УДК (532.5 + 539.3) : 534.1

© 1999 г. В.И. Ерофеев, И.Н. Солдатов

ПОВЕРХНОСТНАЯ СДВИГОВАЯ ВОЛНА НА ГРАНИЦЕ УПРУГОГО ТЕЛА С МИКРОПОЛЯРНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Рассматривается задача о распространении поверхностной сдвиговой волны (ПСВ) вдоль границы упругого и жидкого микрополярного полупространств. Определены фазовая скорость такой волны и коэффициент ее затухания. Показано, что ПСВ на границе микрополярной жидкости и твердого тела распространяется практически без дисперсии, в отличие от случая распространения волны на границе ньютоновской вязкой жидкости, где на высоких частотах дисперсия заметна. Затухание ПСВ в первом случае значительно слабее, чем во втором. Отмечается уменьшение коэффициента затухания с увеличением граничной вязкости.

Известно, что на границе упругой среды с вязкой жидкостью может существовать поверхностная слабо неоднородная сдвиговая затухающая волна; ее свойства достаточно полно исследованы [1–3]. На особенностях распространения ПСВ верхнего мегагерцевого и гигагерцевого диапазонов может сказываться микроструктура как твердого тела, так и жидкости. Здесь ограничимся рассмотрением влияния микрополярности жидкости на ПСВ.

Введем ортогональную декартову систему координат таким образом, чтобы плоскость xy совпадала с границей раздела двух сред. Ось z направим вглубь микрополярной жидкости.

Волновой процесс в изотропном линейно-упругом полупространстве описывается уравнением [4]

$$\mathbf{u}_{tt} - c_l^2 \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} + c_\tau^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} = 0 \tag{1}$$

где $\mathbf{u}$ – вектор перемещения, c_l – скорость волн дилатации, c_τ – скорость волн сдвига. Для описания волнового движения в вязкой микрополярной несжимаемой жидкости в линейном приближении используются уравнения [5–7]

$$\begin{gathered}\mathbf{V}_t = -\frac{\nabla p}{\rho_f} + (\nu + \nu_r)\Delta\mathbf{V} + 2\nu_r \operatorname{rot}\boldsymbol{\omega} \\ I\boldsymbol{\omega}_t = 2\nu_r(\operatorname{rot}\mathbf{V} - 2\boldsymbol{\omega}) + \gamma\Delta\boldsymbol{\omega} + (\vartheta + \delta)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\omega} \\ \operatorname{div}\mathbf{V} = 0\end{gathered} \tag{2}$$

где $\mathbf{V}$ – вектор скорости, ρ_f – плотность жидкости, p – давление, I – скалярная постоянная с размерностью момента инерции единицы массы, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор микровращений, ν – коэффициент кинематической ньютоновской сдвиговой вязкости, ν_r, ϑ, δ, γ – коэффициенты моментной вязкости.

Используя представление для вектора микровращений $\boldsymbol{\omega}$ через потенциалы Лэмба

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla\Theta + \operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{\psi} = 0 \tag{3}$$

и принимая, что волна распространяется вдоль оси x, а движение частиц происходит вдоль оси y перпендикулярно вектору распространения, исходные векторные урав-

нения (1), (2) сводим к четырем скалярным уравнениям

$$u_{tt} = c_\tau^2 \Delta_\perp u \tag{4}$$

$$V_t = (\nu + \nu_r)\Delta_\perp V - 2\nu_r \Delta_\perp \psi \tag{5}$$

$$I\psi_t = 2\nu_r (V - 2\psi) + \gamma \Delta_\perp \psi \tag{6}$$

$$I\Theta_t = -4\nu_r \Theta + (\vartheta + \gamma + \delta)\Delta_\perp \Theta, \quad \Delta_\perp = \partial_x^2 + \partial_z^2 \tag{7}$$

Далее, поскольку все величины зависят лишь от двух пространственных переменных, вместо $\Delta_\perp$ используем обозначение Δ. От связанных уравнений (5) и (6) удобно перейти к уравнениям, содержащим лишь одну зависимую переменную:

$$LV = 0, \; L\psi = 0 \tag{8}$$

$$L = I\partial_t^2 - 4\nu\nu_r \Delta + \gamma(\nu + \nu_r)\Delta^2 - \left(I(\nu + \nu_r) + \gamma\right)\partial_t \Delta + 4\nu_r \partial_t$$

На границе раздела сред ($z = 0$) должны выполняться условия

$$u_t = V \tag{9}$$

$$\rho_s c_\tau^2 u_z = \rho_f (\nu - \nu_r) V_z - 2\nu_r \rho_f (\Theta_x - \psi_z) \tag{10}$$

$$2(\Theta_x - \psi_z) + \alpha V_z = 0, \quad 2(\Theta_z - \psi_x) - \alpha V_x = 0 \tag{11}$$

$$\delta \Delta \Theta + (\gamma + \vartheta)(\Theta_{zz} + \psi_{xz}) = 0, \quad (\vartheta + \gamma)\Theta_{xz} + \vartheta \psi_{xx} - \gamma \psi_{zz} = 0 \tag{12}$$

Здесь α может принимать значение из полуотрезка (01], ρ_s – плотность упругой среды. Соотношение (9) представляет собой условие непрерывности скоростей перемещений, (10) – условие непрерывности касательных напряжений, (11) – условие пропорциональности вектора микровращений средней угловой скорости частиц жидкой среды, (12) – условие обращения в нуль моментных напряжений.

Граничное условие (10), учитывая первое равенство (11), удобнее записать в виде

$$\rho_s c_\tau^2 u_z = \rho_f (\nu - \nu_r + \nu_r \alpha) V_z \tag{13}$$

Имеет смысл преобразовать, используя уравнение (6), и второе граничное условие (12) к виду

$$(\vartheta + \gamma)(\Theta_{xz} + \psi_{xx}) - I\psi_t + 2\nu_r (V - 2\psi) = 0 \tag{14}$$

Будем искать решение системы уравнений (4)–(7) в виде бегущей неоднородной волны (с.с. – величина, комплексно-сопряженная предыдущему выражению)

$$\begin{gathered}
u = \hat{U} \exp(-i\omega t + ikx + \lambda z) + \text{c.c.}, \quad \lambda^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_\tau^2} \\
V = \sum_{j=1}^{2} \hat{V}_j \exp(-i\omega t + ikx - \lambda_j z) + \text{c.c.} \\
\psi = \sum_{j=1}^{2} \hat{\psi}_j \exp(-i\omega t + ikx - \lambda_j z) + \text{c.c.} \\
\Theta = \hat{\Theta} \exp(-i\omega t + ikx + \lambda_3 z) + \text{c.c.}, \quad \lambda_3^2 = k^2 + \frac{4\nu_r - i\omega I}{\gamma + \delta + \vartheta}
\end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered}
\lambda_j^4 + \left(-2k^2 + i\omega \frac{I(\nu + \nu_r) + \gamma}{\gamma(\nu + \nu_r)} - \frac{4\nu\nu_r}{\gamma(\nu + \nu_r)}\right)\lambda_j^2 + k^4 + \frac{1}{\gamma(\nu + \nu_r)} \times \\
\times \left\{-I\omega^2 - 4i\nu_r \omega - i\left[I(\nu + \nu_r) + \gamma\right]\omega k^2 + 4\nu\nu_r k^2\right\} = 0, \quad j = 1, 2
\end{gathered} \tag{16}$$

где k – комплексное волновое число, $\mathrm{Re}\lambda > 0$, $\mathrm{Re}\lambda_3 > 0$, $\mathrm{Re}\lambda_j > 0$ $(j = 1, 2)$, $\hat{V}_j, \hat{\psi}_j, \hat{\theta}$ – постоянные. Здесь и ниже символ ω используется только для обозначения циклической частоты.

Подставляя решение в виде гармонической бегущей волны (17) в граничные условия (9), (11), (13), (14) и первое условие (12), получим:

$$
\begin{gathered}
-i\omega\hat{U} = \hat{V}_1 + \hat{V}_2 \\
\rho_s c_\tau^2 \lambda \hat{U} = -\rho_f(\nu - \nu_r + \alpha\nu_r)(\lambda_1\hat{V}_1 + \lambda_2\hat{V}_2) \\
2(ik\hat{\Theta} + \lambda_1\hat{\psi}_1 + \lambda_2\hat{\psi}_2) - \alpha(\lambda_1\hat{V}_1 + \lambda_2\hat{V}_2) = 0 \\
2\left[-\lambda_3\hat{\Theta} + ik(\hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_2)\right] - i\alpha k(\hat{V}_1 + \hat{V}_2) = 0 \\
\delta(\lambda_3^2 - k^2)\hat{\Theta} + (\gamma + \vartheta)\left[\lambda_3^2\hat{\Theta} - ik(\lambda_1\hat{\psi}_1 + \lambda_2\hat{\psi}_2)\right] = 0 \\
ik\lambda_3(\gamma + \vartheta)\hat{\Theta} + \left[k^2(\gamma + \vartheta) + 4\nu_r - i\omega I\right](\hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_2) - 2\nu_r(\hat{V}_1 + \hat{V}_2) = 0
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Заметим, что в литературе получило наибольшее распространение условие равенства нулю вектора микровращения у твердой стенки, которому соответствует нулевое значение α в формулах (11). Однако при $\alpha = 0$, как вытекает из анализа граничных условий (17), не может существовать ПСВ ни при каких значениях параметров контактирующих упругого полупространства и микрополярной жидкости, что противоречит известным в акустике фактам.

Дисперсионное уравнение для поверхностной SH-волны можно получить из условия совместности пяти линейных однородных уравнений (17) после громоздких, но стандартных выкладок. Проще поступить следующим образом. Подставив из четвертого уравнения (17) выражение для $\hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_2$ в последнее уравнение, получим соотношение, связывающее $\hat{V}_1, \hat{V}_2$ и $\hat{\Theta}$. Из этого соотношения и равенства, которое получается из пятого условия (17), преобразованного при помощи третьего условия, исключим $\hat{\Theta}$. В результате получим уравнение, содержащее лишь $\hat{V}_1$ и $\hat{V}_2$

$$
\begin{gathered}
2(\lambda_3^2 - k^2)(\gamma + \vartheta + \delta)\left[k^2(\gamma + \vartheta) + 4\nu_r(1 - \alpha^{-1}) - i\omega I\right](\hat{V}_1 + \hat{V}_2) + \\
+\lambda_3(4\nu_r - i\omega I)(\gamma + \vartheta)(\lambda_1\hat{V}_1 + \lambda_2\hat{V}_2) = 0
\end{gathered}
\tag{18}
$$

Первые два условия (17) позволяют записать еще одно уравнение относительно $\hat{V}_1, \hat{V}_2$

$$
\rho_s c_\tau^2 \lambda(\hat{V}_1 + \hat{V}_2) = i\omega\rho_f(\nu - \nu_r + \alpha\nu_r)(\lambda_1\hat{V}_1 + \lambda_2\hat{V}_2) \tag{19}
$$

Уравнения (18), (19) разрешимы относительно $\hat{V}_1 + \hat{V}_2$, $\lambda_1\hat{V}_1 + \lambda_2\hat{V}_2$ при условии, которое, используя выражение для λ_3 из (15), преобразуем к виду

$$
\rho_s c_\tau^2 \lambda = -i\omega\rho_f(\nu - \nu_r + \alpha\nu_r)\lambda_3^{-1}\left[k^2 + \frac{4\nu_r(1 - \alpha^{-1})}{\gamma + \vartheta} - \frac{i\omega I}{\gamma + \vartheta}\right] \tag{20}
$$

Отметим, что в случае ньютоновской вязкой жидкости дисперсионное уравнение для поверхностной сдвиговой волны существенно проще:

$$
\rho_s c_\tau^2 \lambda - i\omega\rho_f \nu\left(k^2 - \frac{i\omega}{\nu}\right) = 0
$$

Первое ($k^2 = O(\omega^2 / c_\tau^2)$) и третье слагаемые в квадратных скобках правой части уравнения (20) много меньше второго слагаемого для волн мегагерцевого диапазона, так что ими можно пренебречь. Сказанное справедливо и для слагаемых в выражении для λ_3^2. Пренебрегая малыми членами, после возведения обеих частей уравнения (20) в квадрат, его можно разрешить относительно k^2. После простых преобразований можно записать выражения для фазовой скорости и коэффициента затухания ПСВ.

Введем безразмерные комплексы

$$r = \frac{\rho_f}{\rho_s}, \quad g = \frac{\nu_r(\nu - \nu_r + \alpha\nu_r)^2}{c_\tau^2(\gamma + \vartheta)}, \quad h = 1 + \frac{\delta}{\gamma + \vartheta}$$

$$\Omega = \frac{\nu\omega}{c_\tau^2}, \quad f = \frac{c_\tau^2 I}{\nu^2}, \quad e = \frac{\nu_r}{\nu}$$

Тогда выражения для фазовой скорости c и коэффициента затухания ПСВ примут вид

$$c \approx c_\tau\left(1 + 2r^2 g(\alpha) h (1 - \alpha^{-1})^2\right)$$

$$\beta \approx \tfrac{1}{2}\nu^{-1} c_\tau \Omega^2 r^2 h(\alpha^{-2} - 1) e^{-1} g f \tag{21}$$

Из первой формулы (21) следует, что в мегагерцевом диапазоне частот ПСВ на границе микрополярной жидкости и твердого тела распространяется практически без дисперсии в отличие от случая распространения волны на границе ньютоновской вязкой жидкости, где на тех же частотах дисперсия более заметна:

$$c_n \approx c_\tau\left(1 + \tfrac{1}{8}\Omega^2(4 - r^2) r^2\right)$$

где c_n – фазовая скорость ПСВ на границе упругого полупространства и ньютоновской вязкой жидкости. Поскольку по имеющимся в литературе данным безразмерный комплекс g можно примерно оценить как имеющий порядок $\approx 10^{-11}(1 + \alpha)^2$, отличие по величине фазовой скорости ПСВ от скорости сдвиговой волны c_τ исключительно мало. В случае ньютоновской вязкой жидкости различие между скоростями поверхностной и объемной сдвиговой волн значительно больше. Микрополярные свойства жидкости уменьшают глубину проникания экспоненциально убывающего волнового поля ПСВ в жидкость и в то же время делают менее заметной разницу между неоднородным волновым полем ПСВ в упругом теле и плоской сдвиговой волной. Сравнение выражения для коэффициента затухания β в (21) с выражением для коэффициента затухания β_n ПСВ вдоль границы обычной вязкой жидкости с упругим телом

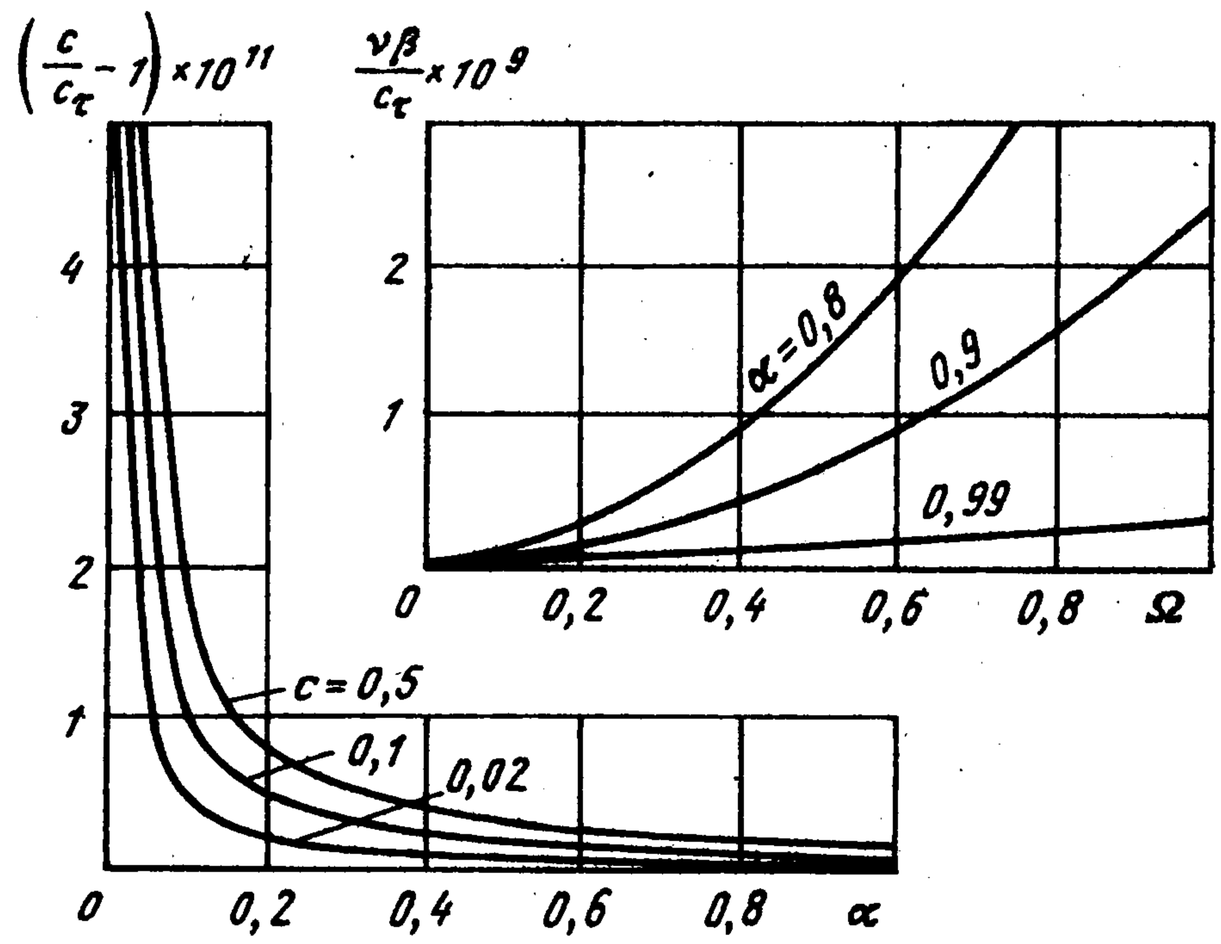
$$\beta_n \approx \tfrac{1}{2}\nu^{-1} c_\tau r^2 \Omega^2$$

показывает, что ПСВ в случае моментной жидкости затухает значительно слабее.

Коэффициент α, связанный с граничной вязкостью микрополярной жидкости[1], существенно влияет на скорость ПСВ (хотя эти изменения малы по сравнению с c_τ), особенно в случаях, когда вращательная вязкость ν_r сравнима по величине с обычным коэффициентом кинематической вязкости ν. На фигуре даны кривые, демонстрирующие зависимость $c/c_\tau - 1$ от параметра α, когда g принимает значения $g_1 = 0{,}5 \cdot 10^{-11}(1 + \alpha)^2$, $g_2 = 0{,}4 \cdot 10^{-10}(0{,}9 + 0{,}1\alpha)^2$, $g_3 = 0{,}8 \cdot 10^{-11}(1 + 0{,}2\alpha)^2$, что соответствует значениям e, равным 0,5; 0,1; 0,02, а остальные параметры неизменны:

---

[1] *Бессонов Н.М.* О корректной постановке граничных условий в гидродинамике моментной жидкости.: Препринт № 89. СПб. ИПМаш РАН, 1993. 26 с.



$r = 0{,}13$, $f = 2{,}3 \cdot 10^3$, $h = 1$, а также показана частотная зависимость коэффициента затухания $\nu\beta/c_\tau$ при тех же значениях параметров и $g = g_1$. Интересно отметить уменьшение коэффициента затухания с увеличением граничной вязкости, т.е. с увеличением α.

Для волн гигагерцевого диапазона первое слагаемое в квадратных скобках правой части уравнения (20) уже не меньше, а существенно больше второго слагаемого. В этом случае выражения для фазовой скорости и коэффициента затухания принимают вид

$$c \approx c_\tau\left[1 + \tfrac{1}{2}\Omega^2 r^2 (1-(1-\alpha)e)^2\right]$$

$$\beta \approx \tfrac{1}{2}\nu^{-1} c_\tau \Omega^2 r^2 g(\alpha) f e^{-1}(2 - h^{-1}) \qquad (22)$$

Таким образом, лишь в области гигагерцевых частот зависимости фазовой скорости и коэффициента затухания от частоты для ПСВ на границе упругого тела и микрополярной жидкости приобретают квадратичный характер, подобно случаю ньютоновской жидкости. Следует оговориться, что формулы (22) могут оказаться справедливыми и для более низких частот, если величина α очень близка к единице. Может ли реализоваться в действительности такой случай, остается неясным.

По существующим косвенным экспериментальным данным можно предполагать, что микровращательный момент инерции I имеет величину, не превышающую 10^{-16} м^2. К этим предположениям нельзя относиться с полным доверием. Возможно, существуют микрополярные жидкости с большой постоянной I порядка 10^{-12} м^2. Для таких "сильномикроинерционных" жидкостей выражения для фазовой скорости и коэффициента затухания ПСВ имели бы вид

$$c \approx c_\tau\left[1 - \tfrac{1}{8}\Omega^2 f^2 e^{-2} r^2 g^2(\alpha) h^2\right]$$

$$\beta \approx \tfrac{1}{2}\nu^{-1} c_\tau \Omega^2 r^2 g(\alpha) f e^{-1} h$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-02-19792), Гранта Президента РФ (98-15-96127) и Федеральной целевой программы "Интеграция" 542.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Плесский В.П., Тен Ю.А.* Сдвиговые поверхностные акустические волны на границе упругого тела с вязкой жидкостью (газом) // Письма в ЖТФ. 1984. Т. 10. № 5. С. 296–300.
2. *Плесский В.П., Тен Ю.А.* Влияние вязкой нагрузки поверхности звукопровода на распространение сдвиговых поверхностных волн // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 2. С. 206–211.
3. *Бирюков С.В., Гуляев Ю.В., Крылов В.В., Плесский В.П.* Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, 1991. 415 с.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.
5. *Петросян Л.Г.* Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984. 307 с.
6. *Нгуен Ван Дьеп, Листов А.Т.* О неизотермической модели несимметричных жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 5. С. 132–136.
7. *Eringen A.C.* Theory of micropolar fluids // J. Math. Mech. 1966. V. 16. № 1. P. 1–16; *Эринген А.К.* Теория микрополярных жидкостей // Период. сб. перев. иностр. статей. 1969. № 4. С. 79–93.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
28.04.1998