

УДК 532.5

© 1999 г. М.Я. Иванов, Л.В. Терентьева

СТАЦИОНАРНЫЕ СОЛИТОПОДОБНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА ПРИ НАЛИЧИИ СОБСТВЕННЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЕЙ

Проанализированы стационарные решения системы уравнений Эйлера при наличии собственных (внутренних) силовых взаимодействий электрического и гравитационного типов. Основное внимание уделено классу солитонных "частицеподобных" решений с сосредоточенными зарядом и массой. Изучены также периодические стационарные решения, реализующиеся при наличии собственного гравитационного поля при ненулевом значении плотности на бесконечности.

Не приводя обширную библиографию по солитонным решениям уравнений гидродинамического типа, укажем ряд монографий и обзоров по гравитационным волнам на поверхности жидкости [1–3] и ионно-звуковым солитонам в гидродинамических моделях плазмы [1,2,4]. Классические солитонные решения [5,6] были получены как точные непрерывные решения нелинейных волновых или эволюционных уравнений. Отличные от классических солитонные частицеподобные решения были получены [7,8] как стационарные решения уравнений двухжидкостной модели холодной плазмы.

1. Исходные уравнения. Выпишем исходные уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера) с учетом собственных внутренних взаимодействий частиц среды. В качестве таких взаимодействий будем рассматривать электрическое взаимодействие заряженных частиц или гравитационное взаимодействие нейтральных частиц. Предполагая, что движения жидкости происходят адиабатически либо изотермически, не будем использовать уравнение сохранения энергии.

Уравнения неразрывности и количества движения имеют вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{V}) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{nm}\nabla P + \mathbf{F} \quad (1.1)$$

Здесь m – масса частиц среды, n , P и \mathbf{V} – концентрация, давление и скорость среды соответственно, \mathbf{F} – функция, характеризующая силовое поле, связанное с частицами среды.

Сформулируем постановку задачи для двух вышеуказанных случаев. В первом случае характерным примером могут служить уравнения движения ионного газа для гидродинамической "двухжидкостной" модели плазмы, когда ионная и электронная компоненты плазмы слабо взаимодействуют между собой [1,4,9]. Для электрического взаимодействия

$$\mathbf{F} = -\nabla\phi_1 \quad (1.2)$$

где ϕ_1 – потенциал электрического поля, определяемый из уравнения Пуассона

$$\Delta\phi_1 = 4\pi\frac{e^2}{m}(n_e - n) \quad (1.3)$$

Здесь e – элементарный заряд, n_e – концентрация электронов.

Система уравнений (1.1) – (1.3) замыкается уравнением состояния ионного газа, например, в виде

$$P = nT \quad (1.4)$$

где T – постоянная температура ионной компоненты плазмы, и заданием распределения концентрации электронов, например, бoльцмановского распределения

$$n_e = n_0 \exp(e\phi_1 / T_e) \quad (1.5)$$

где T_e – постоянная температура электронной компоненты плазмы, n_0 – невозмущенная концентрация частиц на бесконечности.

Из системы уравнений (1.1) – (1.5) в случае малых амплитуд возмущений следуют уравнения Буссинеска [1]. Дальнейшая линеаризация этих уравнений относительно решений типа "простой" волны приводит к уравнению Кортевега – де-Вриза, обладающему решениями в виде уединенных волн – солитонов. В случае конечных амплитуд возмущений с помощью изложенного ранее подхода [10] можно выполнить более полное изучение структуры стационарных решений системы (1.1) – (1.5) для одномерного случая. В частности, были получены [7,8] "дозвуковые" солитонные решения с сосредоточенным в центре солитона зарядом и массой.

Ниже подробно изучаются солитонные решения системы (1.1) – (1.5). Для большей наглядности анализа вместо выполнения соотношения (1.5) будем полагать $n_e = n_0$. Такая замена оправдана, во-первых, в областях, где величина потенциала ϕ_1 близка к нулю, во-вторых, в областях, где величина потенциала ϕ_1 отрицательна и $n_e \ll n$. При этом правая часть уравнения Пуассона (1.3) слабо зависит от n_e и, как показывает анализ, можно положить $n_e = n_0$ без нарушения структуры получающихся стационарных решений.

Для случая движения нейтральных гравитирующих частиц полагаем

$$\mathbf{F} = \nabla\phi_2 \quad (1.6)$$

где ϕ_2 – потенциал гравитационного поля, определяемый из уравнения Пуассона

$$\Delta\phi_2 = 4\pi Gm(n_0 - n) \quad (1.7)$$

(G – гравитационная постоянная). Правая часть уравнения (1.7) записана в виде, позволяющем учитывать "репульсивную" силу [11], действующую на больших космических расстояниях и частично нейтрализующую силу гравитационного притяжения.

Система уравнений (1.1), (1.6) и (1.7) также является замкнутой.

Ниже анализируются стационарные решения одномерной системы уравнений, следующей из (1.1), (1.2)

$$\frac{dn}{dt} + \frac{dnu}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} = -\frac{c^2}{n} \frac{dn}{dx} + F \quad (1.8)$$

где u – компонента скорости среды в проекции на ось x , $c^2 = T/m$ – характерная скорость звука (скорость распространения малых возмущений).

Система (1.8) замыкается следующими соотношениями:

для среды заряженных частиц при наличии электростатического взаимодействия (с учетом сделанных предположений)

$$F = -\partial\phi_1 / \partial x, \quad \Delta\phi_1 = b_1^2(1 - n) \quad (1.9)$$

для среды нейтральных гравитирующих частиц

$$F = \partial\phi_2 / \partial x, \quad \Delta\phi_2 = b_2^2(1 - n) \quad (1.10)$$

В (1.8) – (1.10) и ниже все величины считаются безразмерными. При этом кон-

центрация ионов n отнесена к своему невозмущенному значению n_0 , скорости u и c – к характерному значению u_0 , координата x – к x_0 , время t – к t_0 , потенциалы ϕ_1 и ϕ_2 – к $\phi_0 = u^2$. Тогда положительные постоянные b_1 и b_2 определяются следующим образом:

$$b_1^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m u_0^2}, \quad b_2^2 = \frac{4\pi G m n_0}{u_0^2} \quad (1.11)$$

Перейдем к рассмотрению структуры стационарных решений системы уравнений (1.8), (1.9) для среды заряженных частиц при наличии электростатического собственного поля и системы (1.8), (1.10) для среды нейтральных гравитирующих частиц.

Стационарные решения исходных уравнений будем рассматривать в системе координат (X, t) , где t – прежнее, $X = x + Ut$ и $-U$ – постоянная скорость движения новой системы координат относительно исходной. После перехода к переменным (X, t) и однократного интегрирования уравнения неразрывности по x из (1.8) получим

$$n(u+U) = A, \quad (u+U) \frac{du}{dX} = -c^2 \frac{d \ln n}{dX} + F \quad (1.12)$$

Постоянная интегрирования A будет определена в каждом конкретном случае из граничных условий при $X \rightarrow \pm\infty$. Из второго уравнения системы (1.12) следует соотношение

$$\frac{(u+U)^2}{2} + c^2 \ln n + \int F dX = \text{const} \quad (1.13)$$

которое можно назвать аналогом интеграла Бернулли.

2. Структура стационарных решений для среды заряженных частиц. Рассмотрим стационарные решения системы уравнений (1.9), (1.12), которые удовлетворяют граничным условиям $n \rightarrow n_0 = 1, u \rightarrow 0$, при $X \rightarrow \pm\infty$. Тогда постоянная A в первом уравнении системы (1.12) равна U . Дифференцируем второе уравнение системы (1.12) по X и исключаем из полученного соотношения значение концентрации $n = U/(u+U)$ и потенциала ϕ_1 с помощью (1.9). Вводя в качестве независимой переменной величину $v = u+U$, а в качестве зависимой переменной – $p = dv/dX$, получаем в итоге одно уравнение первого порядка

$$\frac{dp}{dv} = - \frac{p^2(v^2 + c^2) + b_1^2(v-U)v}{(v^2 - c^2)pv} \quad (2.1)$$

Из (2.1), в частности, следует линейное уравнение для функции $w(v) = p^2(v)$.

Картина интегральных кривых уравнения (2.1) на фазовой плоскости (v, p) симметрична относительно горизонтальной оси $p = 0$ и содержит на этой оси две особые точки с координатами

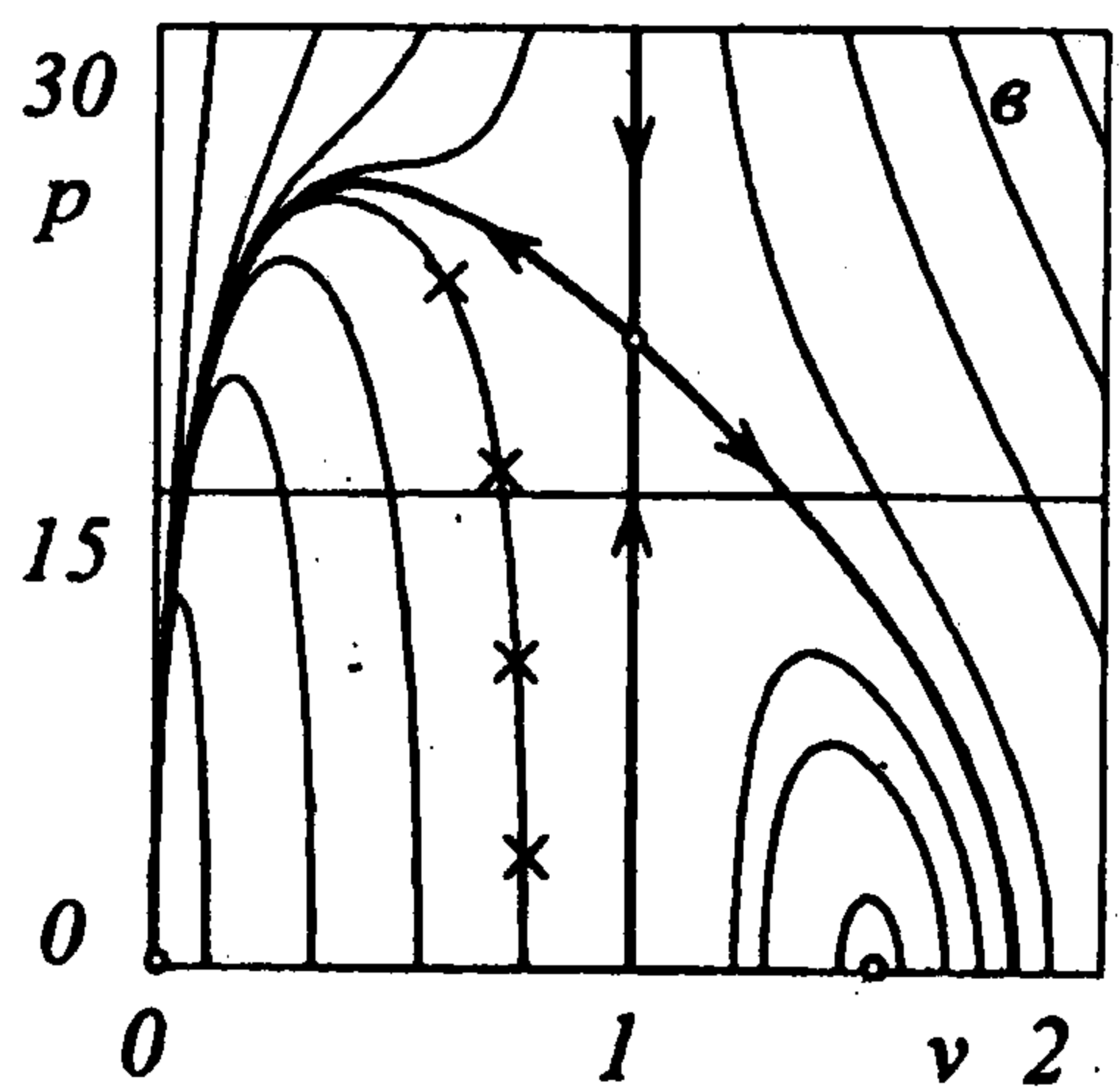
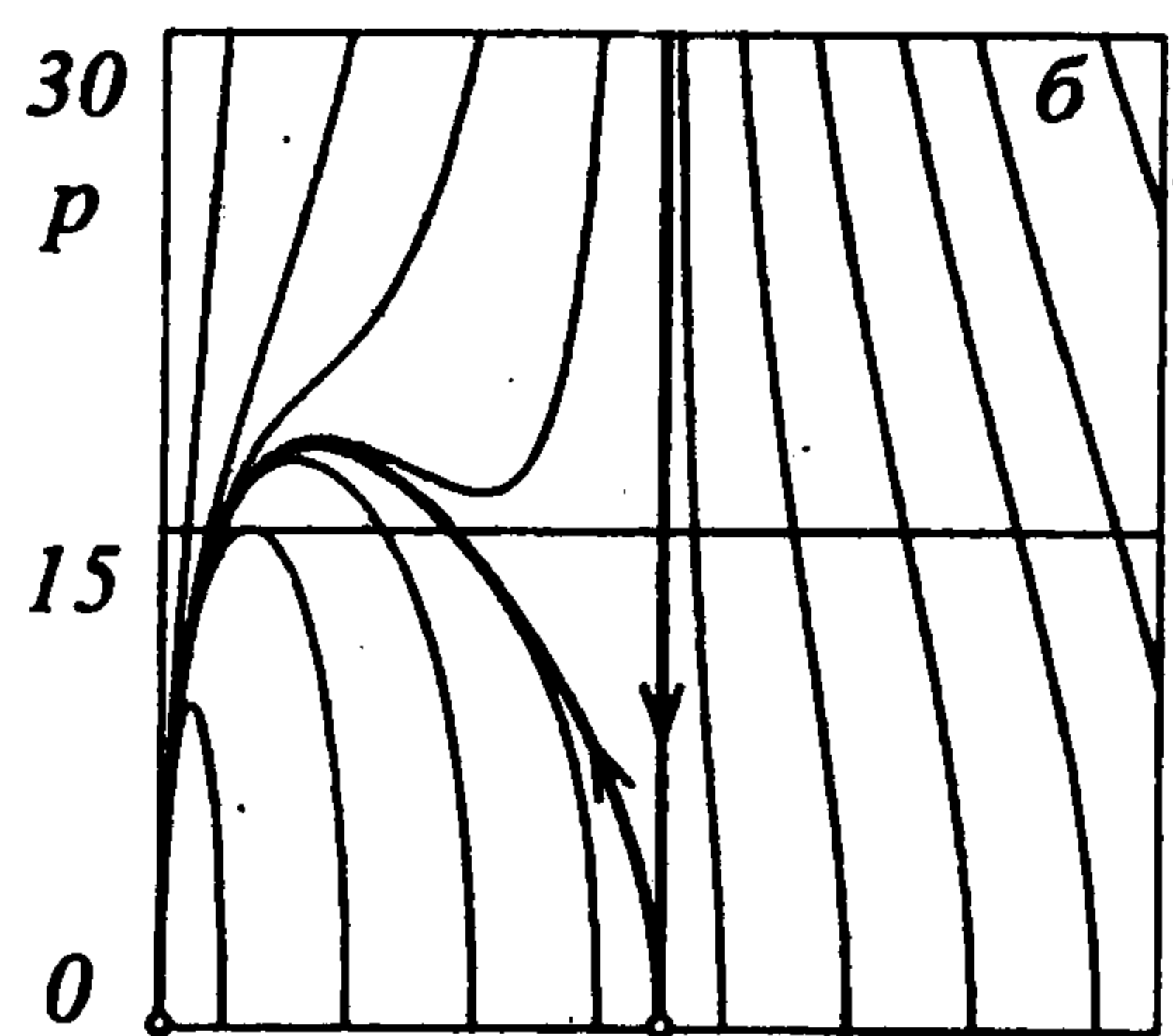
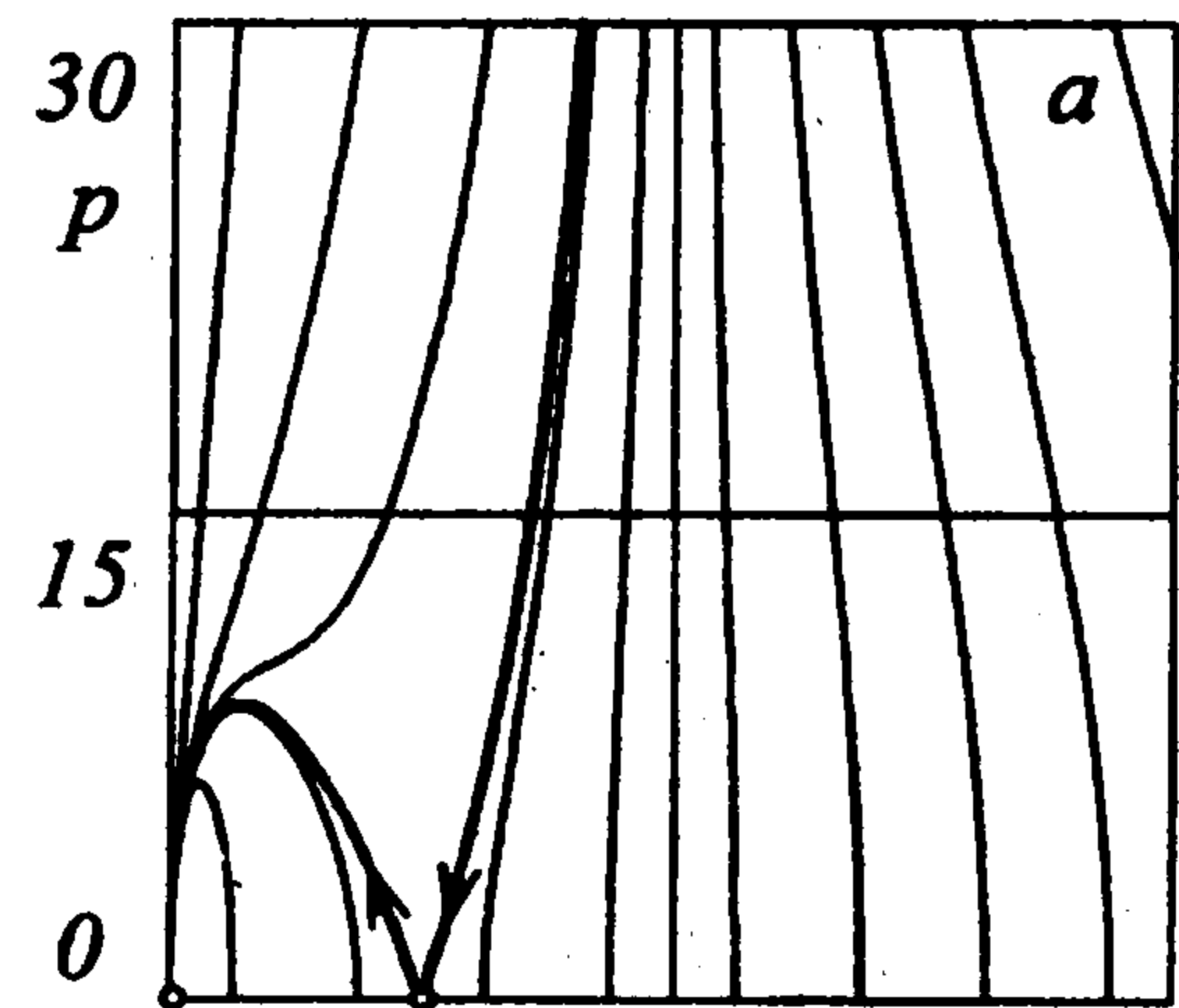
$$v_1 = 0, \quad p_1 = 0; \quad v_2 = U, \quad p_2 = 0 \quad (2.2)$$

Анализ показывает, что первая особая точка – вырожденный узел. Интегральные кривые в этой точке касаются вертикальной оси при $v \geq 0$. Вблизи этой точки для интегральных кривых справедлива асимптотическая формула

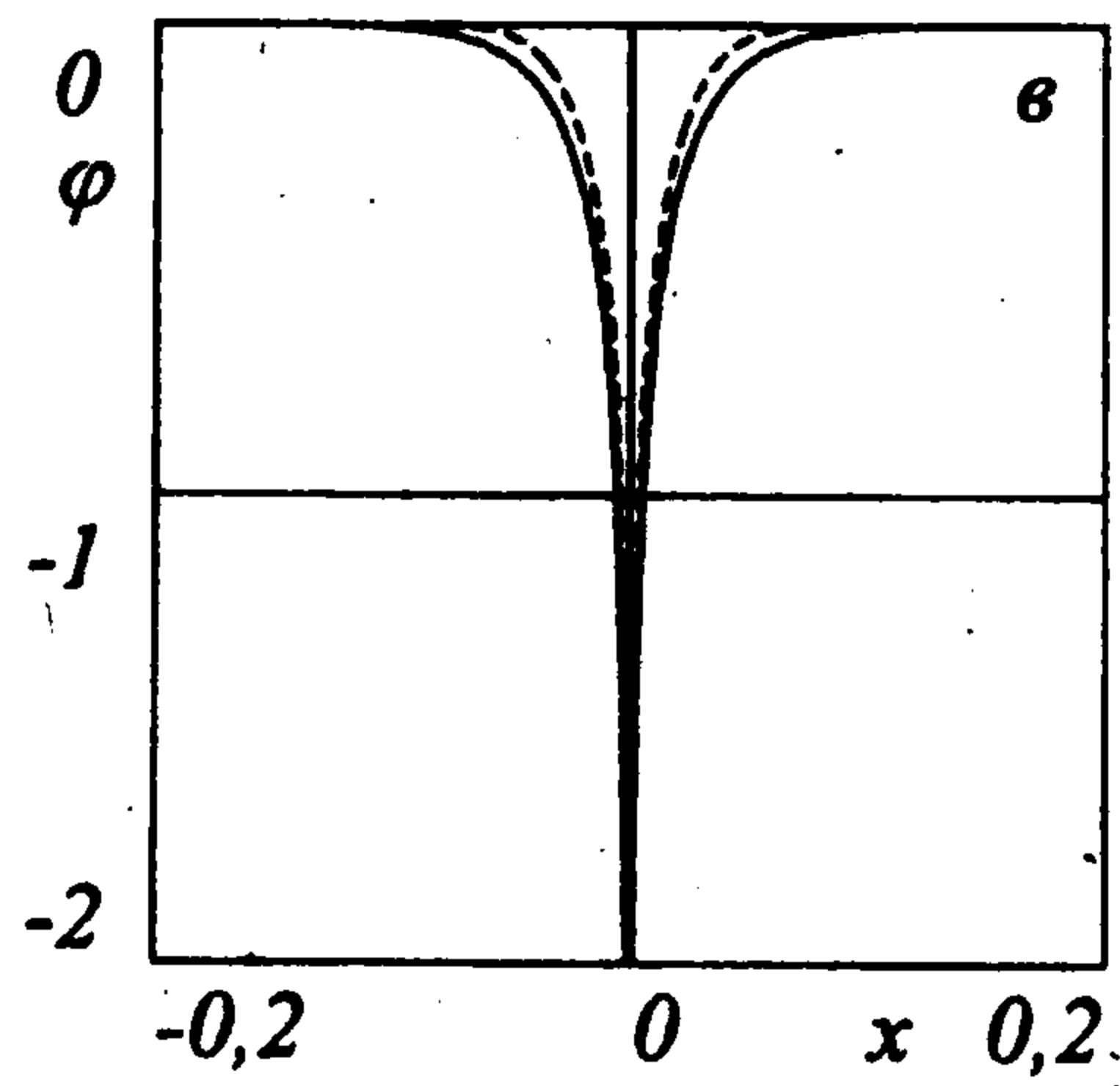
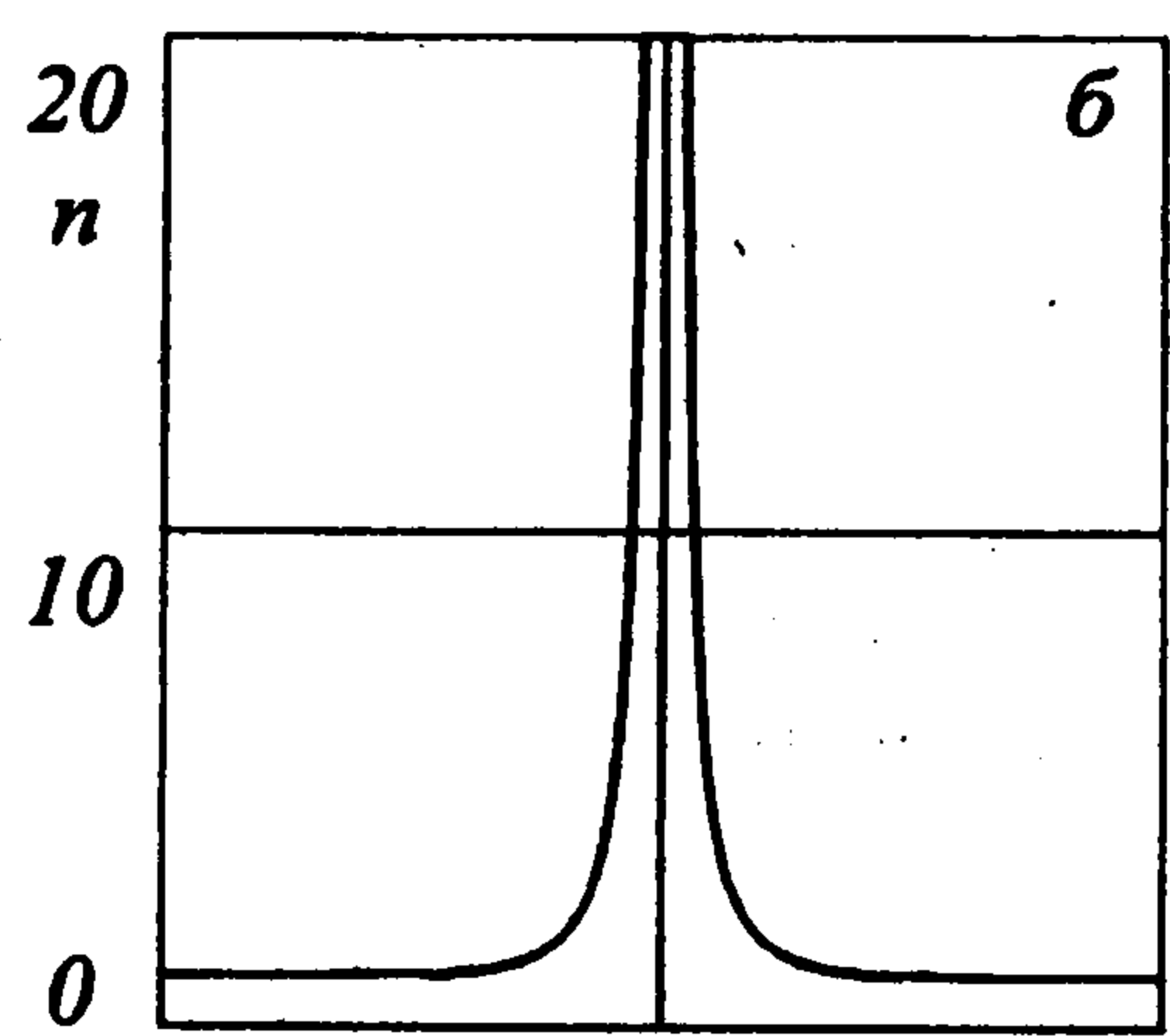
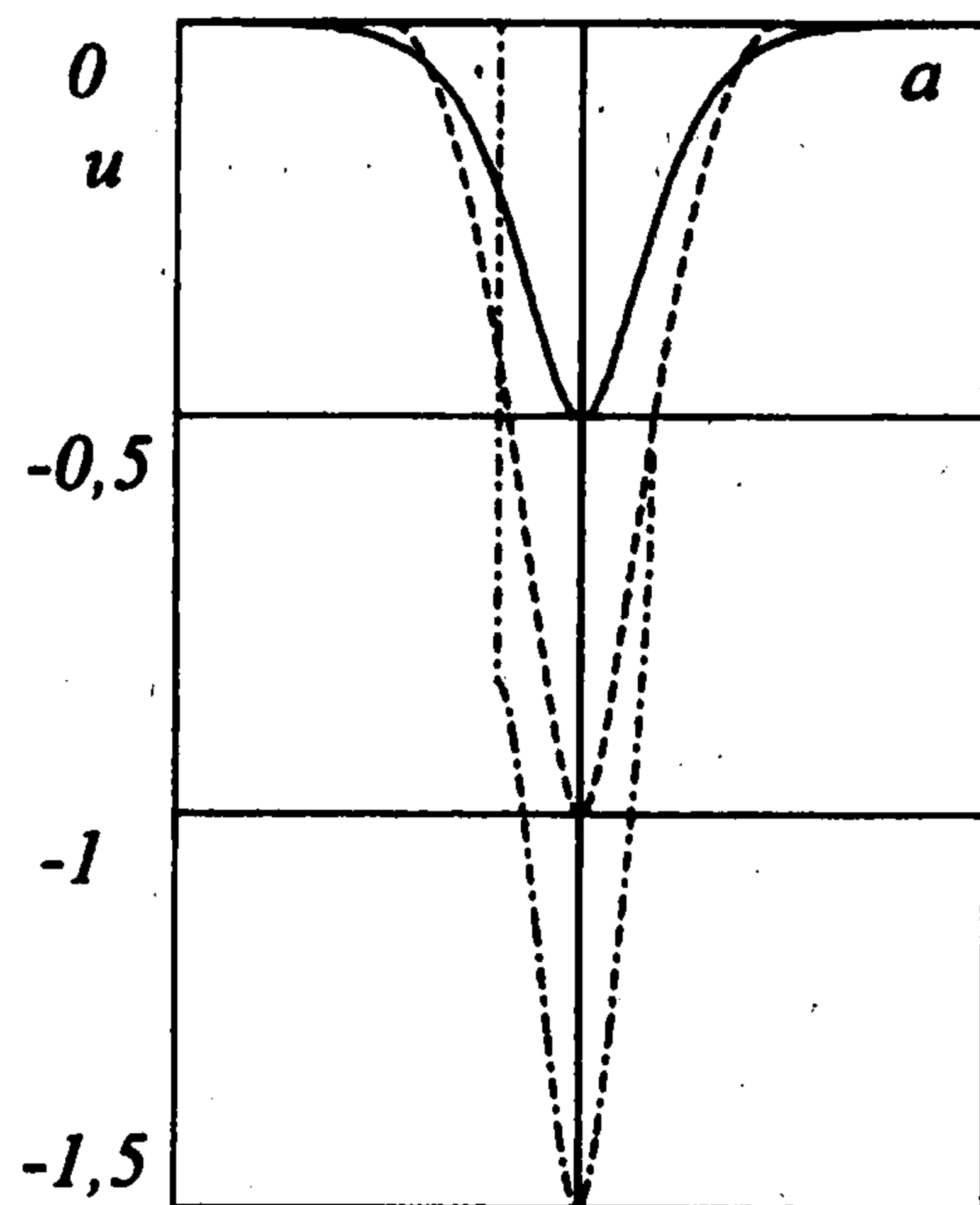
$$p^2 = \frac{2b_1^2}{c^2} (Cv^2 + v^2 \ln |v| + Uv)$$

где C – постоянная (параметр, определяющий соответствующую интегральную кривую в окрестности особой точки).

Вторая особая точка – седло при $U^2 \leq c^2$ и центр при $U^2 > c^2$. В первом случае



Фиг. 1



Фиг. 2

направления подхода сепаратрис к этой особой точке задаются угловыми коэффициентами

$$k_{1,2} = \pm b_1 \sqrt{c^2 - U^2}$$

В физической плоскости движению по сепаратрисе из второй особой точки соответствует движение из бесконечности (по X). Вблизи второй особой точки верно следующее асимптотическое соотношение (при $U^2 < c^2$):

$$p^2 = b_1^2 (v - U)^2 / (c^2 - U^2)$$

На фазовой плоскости могут существовать еще две особые точки с координатами

$$v_{3,4} = c, \quad p_{3,4} = \pm b_1 \sqrt{(U - c) / (2c)} \quad (2.3)$$

При $U > c$ это седловые особые точки. Когда $U < c$, они имеют мнимые значения ординат. Движение к ним осуществляется по вертикальной сепаратрисе, от них – по сепаратрисам с угловыми коэффициентами

$$k_{3,4} = \mp [b_1 / (6c^3)] \sqrt{2c / (U - c)}$$

В физической плоскости последнему движению соответствует движение из бесконечности. Вблизи третьей и четвертой особых точек верна следующая асимптотическая формула:

$$p = b_1 \sqrt{(U - c) / (2c)} + [b_1 / (6c^3)] \sqrt{2c / (U - c)} (c - v)$$

При $U = c$ вторая, третья и четвертая особые точки совпадают. Движение к этой особой точке происходит вдоль вертикальной сепаратрисы $v = c$, из особой точки – по сепаратрисе

$$p^2 = -[b_1 / (3c)](v - c)$$

Последнюю особую точку с отрицательной абсциссой $v = -c$ следует рассматривать только при $U < 0$. При этом анализ сводится к уже выполненному анализу.

На фиг. 1 показана структура решений в фазовой плоскости при $c = 1$, $b_1 = 9$ и разных значениях U : $U = 0,5$ (а), $U = 1$ (б) и $U = 1,5$ (в). Жирными кривыми со стрелками представлены сепаратрисы, проходящие через особые точки.

Особенности решения в форме дозвукового частицеподобного солитона (сепаратриса на фиг. 1, а, соединяющая первую и вторую особые точки) аналогичны подробно исследованным особенностям "дозвуковых" солитонов [7,8]. Отметим, что изменению координаты X от $+\infty$ до $-\infty$ соответствует движение по сепаратрисе из второй особой точки в направлении, показанном стрелками, через первую узловую особую точку, где $X = 0$, во вторую особую точку (с верхней стороны фазовой плоскости). Для рассматриваемого солитонного решения при приближении к первой особой точке, когда скорость v стремится к нулю ($X \rightarrow 0$), величина концентрации ионов n стремится к бесконечности, величина потенциала $\phi \rightarrow -\infty$, а напряженность электрического поля стремится к $-\infty$ справа и к $+\infty$ слева при $X \rightarrow 0$. Это требует в рассматриваемой математической модели наличия отрицательного сосредоточенного заряда на поверхности $X = 0$. На фиг. 2 сплошными линиями представлены распределения $u(X)$, $n(X)$ и $\phi(X)$, отвечающие рассматриваемому солитонному частицеподобному решению. Описанное решение можно интерпретировать одновременно как частицу в точке $X = 0$ и как связанную с ней волну (в области, где величина скорости u заметно отлична от нуля).

Аналогичный характер имеет солитонное решение вплоть до звуковой скорости движения, когда $U = c$ (фиг. 1, б). Соответствующие распределения $u(X)$, $n(X)$ и $\phi(X)$ для звукового частицеподобного солитона представлены на фиг. 2 штриховыми линиями.

В связи с полученными солитонными решениями, у которых концентрация ионов $n \rightarrow \infty$ при $X \rightarrow 0$, сделаем дополнительные пояснения. При $n \rightarrow \infty$ нарушается исходная постановка задачи (для модели разреженной плазмы), в связи с чем малую окрестность точки $X = 0$ следует исключить из рассмотрения. К тому же, решение с бесконечной концентрацией отрицательного заряда на поверхности $X = 0$ также физически противоречиво. Для того чтобы имело смысл все же рассматривать в целом получаемые решения, требуется в малой окрестности поверхности $X = 0$ дополнительно ввести в модель проницаемый для ионов слой, через который реализуется поток ионов величиной $nv = A$ (в силу первого соотношения системы (1.12)). Одновременно данный слой должен служить носителем конечного отрицательного заряда.

Такое весьма искусственное образование приходится вводить в рассматриваемом одномерном случае. В более сложных – двумерном или пространственном случаях, возможно,

удастся построить более приемлемые с физической точки зрения модели (типа малых отрицательно заряженных окрестностей точек, которые "экранируются" потоком положительных ионов). Однако анализ двумерных и пространственных решений выходит за рамки этой работы (такой анализ требует численного интегрирования исходных уравнений). Укажем также, что введенное здесь допущение о равномерной концентрации электронов при $X \neq 0$ (вместо распределения Больцмана) не меняет характера рассматриваемых решений [7,8], но заметно упрощает выполненный анализ.

Опишем реализующееся решение, отвечающее сверхзвуковому значению скорости $U = 1,5$ (фиг. 1, в). Сверхзвуковой поток из бесконечности, которому соответствует вторая особая точка, являющаяся в данном случае центром, натекает на солитон-частицу с образованием головного скачка уплотнения. На скачке выполняются соотношения типа Ренкина – Гюгонио для прямого скачка (в частности, для данного случая скорость u за скачком уплотнения определяется как $u = 1/U \cong 0,667$; следовательно, $v = u - U \cong 0,833$). Затем реализуется движение, соответствующее маркированной крестиками интегральной кривой, до первой особой точки, где расположен центр солитона, который опять совмещаем с началом координат $X = 0$. Далее из первой особой точки происходит движение по сепаратрисе до третьей особой точки. Из третьей особой точки попасть опять во вторую особую точку в данном случае можно только используя изменяющееся по времени решение типа центрированной волны, которое не представляется в виде интегральной кривой в фазовой плоскости. Пример соответствующего сверхзвуковому солитону-частице распределения $u(X)$ показан на фиг. 2, а штрих-пунктирной линией (штриховая линия здесь отвечает звуковому случаю $U = 1$).

Полученное решение для сверхзвукового потока не является в целом стационарным и во многом аналогично одномерному решению типа опрокидывающейся изолированной волны в обычной идеальной газодинамике, когда центрированная волна разрежения догоняет скачок уплотнения и уменьшает постепенно его интенсивность. В нашем случае волна разрежения догоняет постепенно солитон и уменьшает его интенсивность (суммарную массу). Головная часть солитона, при этом не изменяется и описывается изложенным стационарным решением.

Выполненный анализ структуры стационарных решений легко обобщается на случай адиабатических движений среды, когда вместо изотермического уравнения состояния (1.4) используем адиабатическое уравнение в форме

$$P/P_0 = (n/n_0)^\kappa \quad (2.4)$$

где κ – показатель адиабаты. В этом случае вместо соотношения (2.1) несложно получить

$$\frac{dp}{dv} = - \frac{p^2 (\kappa^2 c^2 U^{\kappa-1} + v^{\kappa+1}) + b_1^2 v^\kappa (v - U)}{(v^{\kappa+1} - \kappa c^2 U^{\kappa-1}) p v} \quad (2.5)$$

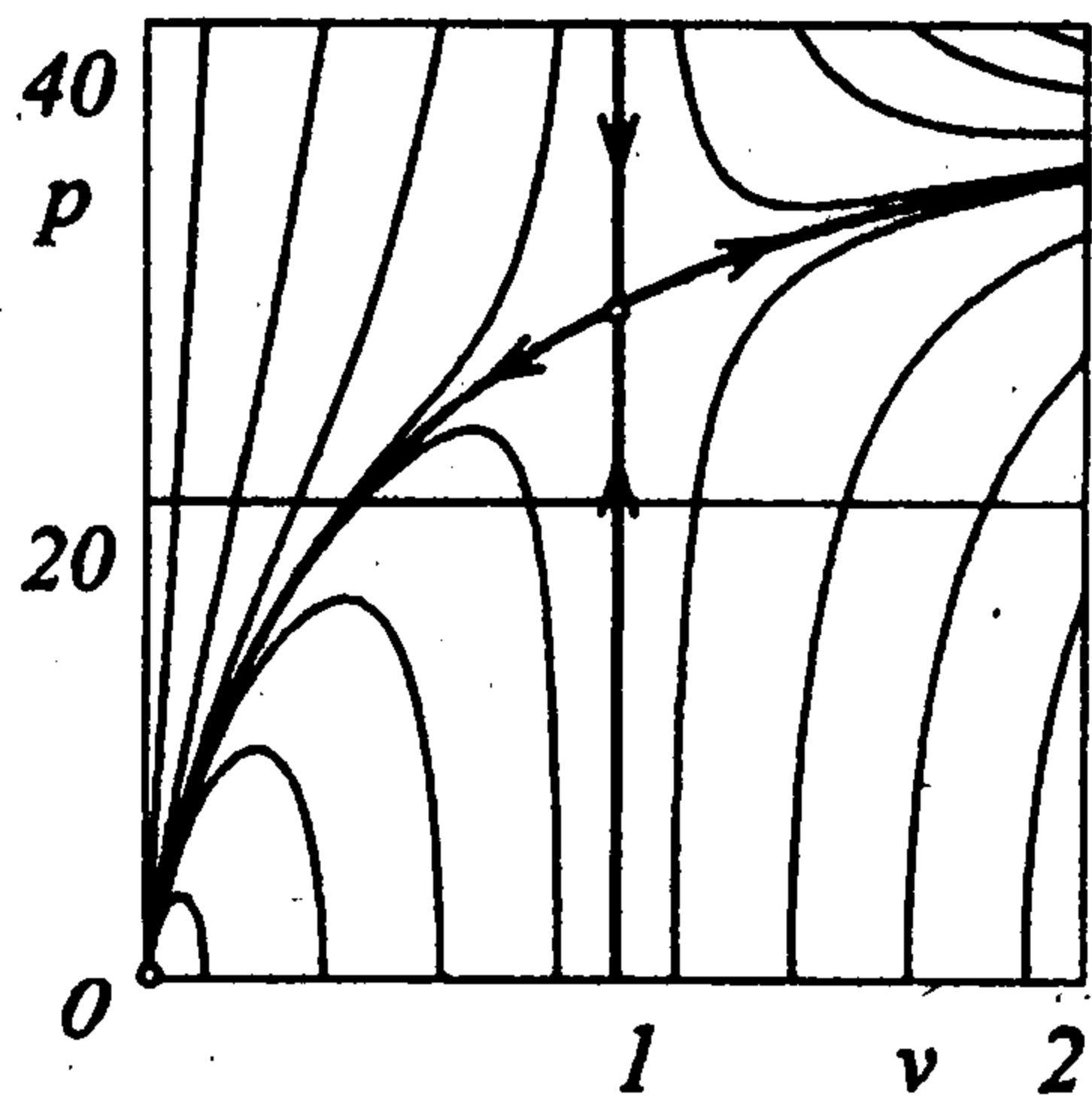
Поле интегральных кривых, задаваемое соотношением (2.5), имеет особые две точки с координатами (2.2). Вместо особых точек с координатами (2.3) получаем особые точки с координатами

$$v_{3,4} = (\kappa c^2 U^{\kappa-1})^{1/(\kappa+1)}, \quad p_{3,4} = \pm [b_1 / c] \sqrt{v_{3,4}^\kappa (U - v_{3,4}) / (2\kappa U^{\kappa-1})}$$

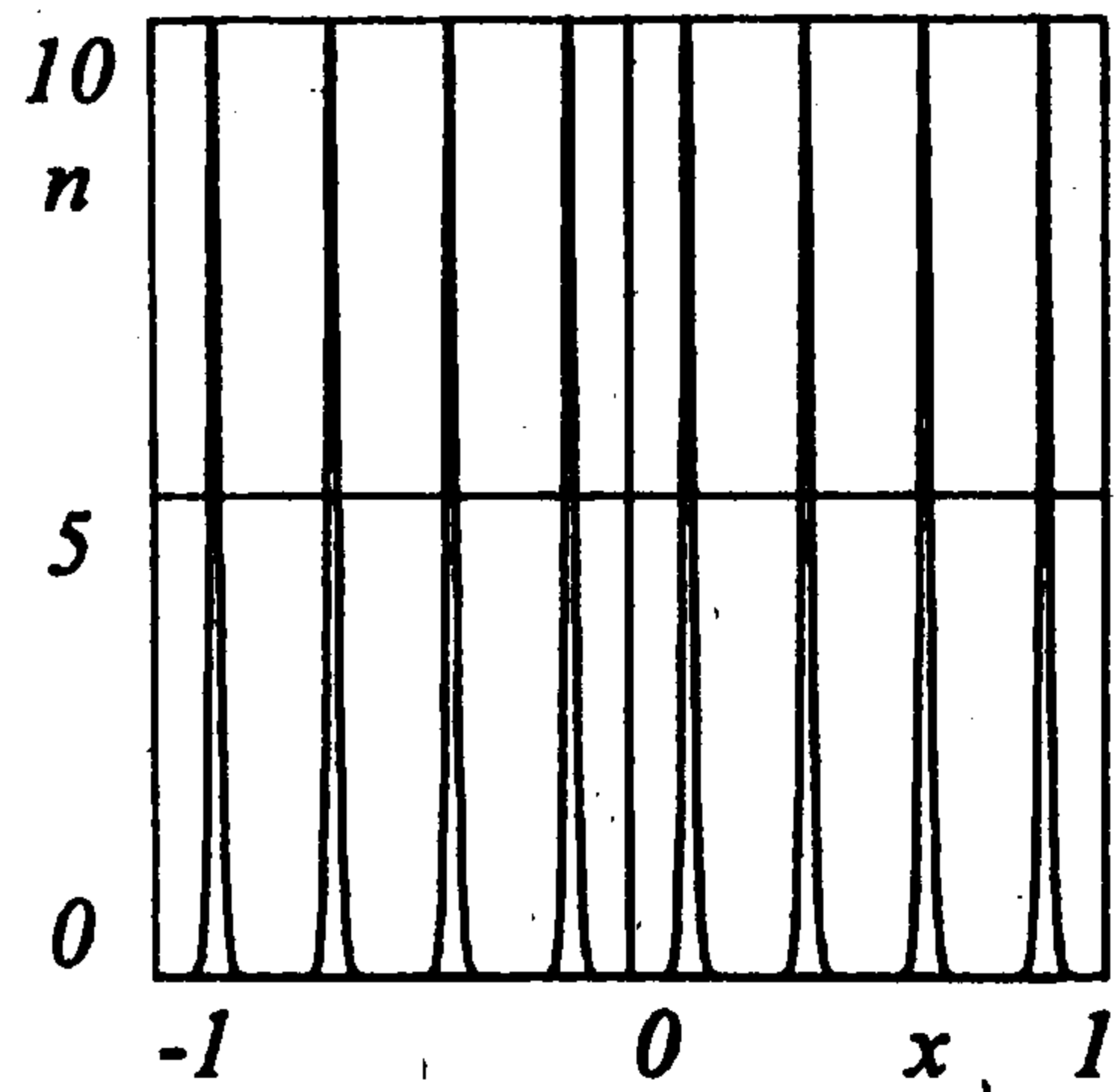
Характер этих особых точек аналогичен описанному выше для изотермического случая.

В заключение раздела отметим также возможность распространения выполненного анализа на случай, когда в выражение для F в уравнении движения входит слагаемое, пропорциональное V , т.е. вместо (1.2) запишем

$$F = -\nabla\phi_1 - v(V - V_n)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Указанное слагаемое учитывает взаимодействие заряженных частиц с нейтральными частицами, средняя гидродинамическая скорость которых V_n , ν – частота столкновений заряженных частиц с нейтральными частицами. В данном случае соотношение (2.1) будет дополнительно содержать в числителе правой части слагаемое $\nu r u^2$. При этом характер некоторых особых точек изменится.

3. Структура стационарных решений для газа нейтральных гравитирующих частиц. Рассмотрим теперь стационарные решения системы уравнений (1.10), (1.12). Постоянную A , имеющую смысл величины расхода газа, будем считать отличной от нуля. Выполняя преобразования, аналогичные проделанным в предыдущем разделе, приходим к уравнению первого порядка, которое отличается от (2.1) заменой b_1^2 на $-b_2^2$, U на A . Это уравнение имеет особые точки, аналогичные (2.2), (2.3).

Первая особая точка ($\nu_1 = 0$, $p_1 = 0$) – вырожденный узел. Интегральные кривые при $\nu \leq 0$ входят в эту точку, касаясь вертикальной оси. Вторая особая точка ($\nu_2 = A$, $p_2 = 0$) является центром при $A^2 < c^2$ и седлом при $A^2 > c^2$. Во втором случае угловые коэффициенты собственных направлений задаются формулами

$$k_{1,2} = \pm b_2 / \sqrt{A^2 - c^2}$$

Вблизи этой особой точки справедливы следующие асимптотические формулы:

при $A^2 < c^2$

$$p^2 = C \exp[-C_1(\nu - A)] - C_2[C_1(\nu - A) - 1]$$

$$C = \text{const}, C_1 = (A^2 + c^2)/(2A(A^2 - c^2))$$

$$C_2 = (b_2 A^2 (A^2 - c^2))/(A^2 + c^2)$$

при $A^2 > c^2$

$$p^2 = \frac{b_2^2}{a^2 - c^2} (\nu - A)^2$$

Третья и четвертая особые точки ($\nu_{3,4} = c$, $p_{3,4} = \pm b_2 \sqrt{(c - A)/(2c)}$) представляют собой седла при $A < c$ или имеют мнимые координаты. Движение к особым точкам осуществляется по вертикальной сепаратрисе $\nu = c$. Выход из особых точек происходит по сепаратрисе с угловым коэффициентом

$$k_{3,4} = \pm [b_2 / (6c^3)] \sqrt{(2c)/(c - A)}$$

Последнюю особую точку с отрицательной абсциссой $v = -c$ не рассматриваем.

На фиг. 3 представлена картина интегральных кривых на фазовой плоскости (v, p) для малого значения величины расхода газа $A = 10^{-4}$. Движение по одной из замкнутых интегральных кривых вокруг второй особой точки типа центра дает решение в форме периодической кноидальной волны. В качестве примера на фиг. 4 представлено распределение концентрации n по координате x (при $U = 0$). Распределения скорости u и потенциала ϕ имеют аналогичный вид. Указанное решение может быть получено для сколь угодно малого значения параметра A , что позволяет предположить возможность существования при $A = 0$ периодического решения с сосредоточенными массами на поверхностях, проходящих через точки максимумов кноидальной волны.

4. Структура стационарных решений для случая сферической симметрии. Сферически симметричные стационарные решения уравнений среды заряженных частиц с кулоновским взаимодействием описывают экранирование сосредоточенного заряда частицами среды с зарядами противоположного знака и достаточно хорошо известны. Уравнения Пуассона для случая изотермической и адиабатической плазмы, в частности, приведены в [8]. Отметим здесь также работу [12], где представлены некоторые приближенные и численные решения задачи экранирования для одномерного случая.

Рассмотрим подробно сферически симметричные течения среды нейтральных гравитирующих частиц. Стационарные решения (для случая $U = 0$) описываются системой уравнений, следующей из (1.1), (1.10)

$$4\pi n u r^2 = A$$

$$u \frac{du}{dr} = -\frac{c^2}{n} \frac{dn}{dr} + \frac{d\phi_2}{dr} \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi_2}{dr} \right) = b_2^2 (1 - n)$$

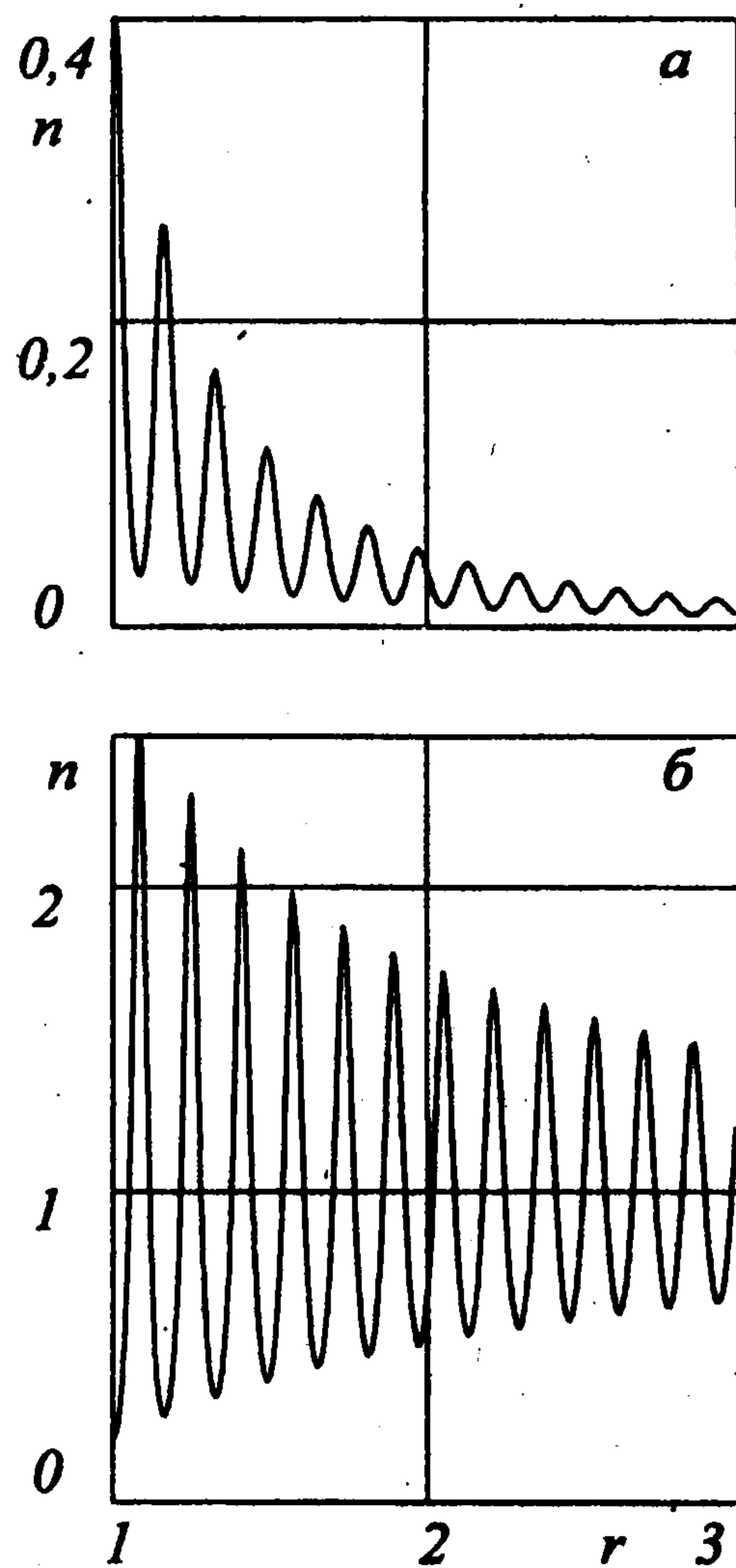
где r – радиальная координата.

После исключения из системы (4.1) значений концентрации и потенциала приходим к уравнению

$$\frac{dp}{dr} = \frac{p^2 r^2 (u^2 + c^2) + 2pru(u^2 - c^2) - 2c^2 u^2 - b_2^2 u (r^2 u - A)}{(u^2 - c^2) u r^2} \quad (4.2)$$

где $p = du/dr$.

Известно, что при наличии в центре симметрии источника массы стационарное решение может существовать вне сферы некоторого радиуса r_{\min} . Интегрирование уравнения (4.2) проводилось методом Рунге – Кутты, начиная с некоторого значения координаты $r = r_0$, где задавались граничные значения для u и p . Разным значениям r_0 и граничных параметров соответствуют различные течения с одинаковым расходом газа, но, возможно, разными параметрами торможения.



Фиг. 5

На фиг. 5 представлены распределения скорости и концентрации частиц при $A = 0,1$ для следующих значений граничных параметров $r_0 = 1$, $u = 0,5$ и $p = 0$.

5. Заключение. Существование стационарных солитонных решений с сосредоточенным в их центре зарядом и массой продемонстрировано только для случая одномерной гидродинамической модели среды заряженных частиц при наличии собственного силового поля типа кулоновского взаимодействия. При этом указанные решения существуют во всем возможном диапазоне скоростей движения солитонов (от дозвуковых до сверхзвуковых скоростей). В сверхзвуковом диапазоне скоростей перед солитоном возникает головная ударная волна. В рассмотренной гидродинамической постановке при наличии собственного поля гравитирующих частиц получены периодические решения типа кноидальных волн. Выполненный анализ наглядно демонстрирует, какие члены исходных уравнений отвечают за появление особых точек на фазовой плоскости и реализацию описанных решений. В дозвуковых случаях эти решения имеют симметричную (или периодическую) форму, обусловленную тем, что эффекты нелинейности уравновешиваются эффектами, связанными с наличием собственных силовых полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
2. Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта. М.: Мир, 1981. 312 с.
3. Зейтунян Р.Х. Нелинейные длинные волны на поверхности воды и солитоны // Успехи физ. наук. 1995. Т. 165. № 12. С. 1403–1456.
4. Березин Ю.А., Федорук М.П. Моделирование нестационарных плазменных процессов. Новосибирск: Наука, 1993. 357 с.
5. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. М.: Наука, 1980. 320 с.
6. Солитоны / Под ред. Р. Булафа и Ф. Кодри. М.: Мир, 1983. 408 с.
7. Иванов М.Я. Об одном классе солитонных решений гидродинамических уравнений движения ионов в однородной плазме при отсутствии внешних полей // Физика плазмы. 1982. Т. 8. Вып. 3. С. 607–612.
8. Иванов М.Я. О теоретической возможности удержания плотной адиабатической плазмы самосогласованным электростатическим полем в форме дозвуковых солитонов // Журн. техн. физики. 1983. Т. 53. Вып. 2. С. 387–390.
9. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высш. школа, 1988. 424 с.
10. Иванов М.Я. К анализу ионных солитонов в плазме без магнитного поля // Физика плазмы. 1982. Т. 8. Вып. 2. С. 384–389.
11. A repulsive force in the Universe // Physics News Update. The American Institute of Physics Bulletin of Physics News. 1998. Number 361.
12. Clemente R.A., Martin P. Non-linear unidimensional Debye screening in plasmas // J. Phys. Soc. Japan. 1992. V. 61. № 6. P. 1969–1972.