)}{u-\xi}$$

где в последних двух формулах берется верхний знак, если точка ξ расположена в верхней полуплоскости и наоборот. На основании соотношений (1.26), (1.27) получим

$$g_+(u)=\frac{1}{\sqrt{u^2+E^2}}\left[\left(u^2+\varepsilon^2\right)f_+(u)-iu\frac{E^2-\varepsilon^2}{E}f_+(iE)\right] \tag{1.28}$$

Выражение для $g_-(u)$ аналогично.

Произведем в представлении (1.28) частичный переход к пределу $\varepsilon \to 0$, тогда

$$g_+(u) = \frac{-iu}{u^2 + E^2}\left[iuf_+(u) + Ef_+(iE)\right] \tag{1.29}$$

Теперь нетрудно убедиться, что $K_+^*(0) = \sqrt{A}$. Далее для функции $\omega(s)$ получим представление (1.12), где следует положить

$$g(p) = \frac{-Dp}{p^2 - E^2}\left[pf(p) - Ef(E)\right], \quad f(p) = \frac{1}{\pi\sqrt{p^2 - \varepsilon^2}}\ln\frac{p + \sqrt{p^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \tag{1.30}$$

Запишем следующую цепочку соотношений [8]:

$$pf(p): \to \frac{K_0(\varepsilon s)}{\pi} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} -\frac{\ln(\varepsilon s/2) + \mathrm{C}}{\pi} \leftarrow: \frac{\ln(2p/\varepsilon)}{\pi} \tag{1.31}$$

где C – постоянная Эйлера.

На основании цепочки (1.31) перейдем к окончательному пределу при $\varepsilon \to 0$ в выражении (1.30) для $g(p)$. В результате

$$g(p) = \frac{-Dp}{\pi\left(p^2 - E^2\right)}\ln\frac{p}{E} \tag{1.32}$$

Приближенное равенство (1.13), (1.32), например, на положительной части действительной оси p выполняется с высокой точностью при меньших ограничениях на значение E из (1.5) (E не должно быть слишком малым), чем в случае (1.4), (1.12) (при одном и том же значении D). Используя первую формулу (1.12), (1.13), (1.32) и справочные таблицы [8], находим для функции $\omega(s)$ приближенное выражение

$$\omega(s) = \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{e^{-Bs}}{\sqrt{\pi s}} + \frac{1}{\sqrt{A}}\operatorname{erf}\sqrt{Bs} + I(s)\right), \quad I(s) \leftarrow: \frac{p + C}{\sqrt{p + B}}g(p)$$

$$I(s) = \frac{D}{2\pi}\int_0^s\left[\frac{e^{-B(s-\tau)}}{\sqrt{\pi(s-\tau)}} + \frac{1}{\sqrt{A}}\operatorname{erf}\sqrt{B(s-\tau)}\right]\left[e^{E\tau}\operatorname{Ei}(-E\tau) + e^{-E\tau}\operatorname{Ei}(E\tau)\right]d\tau \tag{1.33}$$

Здесь $\operatorname{Ei}(\pm x)$ – интегральная показательная функция [11], для численной реализации которой удобно использовать формулы [9]

$$\operatorname{Ei}(x) = \ln x + \mathrm{C} + \int_0^x \frac{e^t - 1}{t}dt, \quad \operatorname{Ei}(-x) = -E_1(x) \quad (x > 0) \tag{1.34}$$

где для функции $E_1(x)$ имеются высокоточные аппроксимации 5.1.53 и 5.1.54 [9], а интеграл в (1.34) можно вычислять по квадратурной формуле Гаусса.

Как и ранее, для интегральной характеристики Pf^{-1} получим выражение ($\zeta = 2/\lambda$)

$$\frac{P}{f} = \left[\frac{2\zeta}{A} - \frac{1}{AB} + \frac{2}{\sqrt{AB}}\right]\operatorname{erf}\sqrt{B\zeta} + \frac{2}{A}\sqrt{\frac{\zeta}{\pi B}}e^{-B\zeta} - \frac{\zeta}{A} + \frac{2}{\sqrt{A}}J(\zeta)$$

$$J(s) = \int_0^s I(\tau)d\tau = \frac{D}{2\pi E}\int_0^s\left[\frac{e^{-B(s-\tau)}}{\sqrt{\pi(s-\tau)}} + \frac{1}{\sqrt{A}}\operatorname{erf}\sqrt{B(s-\tau)}\right]\times \tag{1.35}$$

$$\times\left[e^{E\tau}\operatorname{Ei}(-E\tau) - e^{-E\tau}\operatorname{Ei}(E\tau)\right]d\tau$$

Выражение (1.35) при $\lambda \leqslant \lambda_*$ можно значительно упростить, если принять во внимание, что из соотношения

$$\frac{p+C}{p\sqrt{p+B}}g(p)=\frac{D}{\pi\sqrt{A}E^2}\left[1+\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{2B}\right)p+O\left(p^2\right)\right]\ln\frac{p}{E}\quad (p\to 0) \tag{1.36}$$

вытекает асимптотическое равенство [10]

$$J(s)=\frac{-D}{\pi\sqrt{A}E^2}\left[\ln(Es)+\mathrm{C}+\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{2B}\right)\frac{1}{s}+O\left(s^{-2}\right)\right]\quad (s\to +\infty) \tag{1.37}$$

Подставив представление (1.37) в первую формулу (1.35), получим при $\lambda \leqslant 1/4$

$$\frac{P}{f}=\frac{\zeta}{A}-\frac{2D}{\pi A E^2}\left[\ln(E\zeta)+\mathrm{C}+\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{2B}\right)\frac{1}{\zeta}\right]+\frac{2}{\sqrt{AB}}-\frac{1}{AB} \tag{1.38}$$

2. В качестве примера рассмотрим известные [2, 3] осесимметричные контактные задачи о взаимодействии бесконечного упругого цилиндра радиуса R с жестким бандажом шириной $2a$ и основанием $r=R-\delta$ (задача 1), а также задачу о взаимодействии упругого пространства, ослабленного бесконечной цилиндрической полостью радиуса R, с жестким вкладышем шириной $2a$ и основанием $r=R+\delta$ (задача 2). После введения безразмерных величин

$$x=\frac{z}{a},\quad \lambda=\frac{R}{a},\quad \varphi(x)=\frac{q(ax)}{\theta},\quad f=\frac{\delta}{a} \tag{2.1}$$

где $q(z)$ – неизвестные нормальные контактные давления, θ – контактная жесткость, придем к уравнению (1.1), в котором для задачи 1

$$K(u)=\left[u^2\left(\Omega_1^2(u)-1\right)-2(1-\nu)\right]^{-1};\quad \Omega_1(u)=I_0(u)/I_1(u) \tag{2.2}$$

а для задачи 2

$$K(u)=\left[u^2\left(\Omega_2^2(u)-1\right)+2(1-\nu)\right]^{-1};\quad \Omega_2(u)=K_0(u)/K_1(u) \tag{2.3}$$

Для задач 1, 2 в разложении (1.3) при больших значениях $|u|$ в случае $\nu=0{,}3$ следует положить соответственно

$$\begin{aligned}&1)\ c_1=0{,}4,\ c_2=-0{,}965,\ c_3=-2{,}336\\ &2)\ c_1=-0{,}4,\ c_2=-0{,}965,\ c_3=2{,}336\end{aligned} \tag{2.4}$$

При малых значениях u имеем

$$\begin{aligned}&1)\ K(u)=[2(1+\nu)]^{-1}[1+O(u^4)]\\ &2)\ K(u)=[2(1-\nu)]^{-1}\{1-u^2[2(1-\nu)]^{-1}+O(u^4\ln^2 u)\}\end{aligned} \tag{2.5}$$

Из формул (2.5) видно, что для обеих задач больше подходит аппроксимация (1.4), в которой для выполнения условия (1.13) следует брать $E>1$. Тем не менее исследуем решение и при аппроксимации (1.5), сравнительно высокой точности которой можно достичь за счет малости величины DE^{-2} по сравнению с A, поскольку в разложении функции (1.5) при $u\to 0$ присутствует член $DE^{-2}|u|$. Далее полагаем, что коэффициент Пуассона $\nu=0{,}3$. Тогда в случае (1.4) для задач 1, 2 имеем соответственно

$$\begin{aligned}&1)\ B=1{,}4442,\ C=2{,}0929,\ D=0{,}4,\ E=2{,}5968\\ &2)\ B=0{,}8353,\ C=0{,}8970,\ D=-0{,}4,\ E=1{,}0699\end{aligned} \tag{2.6}$$

и погрешность аппроксимации (1.4) при всех $0\leqslant u<\infty$ не превосходит 8,7% для задачи 1 и 5% для задачи 2. Кроме того, для задачи 1 в точности учтена асимптотика (2.5). При значениях (2.6) погрешность аппроксимации (1.13), (1.12), например, на положительной части вещественной оси, для задачи 1 не превосходит 1%, а для задачи 2 – 2%.

λ	8	4	2	1	½	¼
χ_1^1 [2]	1,44	2,09	3,55	–	–	–
χ_1^1 (1.18)	–	–	3,42	5,97	11,1	21,5
χ_1^1 (1.35)	–	–	3,30	5,77	10,9	21,2
χ_2^1 [2]	0,459	0,685	1,20	–	–	–
χ_2^1 (1.6), (1.4)	–	–	1,29	2,52	5,14	10,3
χ_2^1 (1.6), (1.5)	–	–	1,22	2,42	5,04	10,3
χ_3^1 [2]	0,459	0,651	1,00	–	–	–
χ_3^1 (1.22), (1.4)	–	–	0,896	1,28	1,81	2,57
χ_3^1 (1.22), (1.5)	–	–	0,878	1,27	1,81	2,57
χ_1^2 [2]	1,32	1,77	2,52	–	–	–
χ_1^2 (1.18)	–	–	2,45	3,86	6,59	12,0
χ_1^2 (1.35)	–	–	2,47	3,95	6,87	12,8
χ_2^2 [2]	0,432	0,602	0,924	–	–	–
χ_2^2 (1.6), (1.4)	–	–	0,872	1,48	2,76	5,43
χ_2^2 (1.6), (1.5)	–	–	0,885	1,53	2,92	5,87
χ_3^2 [2]	0,402	0,518	0,640	–	–	–
χ_3^2 (1.22), (1.4)	–	–	0,686	0,937	1,32	1,86
χ_3^2 (1.22), (1.5)	–	–	0,697	0,964	1,37	1,93

Внося в формулу (1.21) значения постоянных (2.6), имеем

$$1)\ Pf^{-1} = 2{,}5838\,\zeta + 0{,}7882;\quad 2)\ Pf^{-1} = 1{,}3567\,\zeta + 1{,}1648 \tag{2.7}$$

При $\lambda \leqslant 1/4$ значения, рассчитанные по формулам (2.7), отличаются менее, чем на 1% от соответствующих значений, получаемых по формуле (1.18).

При аппроксимации (1.5) найдем, что

$$1)\ B = 1{,}0962,\ C = 1{,}6882,\ D = 0{,}4,\ E = 3{,}0193 \tag{2.8}$$

$$2)\ B = 0{,}3562,\ C = 0{,}7062,\ D = -0{,}4,\ E = 0{,}7501$$

и погрешность аппроксимации (1.5) при всех $0 \leqslant u < \infty$ для обеих задач не превосходит 5%. При значениях (2.8) погрешность аппроксимации (1.13), (1.32), например, на положительной части вещественной оси, для обеих задач не превосходит 1%.

Внося в формулу (1.38) значения постоянных (2.8) и отбрасывая члены порядка ζ^{-1} в силу их малости, имеем

$$\begin{aligned} &1)\ Pf^{-1} = 2{,}5999\,\zeta - 0{,}07262 \ln\zeta + 0{,}5862 \\ &2)\ Pf^{-1} = 1{,}4001\,\zeta + 0{,}6337 \ln\zeta + 0{,}2181 \end{aligned} \tag{2.9}$$

При $\lambda \leqslant 1/4$ значения, рассчитанные по формулам (2.9), отличаются менее, чем на 1% от соответствующих значений, получаемых по формуле (1.35). Кроме того, при $\lambda \leqslant 1/4$ значения, получаемые по формулам (2.9), отличаются от значений (2.7) для задач 1, 2 соответственно на 2% и 7%, что свидетельствует о приемлемости аппроксимации (1.5) для решения задач 1 и 2 при малых λ.

В таблице приведены значения величин

$$\chi_1^n = Pf^{-1},\quad \chi_2^n = \varphi(0)f^{-1},\quad \chi_3^n = \lim \varphi(x)\sqrt{1-x^2}\,f^{-1} \quad (x \to 1) \tag{2.10}$$

рассчитанные по приведенным выше формулам при малых λ, а также по формулам (1.3), (1.12), (1.14)–(1.18) из [2] при больших λ. Обратим внимание, что ранее ([2], с. 708) постоянные c_n (2.4), а следовательно, и a_{nm} вида (2.9) [2] для задач 1 и 2 были выписаны неверно, в связи с чем следует признать неточными и расчеты по методу "больших λ" из [2]. Пересчитанные значения оказались следующими:

$$
\begin{aligned}
&1)\ a_{30} = -0{,}556,\ a_{20} = -0{,}628,\ a_{11} = -0{,}428,\ a_{31} = 1{,}427,\ a_{21} = -0{,}612 \\
&2)\ a_{30} = -0{,}459,\ a_{20} = 0{,}628,\ a_{11} = -0{,}428,\ a_{31} = -0{,}390,\ a_{21} = 0{,}612
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Значение верхнего индекса $n = 1, 2$ в (2.10) соответствует задачам 1 и 2. Значения $\chi^n_{2,3}$ при $\lambda = 2$, полученные по формулам (1.6), (1.22), стыкуются со значениями этих величин, найденными [3] на основе другой модификации сингулярного асимптотического метода малых λ. В окрестности значения $\lambda = 2$ заметно смыкание асимптотических решений в пределах их точности. Таким образом, можно утверждать, что получено эффективное решение задач 1 и 2 во всем диапазоне изменения безразмерного параметра $\lambda \in (0, \infty)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00133а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В.М., Коваленко Е.В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.
2. *Александров В.М., Белоконь А.В.* Асимптотическое решение одного класса интегральных уравнений и его применение к контактным задачам для цилиндрических упругих тел // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 4. С. 704–710.
3. *Александров В.М., Белоконь А.В.* Асимптотическое решение одного класса интегральных уравнений, встречающихся при изучении смешанных задач математической физики для областей с цилиндрическими границами // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 3. С. 401–413.
4. *Пожарский Д.А.* О пространственной контактной задаче для упругого конуса // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 4. С. 51–60.
5. *Александров В.М.* Контактная задача с учетом износа, вызванного локальным оплавлением // Физ.-хим. механика материалов. 1986. Т. 22. № 1. С. 116–124.
6. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
7. *Нобл Б.* Метод Винера – Хопфа. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 276 с.
8. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974. 542 с.
9. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.
10. *Риекстыньш Э.Я.* Асимптотические разложения интегралов. Т. 2. Рига: Зинатне, 1977. 464 с.
11. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

Москва, Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
23.X.1997