

УДК 532.546

© 1999 г. В.М. Ентов

О ДИНАМИКЕ УЗКОЙ ОТОРОЧКИ РЕАГИРУЮЩЕЙ ПРИМЕСИ ПРИ ТЕЧЕНИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Делается попытка установить связь между начальным распределением концентрации примеси в оторочке и асимптотическим поведением этого распределения в предположении, что примесь переносится одномерным фильтрационным потоком (прямолинейно-параллельным или плоско-радиальным) в однородной пористой среде при наличии сорбции и химической реакции. Несущая жидкость предполагается однородной и несжимаемой, влияние примеси на течение не учитывается (пассивная примесь). Исследуются задачи с локализованными начальными данными, их качественные свойства и автомодельные асимптотики. Основная стадия эволюции тонкой оторочки реагирующей примеси в фильтрационном потоке оказывается достаточно простой: распределение концентрации по форме близко к соответствующему распределению в задаче без реакции, но с переменной амплитудой; динамика изменения амплитуды и ширины импульса достаточно хорошо предсказываются простым методом интегральных соотношений. Обсуждается возможность приложения найденных решений и развитых подходов к анализу влияния поглощения активной примеси в ходе реакции на эффективность повышения нефтеотдачи закачкой тонких оторочек активной примеси.

Задача об узкой оторочке, т.е. о распространении и эволюции первоначально локализованной в узкой области порции примеси, имеет по крайней мере два важных приложения: экологическое (распространение местного загрязнения грунтовых вод) и нефтепромысловое (использование узких оторочек реагентов для повышения нефтеотдачи) [1–4]. Имеющиеся теоретические результаты относятся к чисто диффузионной эволюции оторочки [3, 5] и к влиянию необратимости сорбции [6–9].

В данной работе, являющейся непосредственным развитием этих исследований, основное внимание уделяется влиянию на эволюцию оторочки реакции, ведущей к поглощению примеси.

1. Постановка задачи. Рассматривается перенос нейтральной примеси потоком несжимаемой жидкости в пористой среде при наличии адсорбции, предполагаемой далее линейной и равновесной, и химической реакции n -го порядка. Исследуются прямолинейно-параллельное и плоско-радиальное течения (соответственно, случаи 1 и 2). При этом распределение концентрации примеси удовлетворяет уравнению диффузии с конвекцией и реакцией, имеющему для двух указанных случаев форму

$$\frac{\partial(m+\Gamma)c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \alpha c^n \quad (\text{случай 1}) \quad (1.1)$$

$$m \frac{\partial(m+\Gamma)c}{\partial t} + \frac{Q}{2\pi r} \frac{\partial c}{\partial r} = D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial c}{\partial r} - \alpha c^n \quad (\text{случай 2}) \quad (1.2)$$

Здесь m – пористость среды, D – коэффициент диффузии примеси, U – скорость фильтрации, Q – расход фильтрационного потока на единицу толщины пласта, α – константа скорости реакции, n – порядок реакции, Γ – константа Генри для адсорбции. Все эти величины предполагаются положительными постоянными.

При этом сорбированное пористой средой количество примеси в расчете на единицу объема

$$a = \Gamma c \quad (1.3)$$

Рассматривается задача с начальными данными вида

$$c(x, 0) = C_0(x) \geq 0, \quad |x| \leq \varepsilon, \quad c(x, 0) = 0, \quad |x| > \varepsilon \quad (\text{случай 1}) \quad (1.4)$$

$$c(r, 0) = C_0(r) > 0, \quad 0 \leq r \leq \varepsilon, \quad c(r, 0) = 0, \quad r > \varepsilon \quad (\text{случай 2}) \quad (1.5)$$

где ε – начальный размер оторочки, предполагаемый в некотором смысле (см. ниже) малым.

Граничные условия состоят в том, что ищется убывающее на бесконечности решение и (в радиальном случае) нет притока примеси из источника в начале координат

$$r = 0: \quad -2\pi D r \frac{\partial c}{\partial r} + Qc = 0 \quad (1.6)$$

Известно, что для прямолинейно-параллельного потока при линейной изотерме сорбции переходом к движущейся системе координат можно свести задачу к уравнению диффузии с реакцией, но без конвекции, что формально соответствует $m = 1$, $U = 0$, $\Gamma = 0$.

Простейший прототип рассматриваемой постановки задачи получается, если рассмотреть обычное уравнение диффузии с начальными данными вида (1.4). Тогда имеем выражение

$$c(x, t) \approx \frac{M_0}{\sqrt{\pi D t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4 D t}\right), \quad t \gg \frac{\varepsilon^2}{4 D}; \quad M_0 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} C_0(x) dx \quad (1.7)$$

для асимптотики распределения концентрации в импульсе в терминах единственной интегральной характеристики начального распределения – полного начального запаса примеси M_0 .

Цель данной работы – поиск аналога соотношения (1.7) для нелинейной задачи. Результат заведомо не может быть столь простым и общим, и не может быть выражен через один лишь начальный запас, потому что при наличии реакции полное содержание примеси не сохраняется, а скорость его убывания зависит от формы начального распределения.

2. Автомодельное решение. Линейный поток. Рассмотрим уравнение диффузии с реакцией

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \alpha c^n \quad \alpha > 0 \quad (2.1)$$

и будем анализировать эволюцию локализованного в малой области $|x| \leq \varepsilon$ начального возмущения

$$c(x, 0) = F(x) > 0, \quad |x| \leq \varepsilon; \quad c(x, 0) = 0, \quad |x| > \varepsilon \quad (2.2)$$

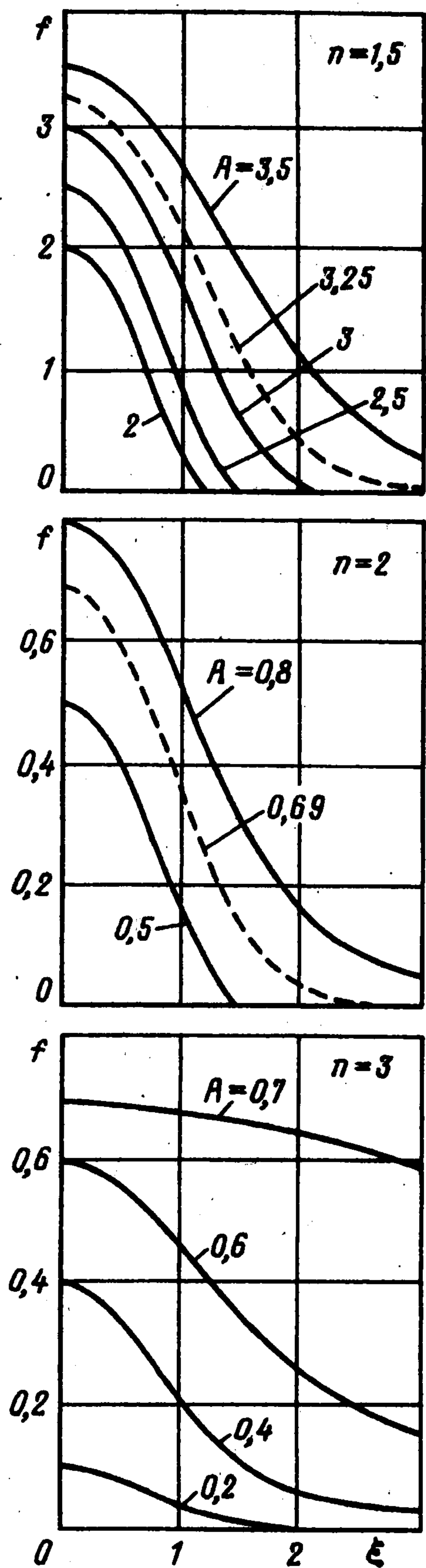
Естественно ожидать, что асимптотически оно будет порождать автомодельную асимптотику при больших временах.

В неограниченной области, $-\infty < x < \infty$, уравнение (2.1) допускает автомодельные решения вида

$$c = B t^{-\gamma} f(\xi), \quad \xi = \frac{x}{2\sqrt{D t}}, \quad \gamma = \frac{1}{n-1} \quad (2.3)$$

Выберем также $B^{n-1} \alpha = 1$. Тогда искомое решение должно удовлетворять краевой задаче

$$f'' + 2\xi f' - 4f'' + 4\gamma f = 0, \quad 0 \leq \xi < \infty; \quad f'(0) = 0, \quad f(\infty) = 0 \quad (2.4)$$



Фиг. 1

Очевидно, при выбранных (положительных) начальных данных решение должно быть неотрицательным и заведомо не может иметь максимум, превосходящий критическое значение $f^*(n) = (n-1)^\gamma$. Действительно, в точке максимума $f' = 0$, $f'' < 0$ и согласно (2.4) $f < f^*$. Поэтому искомые решения могут начинаться в точках отрезка $x = 0$, $0 \leq f(0) \leq f^*(n)$ с $f'(0) = 0$ и легко рассчитываются численно как решения соответствующей задачи Коши. Характерные результаты для $n = 1,5; 2; 3$ показаны на фиг. 1 при разных значениях параметра амплитуды $A = f(0)$.

Уже эти результаты заслуживают определенного комментария. Прежде всего, решения требуемого вида, т.е. положительные, имеющие максимум при $x = 0$ и стремящиеся к нулю на бесконечности, существуют в определенном диапазоне значений параметра амплитуды A .

Кроме того, существование автомодельного решения, вообще говоря, не означает, что оно будет выражать требуемую асимптотику. Напротив, при $n \geq 3$ непосредственно доказывается противное: при $n \geq 3$ искомая асимптотика заведомо не выражается автомодельным решением задачи (2.3), (2.4).

Особенно выпукло это проявляется при $n = 3$. Действительно, полный запас вещества выражается интегралом

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(x, t) dx$$

и по физическому смыслу задачи должен убывать (в чем легко убедиться, интегрируя уравнение (2.1) вдоль всей оси x).

Для автомодельного решения вида (2.3) имеем

$$M(t) = Bt^{-\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) dx = 2B\sqrt{Dt}^{-\gamma+1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi$$

и это выражение не убывает, если $-\gamma + 1/2 \geq 0$, или $n \geq 3$. В частности, при $n = 3$ "запас", отвечающий автомодельному решению, должен оставаться постоянным. (Рассуждение, связанное с анализом полного запаса, принадлежит Г.И. Баренблатту.)

Парадоксальная, на первый взгляд, ситуация разрешается более глубоким анализом автомодельных решений, удовлетворяющих задаче (2.4). Будем, по-прежнему, считать, что $n > 1$. Тогда асимптотика убывающих на бесконечности решений близка к решениям линейного уравнения

$$\varphi'' + 2\xi\varphi' + 4\gamma\varphi = 0 \quad (2.5)$$

Два линейно-независимых решения уравнения (2.5) ведут себя как

$$\varphi_1 = \exp(-\xi^2), \quad \varphi_2 = \xi^{-2\gamma} \quad (2.6)$$

При $n > 3$ всем решениям задачи (2.4), содержащим в асимптотике медленно затухающий вклад φ_2 , отвечает бесконечный запас вещества.

Эти решения могут служить асимптотиками лишь решений задач с начальным бес-

конечным запасом примеси и нелокализованными начальными данными. Решения задачи (2.4), экспоненциально убывающие на бесконечности, меняют знак и не могут служить асимптотикой решений задач с положительными начальными данными.

При $1 < n < 3$ оба решения (2.6) линеаризованного уравнения (2.5) интегрируемы на бесконечности, и парадокса, связанного с бесконечным запасом, нет. Тем не менее, решения со степенной асимптотикой на бесконечности не могут служить автономной асимптотикой задач с локализованными (финитными) начальными данными и в этом случае. Это интуитивное рассуждение подтверждается строгими априорными оценками (см. разд. 3).

Таким образом, в качестве возможной автономной асимптотики может служить не любое положительное решение задачи (2.4), а лишь такое, которое убывает при $\xi \rightarrow \infty$ быстрее любой степени ξ .

Это условие позволяет выделить из однопараметрического семейства решений краевой задачи (2.4) то единственное решение, которое может служить "кандидатом" на роль автономной асимптотики, а именно, то положительное решение, которое убывает при $\xi \rightarrow \infty$ быстрее, чем $\xi^{-2/(n-1)}$.

Фактически, речь идет об определении того минимального значения параметра амплитуды $A = f(0)$, при котором решение еще остается положительным при $0 \leq \xi < \infty$. Это значение легко находится численно. Оно зависит от n и представляет собой своеобразное собственное значение задачи. На фиг. 1 соответствующие решения показаны штриховой линией. Приведенные выше соображения позволяют надеяться, что выделенное таким образом автономное решение представляет собой асимптотику решения при локализованном начальном распределении. Это предположение хорошо подтверждается результатами численного эксперимента.

Сопоставление нормированных результатов расчета концентраций $c(x, t)/c(0, t)$ в функции автономной координаты $\xi = x/(2\sqrt{Dt})$ и нормированного автономного решения $f_n(\xi)/A(n)$ показывает, что эти решения совпадают с точностью до нескольких процентов во всем диапазоне значений ξ . (Численное решение получено при начальном профиле концентрации в виде узкого прямоугольника единичной высоты.) Таким образом, при $n < 3$ асимптотическое поведение распределения концентрации характеризуется соотношением

$$c(x, t) \sim Bt^{-\gamma} f_n\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right), \quad t \gg \frac{l^2}{4D}$$

где B – функционал начального распределения $C_0(x)$.

Для стандартных начальных распределений вид этого функционала можно установить из соображений размерности. Действительно, скажем, для прямоугольного начального распределения: $C_0(x) = C_0, |x| < l, C_0(x) = 0, |x| > l$ коэффициент B может быть функцией C_0, l, D и α .

Поэтому

$$B = \alpha^{-\gamma} \Phi(Z), \quad Z = C_0(l^2 \alpha / D)^\gamma$$

Отсюда следует, что начальные распределения, имеющие одинаковое начальное значение момента $M^* = C_0 l^2 \alpha$, приводят к одинаковым асимптотическим профилям. Этот вывод хорошо подтверждается данными численного эксперимента при нескольких значениях скорости реакции α , начальной концентрации C_0 и начальной ширины импульса l , но одинаковом значении безразмерного параметра $Z = C_0 l^2 \alpha / D$. Результаты практически совпадают и хорошо согласуются с автономным распределением.

Подчеркнем, что, как и следовало ожидать, чем уже начальный импульс, тем больший начальный запас примеси необходим для получения одного и того же асимптотического поведения, и при $l \rightarrow 0$ этот запас стремится к бесконечности.

Фактически, это означает, что для узких импульсов основная доля запаса потребляется в реакции на начальной стадии эволюции.

Таким образом, ввиду отсутствия у задачи инварианта движения, автомодельная асимптотика сохраняет некоторую нетривиальную "память" о форме, амплитуде и ширине начального импульса – ситуация, характерная для автомодельности второго рода [10].

3. Априорные оценки. Рассмотрим ограниченное решение $c(x, t)$ задачи (2.1), (2.2). Путь $x^*(t)$ – положение глобального максимума решения в момент t

$$c(x, t) \leq c(x^*(t), t) \equiv c_*(t) \quad (3.1)$$

Очевидно,

$$0 \leq c_*; \quad \left. \frac{dc}{dx} \right|_{x=x^*} = 0, \quad \left. \frac{d^2c}{dx^2} \right|_{x=x^*} \leq 0 \quad (3.2)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{dc_*(t)}{dt} &= D \left. \frac{d^2c}{dx^2} \right|_{x=x^*} - \alpha c_*^n \leq -\alpha c_*^n \\ c_*(t) &\leq [c_*^{1-n}(0) + (n-1)\alpha t]^{-1/n} = \hat{c}_*(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Первое неравенство (3.3) выражает тот очевидный факт, что убывание максимального значения концентрации происходит не только благодаря реакции в данной точке, но и из-за оттока вещества из окрестности максимума в области с меньшей концентрацией. Примечательно, что при $n > 1$ асимптотическое поведение $\hat{c}_*(t)$ не зависит от $c_*(0)$ и дается предельной зависимостью

$$c^0(t) = [(n-1)\alpha t]^{-1/n} \quad (3.4)$$

Верхняя оценка $\hat{c}_*(t)$ оказывается ниже предельной.

Легко доказывается [11, 12], что решение монотонно зависит от скорости реакции и начальных данных и мажорируется решением задачи без реакции. Отсюда, в частности, следует, что решение задачи с финитными начальными данными убывает на бесконечности быстрее любой степени координаты, что существенно при выборе автомодельного решения.

Рассмотрим линейное уравнение с переменным коэффициентом реакции

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \tilde{c}}{\partial x^2} - \alpha c_m^{n-1}(t) \tilde{c}, \quad c_m(t) = \max_x c_0(x, t) \quad (3.5)$$

Здесь $c_0(x, t)$ – решение уравнения диффузии без реакции при тех же начальных данных. Уравнение (3.5) имеет решение

$$\tilde{c}(x, t) = R(t) c_0(x, t), \quad R(t) = \exp\left(-\alpha \int_0^t c_m^{n-1}(t') dt'\right) \quad (3.6)$$

которое дает оценку снизу для искомого решения задачи диффузии с реакцией при тех же начальных данных.

Таким образом, решение нелинейной задачи оказывается ограниченным с двух сторон двумя решениями линейных задач

$$c_0(x, t) \geq c(x, t) \geq R(t) c_0(x, t) \quad (3.7)$$

Существенно, что при финитных начальных данных

$$c_m(t) \sim M_0 (\pi D t)^{-1/2}; \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad (3.8)$$

Поэтому при $n > 3$ множитель $R(t)$ стремится к конечному пределу при $t \rightarrow \infty$. В

частности, при $n > 3$ полный запас примеси в оторочке остается ограниченным при $t \rightarrow \infty$

$$M_0(t) \geq M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(x, t) dx \geq R(\infty) M_0(t) \quad (3.9)$$

Можно предположить, что асимптотически решение нелинейной задачи стремится к решению линейной задачи с меньшим полным запасом. Это предположение подкрепляется результатами численного эксперимента и приближенным решением задачи методом интегральных соотношений (см. ниже).

Все предшествующие рассуждения могут быть повторены с минимальными модификациями применительно к радиально-симметричному течению с конвекцией. Единственное существенное отличие состоит в том, что в асимптотике (3.7) показатель степени заменяется на -1 . Поэтому критическим оказывается значение $n = 2$. При $n > 2$ запас примеси в оторочке, убывая, стремится к конечному пределу, и потому естественно полагать, что асимптотика решения будет совпадать с асимптотикой решения линейной задачи. Вновь оказывается, что этот вывод хорошо согласуется с численным экспериментом.

Замечание. Ряд результатов разд. 2 и 3 содержится среди более общих результатов [11, 12]:

4. Прямолинейно-параллельное течение. Метод интегральных соотношений. Из анализа результатов численного эксперимента и асимптотического исследования видно, что исследуемое решение близко к стандартной гауссовой кривой переменной амплитуды и ширины. Поэтому имеет смысл искать приближенное решение задачи (1.1)–(1.4) в виде

$$c(x, t) = B(t) \exp(-x^2/l^2) \quad (4.1)$$

где $B(t)$ и $l(t)$ – неизвестные функции времени. Используем метод интегральных соотношений (см., например, [1, 2]). Домножая обе части уравнения (2.1) на c^k , интегрируя в пределах от $-\infty$ до ∞ и учитывая условия на бесконечности, имеем интегральные соотношения

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} c^k \frac{dc}{dt} dx &= \frac{1}{k+1} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} c^{k+1} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} c^k \frac{d^2c}{dx^2} dx - \alpha \int_{-\infty}^{\infty} c^{k+n} dx = -k \int_{-\infty}^{\infty} c^{k-1} \left(\frac{dc}{dx} \right)^2 dx - \alpha \int_{-\infty}^{\infty} c^{k+n} dx \end{aligned} \quad (4.2)$$

для отыскания параметров B и l . Существенно, что при выборе аппроксимации в форме (4.1) интегралы (4.2) выражаются в явной форме через B и l . Используя первые два интегральных соотношения ($k = 0, 1$) и положив $Bl = X$, имеем

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{\alpha}{\sqrt{n}} XB^{n-1}, \quad \frac{dB}{dt} = -\frac{2B^3}{X^2} + \alpha B^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}} \right) \quad (4.3)$$

Исключая из системы (4.3) t , получаем уравнение траекторий в фазовой плоскости переменных B и X

$$\frac{dB}{dX} = \frac{2\sqrt{n}B^{4-n}}{X^3} - \frac{B}{X} \left(1 - 2\sqrt{\frac{2n}{n+1}} \right) \quad (4.4)$$

Представляющие интерес решения имеют убывающую с ростом времени амплитуду. При малом B и конечных X поведение решений уравнения (4.4) различно при $n < 3$ и $n > 3$. Если $n < 3$, то главным является второй член правой части, и поэтому при $B \rightarrow 0$ имеем $X \rightarrow 0$.

Итак, для асимптотически затухающих решений оба параметра, B и X , стремятся к нулю, и главным членом в правой части (4.4) оказывается первый. Таким образом,

$$\frac{dB}{dX} \sim 2\sqrt{n} \frac{B^{4-n}}{X^3}, \quad X \sim [\sqrt{n}(n-3)]^{1/2} B^{(3-n)/2} \quad (4.5)$$

Тогда первое уравнение (4.3) дает

$$t \sim B^{1-n}, \quad l = X/B \sim B^{(1-n)/2} \sim t^{1/2} \quad (4.6)$$

что согласуется с ожидаемым из анализа автомодельного решения поведением.

При $n > 3$ траектории при $B \rightarrow 0$ стремятся к конечным точкам оси X . При этом из (4.3) следует, что $B \sim t^{-1/2}$, $l \sim t^{1/2}$. Это соответствует асимптотике решений линейной задачи. В пограничном случае $n = 3$ уравнение (4.5) становится линейным и легко интегрируется

$$\ln B = \text{const} - \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \frac{1}{X^2} + (\sqrt{6} - 1) \ln X \quad (4.7)$$

После этого задача полностью решается в квадратурах. Подставляя выражение (4.7) в первое уравнение (4.3) и интегрируя, имеем

$$B = \text{const} X^{(\sqrt{6}-1)} \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{\alpha X^2}\right) \quad (4.8)$$

$$t = \frac{\sqrt{3}}{\alpha(\text{const})^2} \int_X^{X_0} X^{1-2\sqrt{6}} \exp\left(\frac{2\sqrt{3}}{\alpha X^2}\right) dX$$

Последнее выражение весьма быстро стремится к бесконечности при $X \rightarrow 0$, что означает очень медленное убывание со временем параметра X , пропорционального полному запасу вещества в оторочке, при этом

$$X \sim [2\sqrt{3}/(\alpha \ln t)]^{1/2}$$

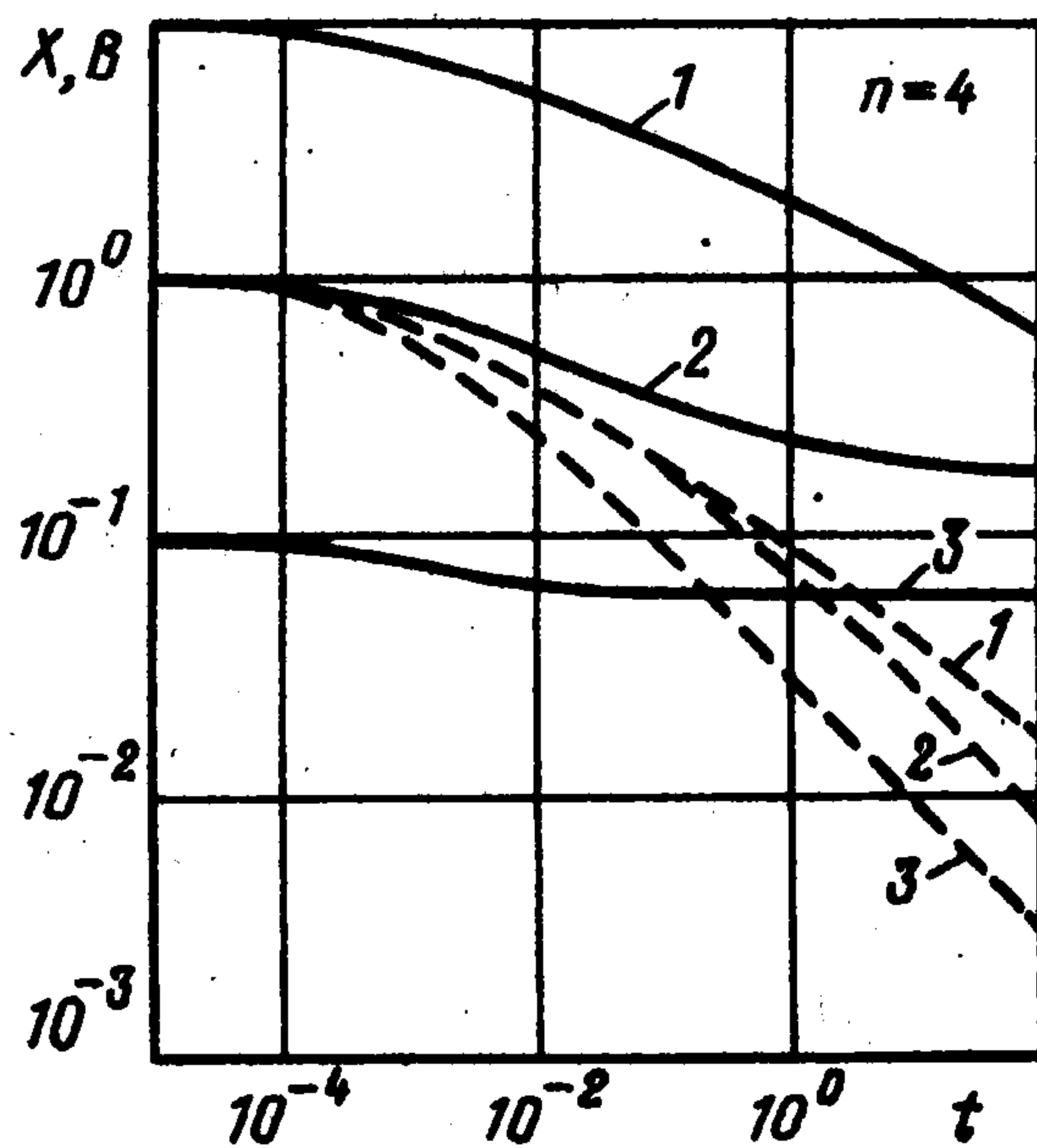
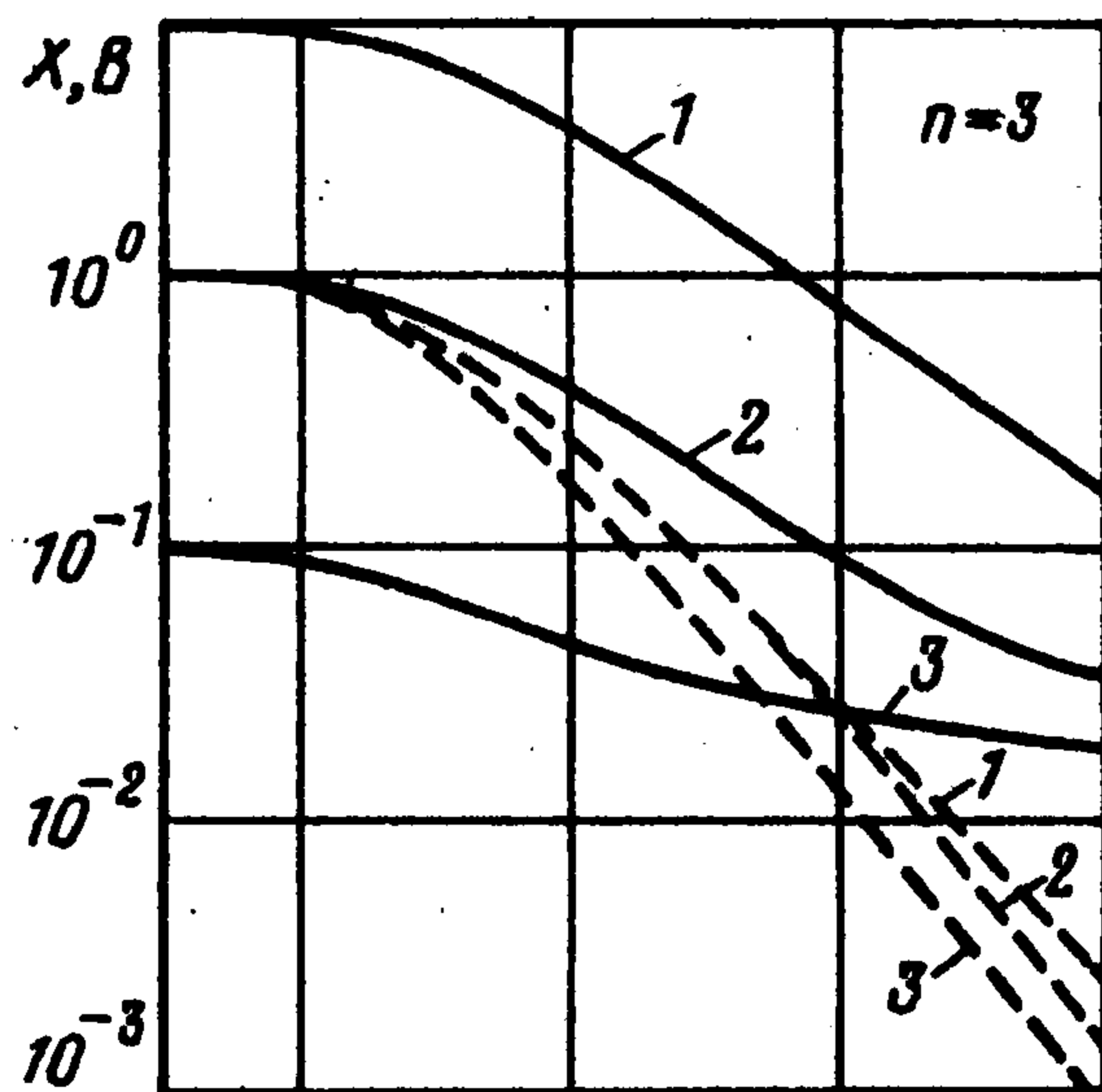
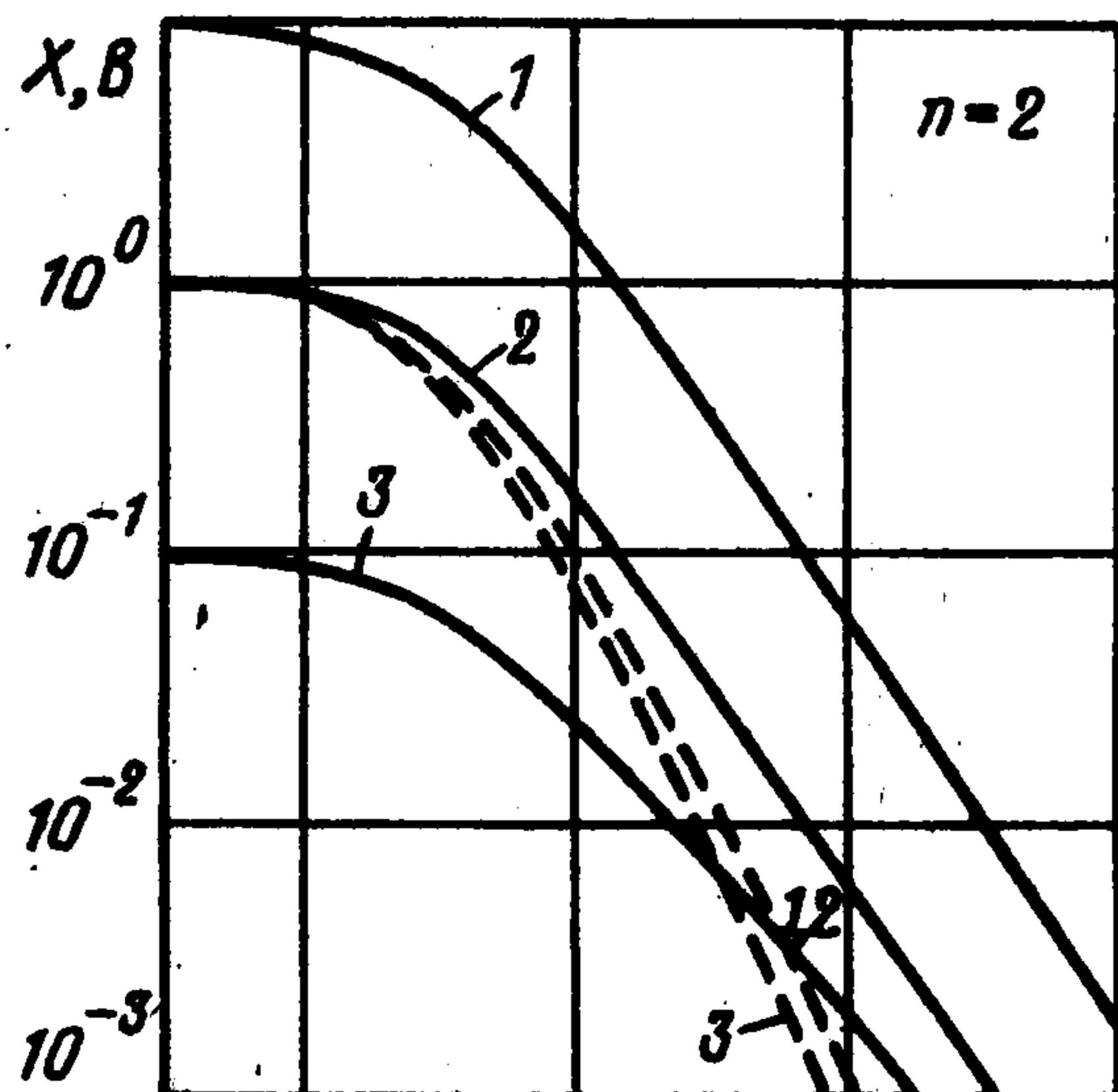
С другой стороны, сопоставляя выражения (4.8), находим $B\sqrt{t} \sim X$. Отсюда следует, что характерная ширина оторочки $l = X/B$ асимптотически ведет себя по обычному корневому закону ($l \sim \sqrt{t}$), а амплитуда затухает несколько быстрее, нежели по корневому закону

$$B \sim X/\sqrt{t} \approx [2\sqrt{3}/(\alpha t \ln t)]^{1/2}$$

Фиг. 2 иллюстрирует поведение основных параметров оторочки: полного запаса $X = Bl$ (штриховые кривые) и амплитуды B (сплошные кривые) в докритическом ($n = 2$), сверхкритическом ($n = 4$) и пограничном ($n = 3$) случаях при $\alpha = 10^3$, $X(0) = 1$ и разных начальных значениях амплитуды B_0 равных 10 (кривые 1), 1 (кривые 2) и 10^{-1} (кривые 3). На фиг. 3 приближенное решение $X(t)$ методом интегральных соотношений (МИС) при $n = 3$ (сплошная линия) сопоставлено с решением, найденным из численного эксперимента (штриховая линия). Поскольку начальное распределение (прямоугольник) в численном счете весьма далеко от постулированного в МИС, при сопоставлении начальные значения B и l брались такими, чтобы получить те же значения первого и второго моментов, что и в начальном распределении. МИС дает разумное приближение к решению во всем интервале наблюдений. Он воспроизводит даже достаточно необычную динамику полного запаса в пограничном случае $n = 3$.

Сопоставлялись также сами распределения, полученные численно, предсказанные МИС и отвечающие автомодельному решению. Они оказываются весьма близкими между собой, что оправдывает выбор формы решения в МИС.

Все это говорит в пользу использования МИС для практических оценок.



Фиг. 2

5. Радиальное течение. Линейный случай. В линейном случае ($n = 1$) уравнение переноса подстановкой $c = \hat{c}(r, t)e^{-\alpha t}$ приводится к уравнению диффузии без поглощения. Решение этого уравнения, отвечающее локализованным вблизи $r = 0$ начальным данным и нулевым краевым условиям при $r = 0$ и $r = \infty$, имеет вид

$$\hat{c} = \frac{M}{t} f(\eta), \quad \eta = \frac{r}{2\sqrt{Dt}}$$

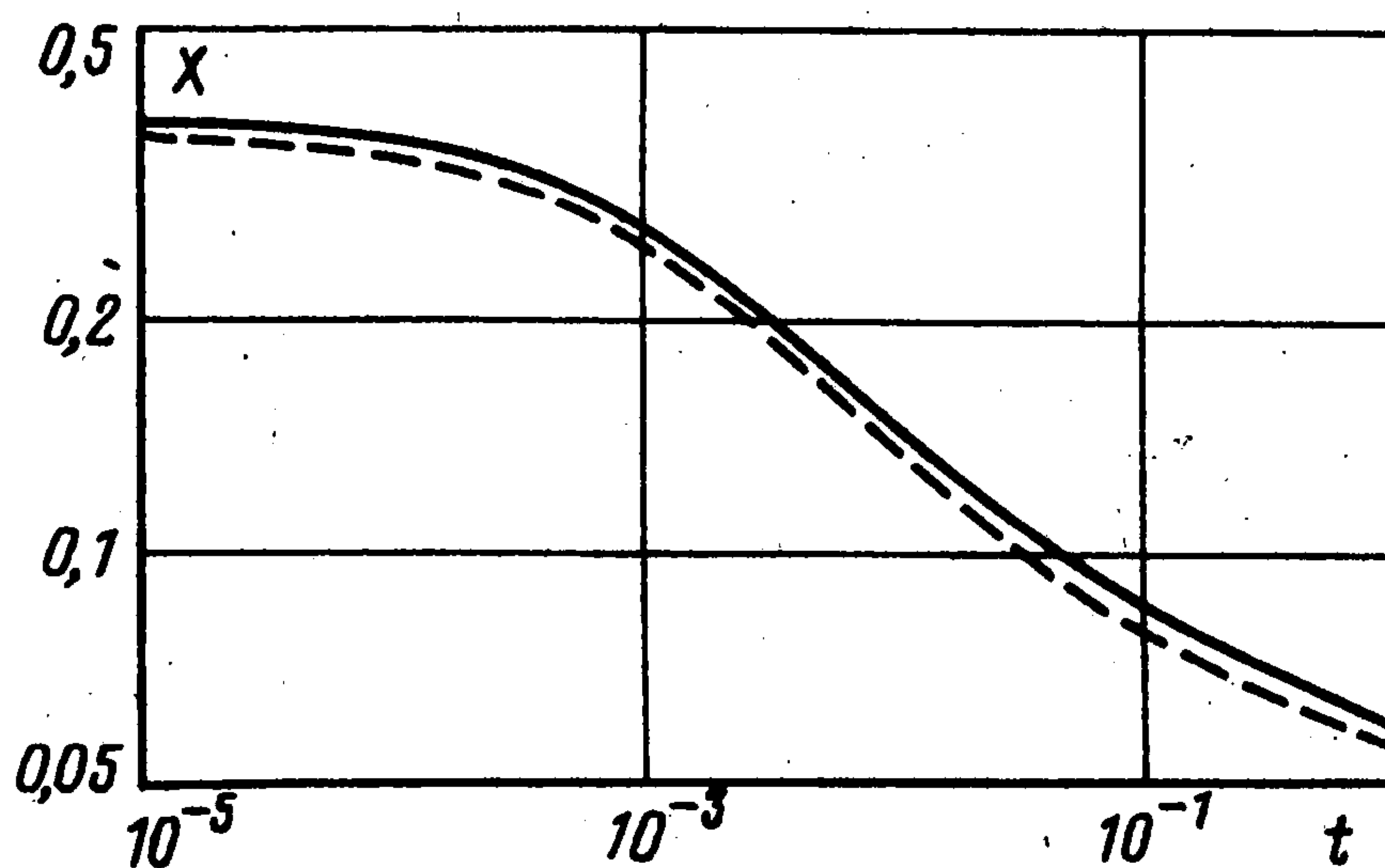
$$f'' + \left(2\eta + (1-q)\frac{1}{\eta}\right) f' + 4f = 0; \quad q = \frac{Q}{2\pi D}$$

Решение уравнения для функции $f(\eta)$, убывающее при $\eta \rightarrow \infty$ быстрее, чем η^{-2} (что необходимо для сходимости интеграла от $\eta f(\eta)$, пропорционального полному запасу примеси в оторочке), имеет вид [13]

$$f = C_1 \eta^q \exp(-\eta^2) d\eta, \quad C_1 = \frac{1}{\pi} \left[\Gamma\left(\frac{1+q}{2}\right) \right]^{-1}$$

Постоянная C_1 найдена из условия нормировки

$$2\pi \int_0^{\infty} \eta f(\eta) d\eta = 1$$



Фиг. 3

Приведенное решение иллюстрирует важные свойства эволюции оторочки вблизи источника ("скважины") при наличии конвекции. Вблизи источника ($r = 0$) концентрация изменяется по степенному закону с показателем, зависящим от числа Пекле задачи (безразмерного параметра q), характеризующего отношение конвективных и диффузионных потоков.

Концентрация обращается в нуль на самом источнике, а оторочка представляет

собой кольцевую область, тем более узкую, чем больше число Пекле q . Все эти свойства сохраняются и в нелинейном случае, рассматриваемом ниже.

Нелинейный случай – автомодельное решение. В нелинейном случае сформулированная в разд. 1 задача имеет для радиального течения автомодельное решение вида

$$C = Bt^{-\gamma} f(\eta), \quad \gamma = \frac{1}{n-1}, \quad \eta = \frac{r}{2\sqrt{Dt}} \quad (5.1)$$

где f – решение краевой задачи

$$f'' + \left[2\eta + (4-q)\frac{1}{\eta} \right] f' + 4\eta f - 4f^n = 0, \quad f(0) = f(\infty) = 0 \quad (5.2)$$

По физическому смыслу искомое решение должно быть положительным, и потому имеет положительный максимум. Такого решения заведомо нет при $n < 1$. При $n > 1$, как показывает прямое численное решение задачи (5.2), автомодельное решение имеет требуемый вид в некотором диапазоне значений параметра задачи

$$A = \lim_{\eta \rightarrow 0} (\eta^q f(\eta))$$

Отвечающий ему "полный запас" примеси

$$M = \int_0^{\infty} 2\pi r c(r, t) dr = \frac{8\pi DA}{t^{\gamma-1}} \int_0^{\infty} \eta f(\eta) d\eta \quad (5.3)$$

не убывает при $n \geq 2$. Поэтому автомодельное решение не может быть асимптотикой решения с локализованными начальными данными при $n \geq 2$.

В целом, ситуация полностью эквивалентна случаю прямолинейно-параллельного течения с тем лишь отличием, что диапазон значений показателя степени n , в котором асимптотика может быть автомодельной, сужается до интервала $1 < n < 2$. В этом диапазоне единственное решение выделяется тем обстоятельством, что оно убывает как $\exp(-\eta^2)$ при $\eta \rightarrow \infty$, поскольку только для такого решения "полный запас" ограничен. Сопоставление автомодельных решений с асимптотикой численного решения подтверждает, что автомодельное решение действительно описывает асимптотику эволюции концентрации в оторочке в этом диапазоне значений параметра n .

Вновь легко доказывается двусторонняя оценка

$$\tilde{c}(r, t) \leq c(r, t) \leq c_0(r, t)$$

где $c_0(r, t)$ – решение соответствующей линейной задачи без поглощения ($\alpha \equiv 0$), а \tilde{c} – решение линеаризованной задачи

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} + \frac{Q}{2\pi r} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial r} = D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{c}}{\partial r} \right) - \alpha c_m^{n-1}(t) \tilde{c}, \quad c_m(t) = \max_r c_0(r, t)$$

$$\tilde{c}(0, t) = \tilde{c}(\infty, t) = 0; \quad \tilde{c}(r, 0) = \varphi_0(r), \quad r \leq \varepsilon; \quad \tilde{c}(r, 0) = 0, \quad r > \varepsilon$$

$$\tilde{c}(r, t) = c_0(r, t) R(t)$$

При $n > 2$ множитель $R(t)$, определяемый соотношением (3.6), стремится к конечному пределу при $t \rightarrow \infty$, так что полный запас примеси стремится к конечному пределу при $t \rightarrow \infty$.

Приближенное решение методом интегральных соотношений. Домножая уравнение (1.2) на $2\pi r c^k(r, t)$ и интегрируя в пределах от 0 до ∞ , получим

$$\frac{1}{k+1} \frac{d}{dt} M_{k+1} + Q \int_0^{\infty} c^k \frac{\partial c}{\partial r} dr = \int_0^{\infty} 2\pi D c^k \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c}{\partial r} \right) dr - \alpha M_{k+n}$$

$$M_k = 2\pi \int_0^{\infty} r C^k(r, t) dr$$

Таким образом, имеем систему интегральных соотношений

$$\frac{dM_1}{dt} = -\alpha M_n$$

$$\frac{1}{k+1} \frac{dM_{k+1}}{dt} = -2\pi D k \int_0^{\infty} c^{k-1} r \left(\frac{\partial c}{\partial r} \right)^2 dr - \alpha M_{k+n}, \quad k > 0$$

Воспользуемся простейшей аппроксимацией искомого решения, согласующейся как с линейным решением, так и с данными численного эксперимента

$$c(r, t) = A(t) \left(\frac{r}{l} \right)^q \exp\left(-\frac{r^2}{l^2(t)} \right), \quad q = \frac{Q}{2\pi D}$$

При такой аппроксимации моменты M_k вычисляются явно и выражаются через Γ -функцию [14]. В результате система уравнений для отыскания $A(t)$ и $l(t)$, использующая первые два интегральных соотношения, в переменных $A(t)$, $X(t) = Al^2$ приводится к виду

$$dX/dt = -\alpha \mu_1 X A^{n-1}, \quad X = Al^2 \tag{5.4}$$

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{4DA^2}{X} + \alpha(\mu_1 - \mu_2)A^n$$

$$\mu_1 = \frac{\Gamma(nq/2)}{n^{nq/2}} \frac{1}{\Gamma(q/2)}, \quad \mu_2 = \frac{2^{q+1} \Gamma((n+1)q/2)}{(n+1)^{(n+1)q/2} \Gamma(q)}$$

Здесь опять величина X пропорциональна полному запасу вещества в оторочке, а величина A пропорциональна "амплитуде" импульса концентрации.

На плоскости (X, A) имеем уравнение

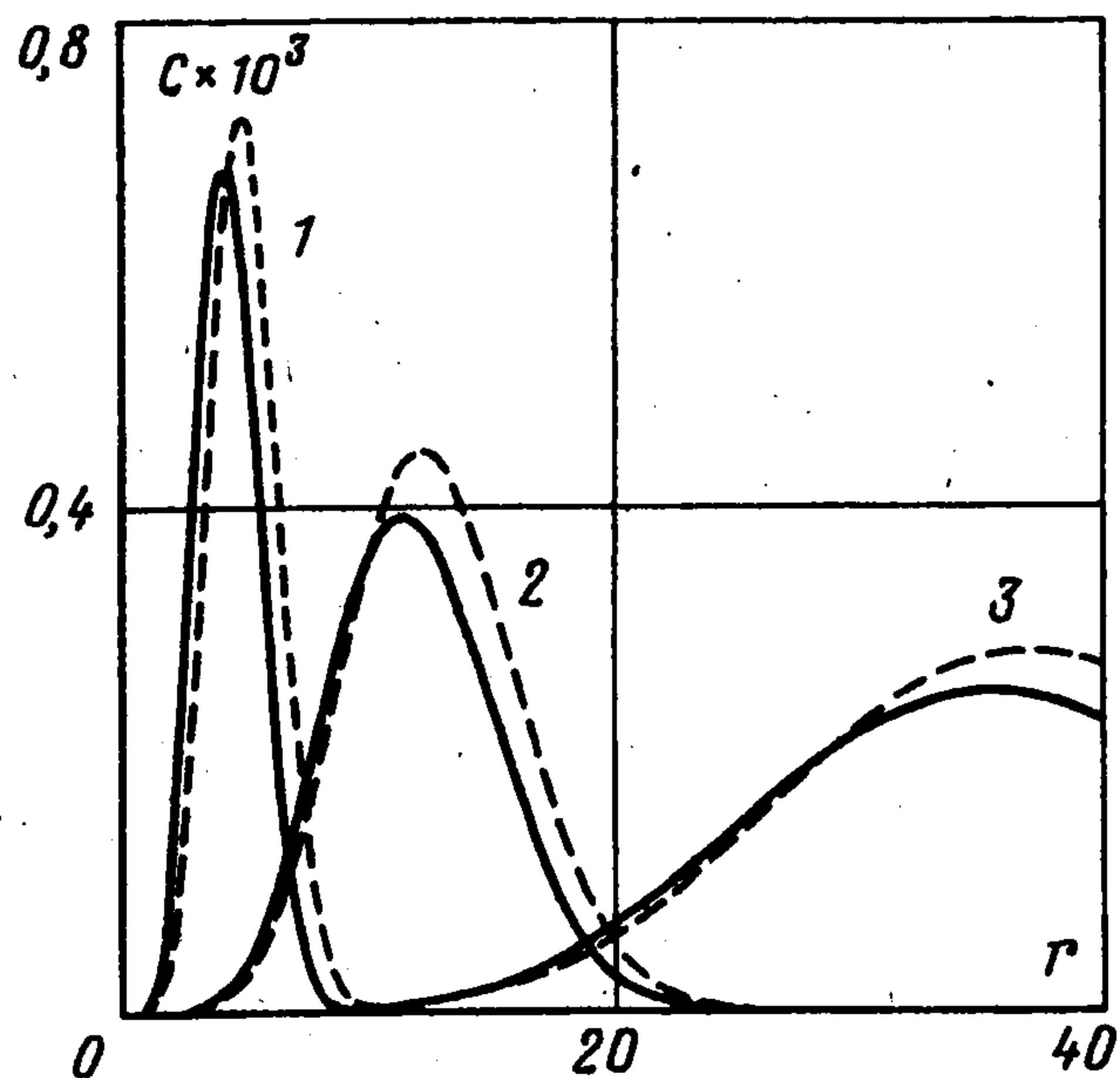
$$\frac{dA}{dX} = \frac{4D}{\alpha \mu_1} \frac{A^{3-n}}{X^2} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1} \frac{A}{X} \tag{5.5}$$

Аналогично случаю прямолинейного течения, качественно различаются случаи $n < 2$, когда все траектории входят в начало координат, и $n > 2$, когда все решения стремятся к точкам оси X , т.е. асимптотически оторочка расплывается, сохраняя конечный запас вещества. В пограничном случае $n = 2$ уравнение (5.5) оказывается линейным и задача решается в квадратурах

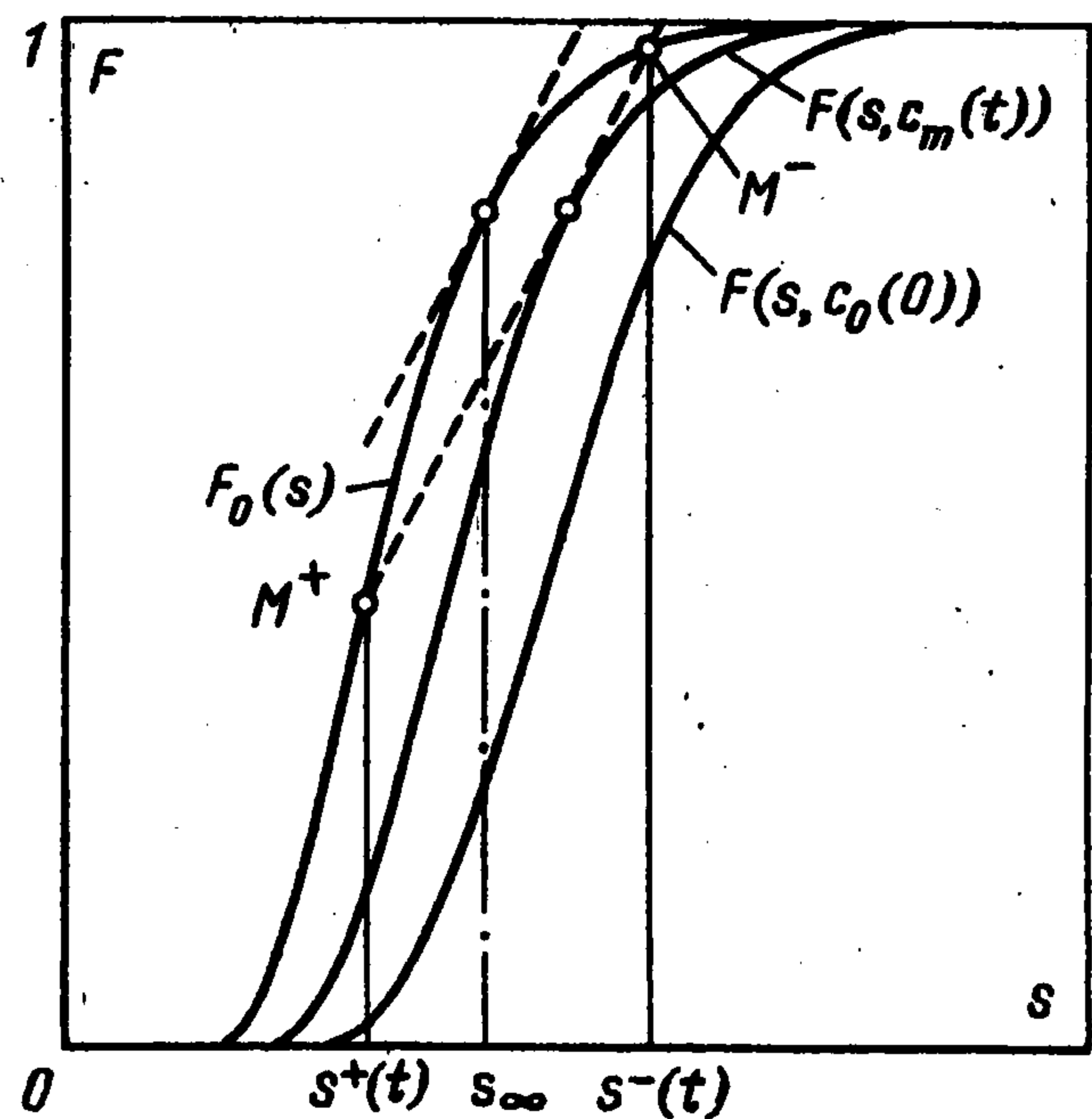
$$A = A_0 \left(\frac{X}{X_0} \right)^{\mu-1} \exp\left(-\frac{4D}{\alpha \mu_1} \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X_0} \right) \right) \tag{5.6}$$

$$t = \frac{1}{\alpha \mu_1} \int_X^{X_0} \frac{dX}{XA(X)}, \quad \mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Вновь второе соотношение (5.6) указывает на весьма медленное затухание полного запаса примеси со временем.



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 4 показаны приближенное решение, полученное методом интегральных соотношений, (штриховые линии) и результаты численного расчета (сплошные линии) для критического случая ($n = 2$) для $q = 6$, $\alpha = 100$ и $t = 1, 10, 100$, соответственно для кривых 1, 2, 3, при этом значения $c(r, t)$ уменьшены в 10 раз для кривых 1 и увеличены в 10 раз для кривых 3. Сопоставление обнаруживает хорошее согласие между приближенными аналитическими и численными результатами.

6. Вытеснение тонкой оторочкой активной примеси. При оценке влияния эволюции распределения примеси на процесс вытеснения нефти раствором "активной примеси" — вещества, используемого для повышения нефтеотдачи (см., например, [1–3]), ниже используются три упрощающих допущения: 1) обратное влияние двухфазности потока на перенос примеси не учитывается, так что распределение концентрации примеси такое же, как и в однофазном потоке (это предположение приемлемо, если растворимость примеси в водной и нефтяной фазах одинакова), 2) конвективный перенос примеси преобладает над диффузионным; поэтому размер оторочки мал по сравнению с характерным размером пласта ("узкая оторочка"), 3) капиллярным переносом можно пренебречь.

При сделанных предположениях исследование вытеснения сводится к решению задачи [1–3]

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + v \frac{\partial F(s, c)}{\partial x} = 0 \quad (6.1)$$

$$s(x, 0) = s_0, \quad s(0, t) = s^0, \quad c = c(x, t)$$

Здесь s — водонасыщенность, U — скорость вытеснения, m — пористость пласта, F — функция распределения потоков (функция Баклея — Леверетта), зависящая от концентрации активной примеси как от параметра. Распределение $c(x, t)$ считается известным (скажем, из решения рассмотренной выше задачи) и сосредоточенным вблизи известной траектории оторочки $x = X_0(t)$. Всюду вне узкого пограничного слоя вблизи траектории оторочки распределение насыщенности удовлетворяет уравнению Баклея — Леверетта (уравнению (6.1) с $F_0(s) = F(s, 0)$).

Тонкость оторочки позволяет использовать процедуру сращиваемых асимптотических разложений, подобно тому, как это сделано применительно к сходным задачам ранее [3, 5]. Вводя в пограничном слое внутреннюю координату $\xi = x - X_0$, находим, что распределение насыщенности в переходной зоне удовлетворяет в каждый момент соотношению

$$UF(s, c) - mVs = C, \quad V = X'_0(t) \quad (6.2)$$

где C и V – медленно меняющиеся функции t . Соотношение (6.2) определяет на (s, F) -диаграмме (фиг. 5) прямую, точки пересечения которой с графиком $F_0(s)$, M^+ и M^- , отвечают состояниям за оторочкой и перед ней в данный момент. Наклон этой прямой известен и равен mV/U , однако, свободный член $C(t)$ остается неопределенным. Чтобы его определить, заметим, что при фиксированном t внутри переходного слоя имеем горбообразный профиль концентрации $C(x, t)$. Из (6.2) следует

$$-mV \frac{\partial s}{\partial \xi} + U \frac{\partial F}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \xi} + U \frac{\partial F}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial \xi} = 0$$

Однако при $\xi = 0$ имеем $\partial c / \partial \xi = 0$, $c = c_{\max}(t)$, так что $V = (U/m) \partial F(s, c_{\max}) / \partial s$. Это означает, что прямая (6.2) на (s, F) -диаграмме в каждый момент t касается графика $F(s, c)$ как функции s при $c = c_{\max}(t)$ (фиг. 5). Этим однозначно определяются текущие значения $s^+(t)$ и $s^-(t)$ насыщенности по обе стороны от траектории оторочки $X_0(t)$.

После этого распределение насыщенности $s(x, t)$ находится методом характеристик и дается выражениями

$$x(s, t) = F'_0(s) \frac{U}{m} t, \quad s \leq s_0^+, \quad s \geq s_0^-$$

$$x(s, t) = F'_0(s) \frac{U}{m} (t - t') s^\mp(t') + X_0(t')$$

(верхний индекс минус берется при $s_\infty \leq s^- \leq s_0^-$, плюс – при $s_0^+ \leq s \leq s_\infty$). Здесь s_∞ – предельное значение насыщенности на фронте затухающей оторочки, которое дается решением уравнения $V = (U/m) F'_0(s_\infty)$. Таким образом, в рассматриваемом случае все представляющие интерес технические характеристики могут быть явно вычислены.

Отметим в заключение, что тот же подход без изменений применим к осесимметричному радиальному течению, если положить $x = r^2/2$, где r – расстояние от скважины.

Автор благодарит Г.И. Баренблатта и Э.В. Теодоровича за обсуждения и Л.Н. Каплинскую за помощь в составлении программ численных расчетов и оформлении статьи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-0748) и Международного научно-технического центра (714).

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
2. Ентов В.М., Зазовский А.Ф. Гидродинамика процессов повышения нефтеотдачи. М.: Недра, 1989. 231 с.
3. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. Theory of Fluid Flow Through Natural Rocks. Dordrecht: Kluwer, 1990. 400 p.
4. Entov V.M. Dissipative effects in chemical flooding // Flow through porous media: Fundamentals and reservoir engineering applications. Proc. Intern. Conf. Moscow, 1992 / Ed. Entov V.M., Moscow: Inst. Probl. Mech. RAS, 1992. P. 22–25.
5. Ентов В.М., Зазовский А.Ф. О динамике вытеснения нефти тонкой оторочкой раствора активной примеси // Тр. Моск. инст. нефтехим. и газ. пром-сти им. И.М. Губкина. 1985. Вып. 181. С. 32–52.
6. Entov V.M., Ginsburg I.S., Teodorovich E.V. Irreversible adsorption and dispersion effects in propagation of thin slugs of chemicals // Proc. 6th Europ. Symp. on Improved Oil Recovery, Stavanger, Norway, 1991. V. 1. Book 2. P. 619–628.
7. Гинзбург И.С., Ентов В.М., Теодорович Э.В. Метод ренормгруппы в задаче конвективной диффузии с необратимой сорбцией // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 68–76.

8. Гинзбург И.С., Ентов В.М. О динамике тонкой оторочки примеси с учетом диффузии и необратимой сорбции // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 3. С. 101–112.
9. Ентов В.М., Теодорович Э.В. Решение задачи конвективной нелинейной диффузии на основе ренормализационной группы // Теорет. основы хим. технологии. 1993. Т. 27. № 3. С. 218–223.
10. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике. Л.: Гидрометиздат, 1978. 207 с.
11. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 477 с.
12. Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Самарский А.А. Об асимптотических "собственных функциях" задачи Коши для одного нелинейного параболического уравнения // Мат. сб. 1985. Т. 126. № 4. С. 435–472.
13. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
14. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.XII.1997