УДК 531.36 + 539.3

© 1999 г. О.Ю. Динариев

ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕХАНИКИ ДИССИПАТИВНЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ СИСТЕМ С НАСЛЕДСТВЕННОСТЬЮ И МЕХАНИКИ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Показано, что динамика нелинейного многомерного осциллятора, взаимодействующего с полем непрерывно распределенных по частоте гармонических осцилляторов, определяется нелинейным интегродифференциальным уравнением. Исследована возможность обратного перехода от нелинейного осциллятора с наследственностью к гамильтоновой механике. Установлено, что условием вложения системы с наследственностью в более широкую гамильтонову систему является обычное требование неотрицательности производства энтропии. Доказаны теоремы существования и единственности и найден ряд априорных оценок на решение. Доказано также, что при определенных ограничениях, наложенных на ядро релаксации, решение сходится к одной из критических точек эффективного потенциала.

Обычно считается, что описание диссипативных явлений (таких, как трение, вязкость, релаксация и проч.) лежит за пределами применимости гамильтоновой механики. Действительно, теорема Пуанкаре о возврате [1], казалось бы, исключает возможность необратимых процессов для гамильтоновых уравнений. Однако применимость этой теоремы существенно связана с конечностью числа степеней свободы. Если система бесконечномерна, то траектория общего положения уже не обязана как угодно близко возвращаться к начальному состоянию.

Поэтому идея описания диссипативных процессов в рамках гамильтоновой механики состоит в следующем. Пусть множество степеней свободы системы можно разбить на два подмножества, так что фазовое пространство представляется в виде произведения $S_1 \times S_2$, где множество S_1 конечномерно, а S_2 бесконечномерно. Фиксируем начальные условия для степеней свободы из S_2. Решая уравнения Гамильтона, можно исключить из них характеристики подсистемы, соответствующей S_2, и получить одну динамическую систему уравнений для подсистемы, соответствующей S_1. Последняя система уравнений нелокальна по времени, т.е. содержит эффекты наследственности, и может описывать диссипативные явления. Эта методика хорошо известна для точно решаемых моделей с квадратичным гамильтонианом [2–4], т.е. для линейных уравнений. Ниже исследуется возможность описания диссипативных процессов в гамильтоновой механике для нелинейного случая.

1. Взаимосвязь между лагранжевыми системами и системами с наследственностью. Будем использовать обычное определение скалярного произведения и нормы в $\mathbb{C}^N$

$$(z,z') = \sum_{i=1}^{N} z_i^* z_i', \quad |z| = (z,z)^{1/2}$$

$$z = (z_i), \quad z' = (z_i'), \quad i = 1, \ldots, N$$

Звездочка в верхнем индексе означает операцию комплексного сопряжения, A^+ – матрица, сопряженная матрице A, $f * g$ – свертка по времени функций времени $f = f(t)$, $g = g(t)$. Естественно, что для действительных матриц операция сопряжения совпадает с обычным транспонированием. Норма $|\cdot|$ в $\mathbb{C}^N$ позволяет обычным образом ввести норму $\|\cdot\|$ для линейных отображений в $\mathbb{C}^N$.

Рассмотрим лагранжеву систему с набором координат

$$x = (x_i) = (x_i(t)) \in \mathbb{R}^N, \quad \varphi = (\varphi_i) = (\varphi_i(t,\omega)) \in \mathbb{R}^N$$
$$i = 1,\ldots,N, \quad \omega \in [0, +\infty)$$

и лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}(\partial_t x, \partial_t x) - V(x) + \frac{1}{2}\int_0^\infty ((\partial_t\varphi, \partial_t\varphi) - \omega^2(\varphi,\varphi))d\omega +$$
$$+\int_0^\infty (x,\ q\varphi)d\omega + (f(t),\ x) \tag{1.1}$$

Физический смысл этой системы состоит в том, что выделенный N-мерный нелинейный осциллятор $x = x(t)$ взаимодействует с полем N-мерных гармонических осцилляторов $\varphi = \varphi(t, \omega)$, непрерывно распределенных по частоте ω. При этом $V = V(x)$ – потенциальная энергия выделенного осциллятора, $f = (f_i(t))$ – внешняя сила, $q = q(\omega)$ – отличная от тождественного нуля действительная весовая матрица, характеризующая взаимодействие.

Ниже будем всегда предполагать, что: 1) $V \in C^2(\mathbb{R}^N)$, 2) $q \in C^1[0, +\infty)$, 3) матричная функция $dq/d\omega = dq(\omega)/d\omega$ имеет правую производную в точке $\omega = 0$, 4) $\int_0^\infty \omega^{-1}\,\mathrm{Tr}(qq^+)d\omega < +\infty$. Из последнего условия следует равенство $q(0) = 0$. Удобно доопределить матричную функцию $q = q(\omega)$ для отрицательных значений аргумента: $q(\omega) = q(-\omega)$, $\omega < 0$.

Обозначим вектор первых производных потенциала $V = V(x)$ символом ∇V, матрицу вторых производных той же функции V – символом $(\nabla\nabla V)$.

Для нулевых внешних сил потенциальная энергия системы задается выражением

$$U = V + \frac{1}{2}\int_0^\infty \omega^2(\varphi,\ \varphi)d\omega - \int_0^\infty (x,\ q\varphi)d\omega = V_1 + \frac{1}{2}\int_0^\infty \omega^2(\varphi - \omega^{-2}q^+x,\ \varphi - \omega^{-2}q^+x)d\omega$$
$$V_1 = V_1(x) = V(x) - \frac{1}{2}(x,\ \gamma x), \quad \gamma = \int_0^\infty \omega^{-2}qq^+d\omega$$

Следовательно, для энергетической устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы функция $V_1 = V_1(x)$ была ограничена снизу. Далее примем более сильное условие

$$V_1(x) \to +\infty \quad \text{при} \quad |x| \to +\infty \tag{1.2}$$

Из выражения (1.1) следуют уравнения Лагранжа

$$\partial_t^2 x + \nabla V = \int_0^{+\infty} q\varphi d\omega + f, \quad \partial_t^2\varphi + \omega^2\varphi = q^+x \tag{1.3}$$

Будем искать решение системы (1.3) при $t \geqslant 0$ для начальных условий

$$x(0) = x_0, \quad \partial_t x(0) = y_0 \tag{1.4}$$
$$\varphi(0, \omega) = \varphi_0(\omega), \quad \partial_t\varphi(0, \omega) = \psi_0(\omega) \tag{1.5}$$

Из второго уравнения (1.4) и условий (1.5) получается выражение для осцилляторов поля

$$\varphi(t,\ \omega)=\omega^{-1}q(\omega)^{+}\int_{0}^{t}\sin\omega(t-t_1)x(t_1)dt_1+\chi(t,\ \omega) \tag{1.6}$$

$$\chi(t,\ \omega)=\varphi_0(\omega)\cos\omega t+\psi_0(\omega)\omega^{-1}\sin\omega t$$

После подстановки этого выражения в первое уравнение (1.3) получаем интегродифференциальное уравнение

$$\partial_t^2 x(t)+\nabla V_1(x(t))+\int_{0}^{t}K(t-t_1)\partial_t x(t_1)dt_1=f_1(t) \tag{1.7}$$

где

$$K(t)=\int_{0}^{\infty}\omega^{-2}q(\omega)q(\omega)^{+}\cos\omega t d\omega,\quad t\geqslant 0 \tag{1.8}$$

$$f_1(t)=f(t)-K(t)x_0'+\int_{0}^{\infty}q(\omega)\chi(t,\ \omega)d\omega \tag{1.9}$$

Удобно доопределить ядро нулем при отрицательных временах: $K(t)=0$, $t<0$.

Отметим, что для медленных процессов уравнение (1.7) переходит в уравнение вынужденных колебаний многомерного нелинейного осциллятора с трением

$$\partial_t^2 x+\nabla V_1+\lambda\partial_t x=f_1(t),\quad \lambda=\int_{0}^{\infty}K(t)dt$$

Таким образом, уравнение (1.7) является обобщением обычного уравнения для затухающего осциллятора. Ниже будет показано, что решения уравнения (1.7) обладают многими свойствами, присущими обычным затухающим колебаниям.

Напомним, что если $g=g(t)$ – обобщенная функция (или распределение) умеренного роста, то тогда определено преобразование Фурье этой функции [5], которое будет обозначаться

$$g_F(\Omega)=\int e^{-i\Omega t}g(t)dt$$

Следовательно, определен фурье-образ ядра $K_F(\Omega)$. По теореме Пэли–Винера эта функция является аналитической в нижней комплексной полуплоскости. Используя соотношение (1,8), находим

$$K_F(\Omega)=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^{-2}q(\omega)q(\omega)^{+}(\Omega-\omega)^{-1}d\omega,\quad \operatorname{Im}\Omega<0 \tag{1.10}$$

Принятые предположения относительно функции $q=q(\omega)$ позволяют при переходе к пределу действительных значений Ω применить в соотношении (1.10) формулу Сохоцкого – Племеля [6]

$$K_F(\Omega)=\frac{1}{2i}\mathrm{V.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^{-2}q(\omega)q(\omega)^{+}(\Omega-\omega)^{-1}d\omega+\frac{\pi}{2}\Omega^{-2}q(\Omega)q^{+}(\Omega) \tag{1.11}$$

В точке $\Omega=0$ правая часть в выражении (1.11) доопределяется по непрерывности.

Выше было показано, что лагранжева система (1.1) путем редукции по части степеней свободы приводится к нелинейному осциллятору с наследственностью (1.7). Рассмотрим теперь обратный переход: для данного осциллятора с наследственностью (1.7) попытаемся вложить его в некоторую лагранжеву систему с большим множеством степеней свободы.

Лемма 1. Пусть действительная матричная функция $K = K(t) = K(t)^{+}$ непрерывна на полуоси $t \geqslant 0$ и обращается в нуль при $t < 0$. Пусть, кроме того, сходятся интегралы

$$k = \int_{0}^{+\infty} \| K(t) \| \, dt < +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \| K_F(\Omega) \| \, d\Omega < +\infty \tag{1.12}$$

и для действительных значений Ω справедливо неравенство

$$K_F(\Omega) + K_F(\Omega)^{+} \geqslant 0 \tag{1.13}$$

Примем также, что в некоторой действительной окрестности точки $\Omega = 0$ справедливо равенство

$$K_F(\Omega) = a_0 + a_1 \, |\Omega| + o(\Omega)$$

для некоторых действительных симметричных матриц a_0, a_1.

Тогда существует функция $q = q(\omega)$, связанная с функцией $K = K(t)$ формулой (1.11) и удовлетворяющая всем предположениям, принятым для этой функции.

Доказательство. В соответствии с (1.11) будем искать функцию $q = q(\omega)$ из уравнения

$$q(\Omega) q^{+}(\Omega) = \pi^{-1} \Omega^{-2} (K_F(\Omega) + K_F(\Omega)^{+})$$

Из условия леммы следует, что из этого уравнения можно определить функцию $q = q(\omega)$ (неоднозначным образом), причем все необходимые условия будут выполнены. Равенство (1.11) вытекает из формулы Сохоцкого – Племеля. Доказательство закончено.

Замечание 1. Основное условие (1.13) вложимости осциллятора с наследственностью в более широкую гамильтонову систему соответствует выполнению второго закона термодинамики для систем с запаздыванием. В самом деле, неравенство (1.13) эквивалентно выполнению неравенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 (y(t_1), \quad K(t_1 - t_2) y(t_2)) \geqslant 0$$

для произвольных быстро убывающих действительных вектор-функций $y = y(t)$. Это неравенство в точности соответствует условию неотрицательности производства энтропии [7, 8] в механике сред с памятью. Совместность модели со вторым законом термодинамики автоматически обеспечивает ее вложимость в некоторую более широкую гамильтонову систему.

Приведем примеры применения уравнения (1.7) в механике.

Пример 1. *Малые колебания массивной плиты на слое сжимаемой вязкоупругой жидкости.* Пусть невесомый слой вязкоупругой сжимаемой жидкости расположен между неподвижным основанием и плоской плитой с массой M. Для жидкости примем реологические соотношения в виде

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \left(K_V - \frac{2}{3} K_S \right) * e_{kk} \delta_{ij} + 2K_S * e_{ij} \tag{1.14}$$

где e_{ij} – тензор скоростей деформации, $p = p(\rho)$ – гидростатическое давление, зависящее от плотности ρ, $K_V = K_V(t)$ и $K_S = K_S(t)$ – релаксационные ядра для объемных и сдвиговых деформаций соответственно. Пусть $x = x(t)$ – переменная толщина слоя, x_0, ρ_0 – толщина слоя и плотность в нулевой момент времени, $f = f(t)$ – внешняя сила, действующая на плиту (включая вес плиты). Динамика системы описывается уравнением

$$M \partial_t^2 x = p(x_0 \rho_0 x^{-1}) - \left(K_V + \frac{4}{3} K_S \right) * x^{-1} \partial_t x + f(t)$$

Если $|x - x_0| / x_0 \ll 1$, то можно линеаризовать релаксационный член и получить уравнение вида (1.7). При этом может иметь место нелинейная зависимость давления от толщины слоя. Условия $\operatorname{Re} K_{VF} \geqslant 0$, $\operatorname{Re} K_{SF} \geqslant 0$ являются обычными условиями диссипативности для вязкоупругих сред [9].

Пример 2. *Угловые колебания вала.* Пусть массивный вал радиуса R_1 может совершать повороты вокруг своей оси; $\varphi = \varphi(t)$ – угол поворота. Предположим, что вал соприкасается с вязкоупругой смазкой, расположенной в области $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$ $(R_1 < R_2)$, причем внешнюю границу области течения $r = R_2$ можно считать неподвижной. Принимая, что реализуется течение Куэтта для жидкости с реологией (1.14), получаем уравнение

$$J\partial_t^2\varphi = -2\pi R_1^3 L(R_2 - R_1)^{-1} K_S * \partial_t\varphi + F(\varphi) + f(t) \tag{1.15}$$

где J – момент инерции вала, $f(t)$ – момент внешних сил, $F(\varphi)$ – возвращающий момент, создаваемый внешними устройствами, L – длина вала. Уравнение (1.15) описывает, например, работу ротационного вискозиметра.

Пример 3. *Колебания частицы в среде с микроструктурой.* В среде с микроструктурой длинные волны могут генерировать ротационные колебания микрочастиц [10]

$$J\partial_t^2\varphi + \nabla V(\varphi) + \lambda\partial_t\varphi = f(t) \tag{1.16}$$

где $\varphi = (\varphi_i)$ – вектор микроповорота, J – плотность момента инерции, $V = V(\varphi)$ – упругий потенциал, λ – коэффициент вращательной вязкости, $f(t)$ – внешний момент, создаваемый макроскопической упругой волной. При учете эффектов наследственности коэффициент λ в уравнении (1.16) нужно заменить оператором свертки с некоторым ядром [11]

$$J\partial_t^2\varphi + \nabla V(\varphi) + K * \partial_t\varphi = f(t)$$

Условие диссипативности вида (1.13) обосновано для этого случая в [11].

В оставшейся части работы будем всегда предполагать, что условия леммы 1 выполнены. Более того, вместо условия (1.13) примем более сильное неравенство

$$K_F(\Omega) + K_F(\Omega)^+ \geqslant \rho(\Omega)\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N} \tag{1.17}$$

где $\rho(\Omega)$ – непрерывная положительная функция.

2. Теоремы существования и единственности, априорные оценки. Докажем локальную теорему существования и единственности задачи (1.4), (1.7). Для этого воспользуемся методом, представляющим собой простое обобщение метода Пикара–Линдлефа в теории обыкновенных дифференциальных уравнений [12].

Введем обозначения

$$y = y(t) = \partial_t x(t), \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\| z \| = \max(|x|,\ |y|), \quad \Phi(z) = \begin{pmatrix} y \\ -\nabla v_1(x) \end{pmatrix}$$

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -K(t) \end{pmatrix}, \quad \varkappa(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1(t) \end{pmatrix}$$

Тогда задача (1.4), (1.7) может быть переписана в виде интегродифференциального уравнения первого порядка

$$\partial_t z = w, \quad z(0) = z_0$$

$$w(t) = \Phi(z(t)) + \int_0^t \Psi(t - t_1) z(t_1) dt_1 + \varkappa(t)$$

или интегрального уравнения

$$z(t) = z_0 + \int_0^t w(t_1) dt_1 \tag{2.1}$$

Теорема 1. Пусть функция $f_1 = f_1(t)$ интегрируема по Лебегу и ограничена на интервале $[0, T_0]$. Для произвольного положительного числа a положим

$$b_1 = \max_{|x-x_0|\leqslant a} (|\nabla V_1(x)|), \quad b = (b_0 + b_1 + (\| z_0 \| + a)k)$$

$b_0 = \sup\limits_{0<t<T_0} (| f_1(t) |)$ (величина k определена первым соотношением (1.12)).

Тогда на интервале $[0, T_1]$, где $T_1 = \min (T_0, ab^{-1})$, в классе непрерывных функций существует единственное решение задачи (2.1).

Доказательство. Существование. Будем строить решение при $0 \leqslant t \leqslant T_1$ методом последовательных приближений:

$$z_0(t) = z_0, \quad z_n(t) = z_0 + \int_0^t w_n(t_1)dt_1, \quad n > 0 \tag{2.2}$$

$$w_n(t) = \Phi(z_{n-1}(t)) + \int_0^t \Psi(t-t_1)z_{n-1}(t_1)dt_1 + \varkappa(t)$$

По индукции доказывается, что

$$\| z_n(t) - z_0 \| \leqslant a \tag{2.3}$$

Действительно, пусть это неравенство выполнено при $n = k \geqslant 0$.

Тогда непосредственные оценки дают неравенство $\| w_{k+1}(t) \| \leqslant b$, используя которое, а также тот факт, что $t \leqslant ab^{-1}$, выводим из (2.2) неравенство (2.3) при $n = k + 1$.

Далее, пусть

$$c = \max_{|x-x_0|\leqslant a} (\| \nabla\nabla V_1(x) \|)$$

По индукции доказывается неравенство

$$\| z_n(t) - z_{n-1}(t) \| \leqslant b(c+k)^{n-1} t^n / n! \tag{2.4}$$

Поэтому последовательность

$$z_n(t) = z_0 + \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1})$$

равномерно сходится к некоторой непрерывной функции $z = z(t)$. В силу этого и принятых предположений последовательность функций $w_n = w_n(t)$ равномерно сходится к функции

$$\Phi(z(t)) + \int_0^t \Psi(t-t_1)z(t_1)dt_1 + \varkappa(t)$$

Отсюда и из определения последовательности $z_n(t)$ следует, что функция $z = z(t)$ – решение задачи (2.1).

Единственность. Предположим, что $z_* = z_*(t)$ – некоторое решение задачи (2.1) на интервале $[0, T_1]$. По индукции доказывается неравенство, отличающееся от (2.4) заменой $z_{n-1}(t)$ на $z_*(t)$.

Отсюда следует, что $z(t) = z_*(t)$.

Замечание 2. В дальнейшем будем понимать под решением задачи (1.4), (1.7) решение в смысле теоремы 1. Вообще говоря, теорема 1 обеспечивает локальное существование и единственность решения задачи (1.4), (1.7) в классе C^1. Однако если функция $f_1 = f_1(t)$ кусочно-непрерывная, то функция $y = y(t) = \partial_t x(t)$ кусочно-дифференцируемая.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании и единственности решения на всей полуоси $t \geqslant 0$. Обычным способом получения глобального решения является последовательное продолжение решения с помощью локальной теоремы существования. Однако этот метод применяется при наличии априорных ограничений на построенное решение. Найдем такие ограничения.

Заметим, что лагранжева система (1.1) в отсутствие внешних сил имеет интеграл энергии (гамильтониан)

$$H = \frac{1}{2}(y, y) + V(x) + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} ((\psi, \psi) + \omega^2(\varphi, \varphi))d\omega - \int_0^{+\infty} (x, q\varphi)d\omega \tag{2.5}$$

где $\psi = \partial_t \varphi$. Пусть функция $f_1 = f_1(t)$ интегрируема по Лебегу на отрезке $[0, T]$ и на этом же отрезке существует решение задачи (1.7). Доопределяя функцию $f_1 = f_1(t)$ нулем вне этого отрезка и полагая $f = f(t) = 0$, можно вычислить функции $\varphi_0 = \varphi_0(\omega)$, $\psi_0 = \psi_0(\omega)$ из соотношения (1.9) (например, выполнив обратное преобразование Фурье). Однако после подстановки x_0, y_0, $\varphi_0(\omega)$, $\psi_0(\omega)$ в выражение (2.5) интегралы по ω, вообще говоря, расходятся. Тем не менее сходятся интегралы в другом выражении, которое также постоянно (точнее, тождественно равно нулю) в силу уравнений Гамильтона

$$\Delta H = \frac{1}{2}(y(t), y(t)) + V_1(x(t)) - \frac{1}{2}(y_0, y_0) - V_1(x_0) + \alpha - \int_0^t (f_1(t_1),\ y(t_1))dt,\ \ t \in [0, T]$$

$$\alpha(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^t (y(t_1),\ K(t_1 - t_2)y(t_2))dt_2$$

Здесь использованы соотношения (1.6), (1.9).

Отметим, что соотношение $\Delta H = 0$ можно получить, умножив скалярно уравнение (1.7) на $y = \partial_t x$ и проинтегрировав от 0 до t. Приведенный выше более сложный вывод этого соотношения призван продемонстрировать его смысл как закона сохранения энергии в более широкой гамильтоновой системе.

Лемма 2. Пусть $f_1 = f_1(t)$ – интегрируемая по Лебегу вектор-функция на интервале $[0, T]$, $x = x(t)$ – решение задачи (1.4), (1.7) на том же интервале.

Тогда при $0 \leqslant t \leqslant T$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}(y(t), y(t)) + V_1(x(t)) + \alpha(t) \leqslant A_0 + \tau^2 + A_1^{1/2}\tau$$

$$A_0 = V_1(x_0) + \frac{1}{2}(y_0, y_0), \quad A_1 = A_0 - \inf V_1$$

$$\tau = \int_0^t |f_1(t)|\,dt_1$$

Доказательство. Из соотношения $\Delta H = 0$ следует неравенство

$$\frac{1}{2}(y(t), y(t)) + V_1(x(t)) + \alpha(t) \leqslant A_0 + Z(t) \tag{2.6}$$

$$Z(t) = \int_0^t |f_1(t_1)||y(t_1)|\,dt_1$$

В силу принятых ограничений на ядро справедливо неравенство $\alpha \geqslant 0$. Отсюда и из неравенства (2.6) следует оценка

$$\frac{1}{2}(\partial_\tau Z)^2 \leqslant A_1 + Z$$

Применяя лемму Гронуолла [12], получаем

$$Z \leqslant \tau^2 + A_1^{1/2}\tau$$

Теперь с помощью этого неравенства можно оценить правую часть выражения (2.6) и получить требуемое утверждение.

Имея априорную оценку решения, можно доказать глобальную теорему существования и единственности.

Теорема 2. Пусть $f_1 = f_1(t)$ – локально интегрируемая по Лебегу и локально ограниченная функция при $t \geqslant 0$. Тогда задача (1.5), (1.8) имеет единственное решение на полуоси $t \geqslant 0$.

Доказательство. Применяя теорему 1 к последовательности задач

$$\partial_t z(t) = \Phi(z(t)) + \int_{t_0}^{t} \Psi(t - t_1) z(t_1) dt_1 + \varkappa_1(t)$$

$$\varkappa_1(t) = \varkappa(t) + \int_0^{t_0} \Psi(t - t_1) z(t_1) dt_1$$

можно осуществлять локальное продолжение решения. Требуется установить, что такая процедура позволяет получить решение для всех времен.

Пусть решение построено для интервала $0 \leqslant t < T$. Из леммы 2 и условия (1.2) вытекает, что для некоторой положительной величины A на всем этом временном интервале справедливо неравенство $|z(t)| \leqslant A$.

Определим величины

$$b = \max_{|x| \leqslant A+1} |\nabla V(x)|, \quad b_1 = Ak + \sup_{0 \leqslant t \leqslant 2T} |f_1(t)|$$

$$b = b_0 + b_1 + (A + 1)(k + 1)$$

Из теоремы 1 следует, что для всех точек интервала $0 \leqslant t < T$ можно продолжить решение вперед на интервал с длиной $\Delta t = \min(T, b^{-1})$. Отсюда следует, что решение продолжается на всю полуось $t \geqslant 0$.

Кроме априорных оценок для решения уравнения (1.7), связанных с законом сохранения энергии для лагранжевой системы (1.1), можно вывести априорные интегральные оценки для производных по времени. Эти оценки нужны для анализа диссипативных эффектов в уравнении (1.8).

Лемма 3. Предположим, что $f_1 = f_1(t)$ – кусочно-непрерывная, интегрируемая по Лебегу и ограниченная вектор-функция на полуоси $t \geqslant 0$. Тогда для решения задачи (1.4), (1.7) $x = x(t)$ сходятся следующие интегралы:

$$\int_0^\infty |\partial_t x(t)|^2 dt < +\infty, \quad \int_0^\infty |\partial_t^2 x(t)|^2 dt < +\infty \tag{2.7}$$

Доказательство. Доопределим функцию $f_1 = f_1(t) : f_1(t) = 0$ при $t < 0$. Фиксируем некоторое положительное число T и введем обозначения

$$v_0 = \partial_t^2 x(0), \quad x_1 = x(T), \quad y_1 = \partial_t x(T), \quad v_1 = \partial_t^2 x(T)$$

Выберем некоторую неубывающую функцию $\mu = \mu(t)$ из класса $C^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющую дополнительным условиям

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

Определим вспомогательную функцию

$$u_T(t) = \begin{cases} (x_0 + y_0 t + v_0 t^2/2)\mu(t+1), & t < 0 \\ x(t), & 0 \leqslant t \leqslant T \\ (x_1 + y_1(t-T) + v_1(t-T)^2/2)\mu(T-t+1), & t > T \end{cases}$$

Очевидно, что эта функция принадлежит классу $C^1(\mathbb{R})$ и обращается в нуль вне интервала $[-1, T+1]$. Кроме того, производная функция $v_T = v_T(t) = \partial_t u_T(t)$ кусочно-дифференцируема.

Функция $u_T = u_T(t)$ удовлетворяет интегродифференциальному уравнению

$$\partial_t^2 u_T(t) + \nabla V_1(u_T(t)) + \int_{-1}^{t} K(t-t_1)\partial_t u_T(t_1)dt_1 = f_T(t) + f_1(t) \tag{2.8}$$

Выражение для кусочно-непрерывной функции $f_T = f_T(t)$ может быть вычислено из выражения для $u_T = u_T(t)$ и уравнений (1.7), (2.8). В частности, при $0 \leqslant t \leqslant T$ имеем

$$f_T(t) = \int_{-1}^{0} K(t-t_1)\partial_t u_T(t_1)dt_1 \tag{2.9}$$

По лемме 2 решение уравнения (1.7) $x = x(t)$ и производная по времени $\partial_t x = \partial_t x(t)$ ограничены при $t \geqslant 0$:

$$|x(t)| \leqslant C_0, \quad |\partial_t x(t)| \leqslant C_1 \tag{2.10}$$

Здесь и ниже C_n – положительные величины, не зависящие от параметра T. Используя соотношения (1.7), (2.10) получим оценку

$$|\partial_t^2 x(t)| \leqslant C_2 \tag{2.11}$$

Из (2.9)–(2.11) следует оценка

$$\int_{-1}^{T+1} |f_T(t)|dt < C_3 \tag{2.12}$$

Определим линейный оператор Γ, действующий из пространства $H^1(\mathbb{R})$ в пространство $H^{-1}(\mathbb{R})$ (определение пространств Харди $H^n(\mathbb{R})$ дано в [5]):

$$(\Gamma v)(t) = -\partial_t^2 v(t) - \nabla\nabla V_1(u_T(t))v(t) - \int_{-\infty}^{t} K(t-t_1)\partial_t v(t_1)dt_1$$

Из (2.8) следует, что функция $v_T = v_T(t)$ удовлетворяет уравнению

$$(\Gamma v_T)(t) = -\partial_t(f(t) + f_T(t)) \tag{2.13}$$

Из (2.10)–(2.12), а также интегрируемости функции $f(t)$ следует неравенство

$$\int_{-1}^{T+1} (\partial_t v_T(t), (f(t) + f_T(t)))dt < C_4 \tag{2.14}$$

Из (2.13), (2.14) получаем

$$C_3 > \int_{-\infty}^{+\infty} v_T(t)(\Gamma v_T)(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (\Omega^2 |v_{TF}(\Omega)|^2 - i\Omega(v_{TF}(\Omega), \ K_F(\Omega)v_{TF}(\Omega))d\Omega -$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} (v_T(t), \ \nabla\nabla V_1(u_T(t))v_T(t))dt \tag{2.15}$$

Справедливы неравенства

$$\| \nabla\nabla V_1(u_T(t)) \| < C_5, \quad \| K_F(\Omega) \| < C_6$$

при подстановке которых в (2.15) получается соотношение

$$C_4 > (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\Omega^2 - C_5 - C_6 |\Omega|) |v_{TF}(\Omega)|^2 \, d\Omega \tag{2.16}$$

Выберем некоторую положительную величину Ω_0 так, что при $|\Omega| \geqslant \Omega_0$

$$(\Omega^2 - C_5 - C_6 |\Omega|) > C_7 > 0$$

Тогда из (2.6) следует неравенство

$$2\pi C_4 > C_7 \int\limits_{|\Omega|>\Omega_0} |v_{TF}(\Omega)|^2 \, d\Omega - (C_5 + C_6 |\Omega_0|) \int\limits_{|\Omega|<\Omega_0} |v_{TF}(\Omega)|^2 \, d\Omega \tag{2.17}$$

Применим лемму 2 к уравнению (2.8). В качестве одного из следствий получаем неравенство

$$\int\limits_{-1}^{T+1} dt_1 \int\limits_{-1}^{T+1} dt_2 (v_T(t_1), \; K(t_1 - t_2) v_T(t_2)) \leqslant C_8$$

Отсюда при учете (1.17) получаем оценку

$$\int\limits_{|\Omega|<\Omega_0} |v_{TF}(\Omega)|^2 \, d\Omega < \frac{4\pi}{\delta} C_8, \quad \delta = \min_{|\Omega|\leqslant\Omega_0} (\rho(\Omega)) > 0$$

Совмещая эту оценку с (2.17), приходим к соотношению

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |v_{TF}(\Omega)|^2 \, d\Omega < C_9 \tag{2.18}$$

Обратимся опять к неравенству (2.17). С учетом (2.18) получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Omega^2 |v_{TF}(\Omega)|^2 \, d\Omega < C_{10} \tag{2.19}$$

Из (2.18), (2.19) выводим соответственно

$$\int\limits_0^T |\partial_t x(t)|^2 \, dt < \frac{1}{2\pi} C_9$$

$$\int\limits_0^T |\partial_t^2 x(t)|^2 \, dt < \frac{1}{2\pi} C_{10}$$

Поскольку правые части в этих неравенствах не зависят от параметра T, то сходимость интегралов (2.7) доказана.

3. Асимптотическое поведение решений при больших временах. Покажем, что уравнение (1.7) описывает эффекты, свойственные диссипативным системам, например, затухающие колебания. Эти эффекты имеют место, несмотря на доказанную ранее точную эквивалентность процессов (1.7) некоторым процессам в бесконечномерной гамильтоновой системе в отсутствие внешних сил. Таким образом, результаты настоящего раздела являются контрпримером к проблеме возврата в бесконечномерной гамильтоновой механике.

Теорема 3. Пусть $f_1 = f_1(t)$ – кусочно-непрерывная ограниченная функция, интегрируемая по Лебегу при $t \geqslant 0$. Предположим, что потенциал $V_1 = V_1(x)$ имеет конечное число критических точек. Тогда решение задачи (1.4), (1.7) $x = x(t)$ сходится к одной из этих критических точек потенциала.

Доказательство. По лемме 2 решение $x = x(t)$ и его производная ограничены при всех временах:

$$|x(t)| \leqslant A_0, \quad |\partial_t x(t)| \leqslant A_1$$

Перепишем уравнение (1.7) в эквивалентной форме

$$\partial_t^2 x(t) = -\nabla V_1(x(t)) + \varkappa_*(t) \tag{3.1}$$

$$\varkappa_*(t) = \varkappa_1(t) + \varkappa_2(t)$$

$$\varkappa_1(t) = -\int_0^t K(t-t_0)\partial_t x(t_0)dt_0$$

$$\varkappa_2(t) = f_1(t)$$

Функция $\varkappa_2(t)$ интегрируема в квадрате, поскольку она интегрируемая и ограниченная. Функция $\varkappa_1(t)$ также интегрируема в квадрате как свертка функций с аналогичным свойством.

Будем вести доказательство от противного.

Пусть существует такая положительная постоянная C_0, что можно найти бесконечную последовательность моментов времени t_k, таких, что:

а) $t_{k+1} > t_k + 1$;

б) $|\nabla V_1(x_k)| \geqslant C_0, \quad x_k = x(t_k)$.

Выберем достаточно малую положительную величину $\varepsilon < 1$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$C_0 - A_2 A_1 \varepsilon \geqslant C_1 > 0, \quad A_2 = \max_{|x| \leqslant A_0} \|\nabla\nabla V_1(x)\|$$

Тогда $|\nabla V_1(x(t))| \geqslant C_1$ при $t_k \leqslant t \leqslant t_k + \varepsilon$. Отсюда и из уравнения (3.1) получаем оценку

$$\int_{t_k}^{t_k+\varepsilon} |\partial_t^2 x(t)|^2 \, dt \geqslant \frac{1}{2} C_1^2 \varepsilon - \int_{t_k}^{t_k+\varepsilon} |\varkappa_*(t)|^2 \, dt$$

Поскольку сходится интеграл

$$\int_0^\infty |\varkappa_*(t)|^2 \, dt$$

то интеграл

$$\int_0^\infty |\partial_t^2 x(t)|^2 \, dt$$

расходится. Это в свою очередь противоречит результатам леммы 3.

Если условия теоремы 3 выполнены, то решение сходится к некоторой критической точке x_* потенциала $V_1(x)$. Пусть эта критическая точка невырожденная. Можно выполнить сдвиг на вектор x_*, поэтому без ограничения общности можно считать, что $x_* = 0$. При достаточно больших временах можно линеаризовать задачу (1.4), (1.7) (при необходимости выполнив сдвиг по времени). Тогда получается линейное уравнение

$$\partial_t^2 x(t) + Lx(t) + \int_0^t K(t-t_1)\partial_t x(t_1)dt_1 = f_1(t) \tag{3.2}$$

где $L = \nabla\nabla V_1(0)$. Это уравнение можно решать методом преобразования Фурье–Лапласа. После перехода к фурье-образам при учете условия (1.4) уравнение (3.2) преобразуем к виду

$$T(\Omega)x_F(\Omega) = f_{1F}(\Omega) + y_0 + i\Omega x_0$$

$$T(\Omega) = -\Omega^2 + L + i\Omega K_F(\Omega)$$

Матричная функция $T(\Omega)$ невырождена на всей действительной оси. В самом деле, $T(0) = L$. При $\Omega \neq 0$ в соответствии с неравенством (1.17) имеем

$$i\Omega^{-1}T(\Omega)^+ - i\Omega^{-1}T(\Omega) \geqslant \rho(\Omega)\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}$$

Таким образом, можно выписать решение при $t \geqslant 0$ в виде интеграла Фурье, понимаемого в смысле главного значения

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int \exp(i\Omega t)x_F(\Omega)d\Omega \tag{3.3}$$

$$x_F(\Omega) = T^{-1}(\Omega)(f_{1F}(\Omega) + y_0 + i\Omega x_0)$$

Интегрирование в (3.3) осуществляется вдоль действительной оси, так как вклад от полюсов в нижней комплексной полуплоскости равен нулю в силу принятых предположений.

Вообще говоря, выражение (3.3) мало что говорит о скорости сходимости решения к нулю. Однако при некоторых дополнительных предположениях могут быть получены достаточно сильные оценки. Так, пусть для некоторого натурального $n \geqslant 1$ сходятся интегралы

$$\int_0^\infty t^n \, \| K(t) \| \, dt < +\infty, \qquad \int_0^\infty t^n \, | f_1(t) | \, dt < +\infty$$

Тогда в выражении (3.3) при $t > 0$ можно провести интегрирование по частям вида

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{i}{t}\right)^n \int \exp(i\Omega t)\frac{d^n}{d\Omega^n}x_F(\Omega)d\Omega$$

и получить асимптотическую оценку

$$| x(t) | = O(t^{-n})$$

4. Заключение. Итак, системы типа многомерного нелинейного осциллятора с релаксацией вкладываются в бесконечномерные гамильтоновы системы. В то же время эти системы демонстрируют диссипативные эффекты, свойственные обычным механическим системам с трением. Представляется, что этот результат может служить мостом между гамильтоновой механикой и обычной механикой диссипативных систем, так как все локальные по времени диссипативные системы в реальности являются предельными случаями систем с релаксацией.

Принятое в настоящей работе предположение о конечности числа степеней свободы системы с наследственностью не принципиально. Результаты в целом распространяются и на бесконечномерные системы с наследственностью (например, на вязкоупругие сплошные среды), однако такие случаи требуют более сложного математического исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431 с.
2. *Динариев О.Ю., Мосолов А.Б.* Об условиях диссипативности в системе взаимодействующих осцилляторов. // Изв. вузов. Физика. 1988. № 1. С. 94–98.

3. *Динариев О.Ю.* Об условиях диссипативности в гамильтоновой механике. // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. № 1. С. 60–62.
4. *Динариев О.Ю.* Спектр флуктуаций в одной точно решаемой модели с диссипацией: новая модель фликкер-шума. // Изв. вузов. Физика. 1990. № 10. С. 13–18.
5. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986. 462 с.
6. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
7. *Дэй У.А.* Термодинамика простых сред с памятью. М.: Мир, 1974. 190 с.
8. *Динариев О.Ю.* О некоторых свойствах релаксационных ядер в системах с наследственностью. // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309. № 3. С. 615–618.
9. *Динариев О.Ю.* О скорости распространения сигнала в жидкости с релаксацией. // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 1. С. 59–64.
10. *Динариев О.Ю., Николаевский В.Н.* Кратное увеличение периода при распространении волн в упругих телах с диссипативной микроструктурой. // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 78–85.
11. *Динариев О.Ю., Николаевский В.Н.* Определяющие соотношения для вязкоупругой среды с микровращениями. // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 6. С. 1023–1030.
12. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.VI.1998