УДК 62–50

© 1999 г. С.В. Соколов, И.В. Щербань

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СТРУКТУРАМИ

Дается постановка задачи синтеза оптимального управления выбором структуры в нелинейных динамических системах со случайной структурой. Рассматривается один из возможных подходов к решению этой задачи, использующий метод теории оптимального управления системами с распределенными параметрами и позволяющий построить вектор плотностей распределений исследуемого процесса для всех состояний, обеспечивающий оптимум выбранного вероятностного функционала. Приводится пример, иллюстрирующий возможность практического использования предложенного подхода.

Известные классические результаты [1] позволяют решать задачи оптимального управления динамическими системами со случайной структурой только управлением самой системой (или ее конкретной структурой), но не выбором структуры системы.

Сформулируем задачу следующим образом. Рассматривается нелинейная динамическая система со случайной структурой, в общем случае [1] описываемая в l-м состоянии векторным уравнением вида

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}^{(l)}(\mathbf{Y}, t) + H^{(l)}(\mathbf{Y}, t)\mathbf{V}t, \quad \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0, \quad l = 1, ..., s \tag{1}$$

где l – номер состояния (структуры), $\mathbf{f}^{(l)}(\mathbf{Y}, t)$, $H^{(l)}(\mathbf{Y}, t)$ – нелинейные векторные и матричные функции соответствующей размерности $n^{(l)} \leqslant N$ и $m^{(l)} \times n^{(l)}$, $N = \max(n^{(l)}, ..., n^{(s)})$, $\mathbf{Y}(t)$ – вектор состояния размерности N в любой структуре, $\mathbf{V}_t$ – белый гауссовский вектор-шум размерности $m^{(l)}$.

Требуется найти такой закон перехода $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{Y}, t)$ ($l = 1, 2, ..., s$) из одной структуры в другую, который обеспечивал бы на заданном интервале времени $T = [t_0, t_k]$ оптимум некоторого функционала J_0, определенного на множестве вероятностей, в общем случае нелинейно зависящего от плотности распределения $\rho(\mathbf{Y}, t)$ вектора состояния $\mathbf{Y}$

$$J_0 = \iint\limits_{T\mathbf{Y}_*} \Phi[\rho(\mathbf{Y}, t)]d\mathbf{Y}dt$$

где $\mathbf{Y}_*$ – область определения аргумента $\mathbf{Y}$, в которой ищется оптимум, Φ – заданная нелинейная аналитическая функция.

Такая форма критерия J_0 позволяет охватить достаточно широкий класс критериев оптимальности, требуемых на практике:

максимума (минимума) вероятности существования вектора $\mathbf{Y}$ в области $\mathbf{Y}_*$ на заданном интервале времени T: $\Phi(\rho) = \pm\rho$;

минимума отклонения искомой плотности ρ от заданного значения g: $\Phi(\rho) = (\rho - g)^2$, $\Phi(\rho) = |\rho - g|$, $\Phi(\rho) = -\rho \ln (g/\rho)$ (критерий Кульбака) и т.д.;

максимума информации о векторе состояния $\mathbf{Y}$ (или его минимальной энтропии): $\Phi(\rho) = \rho \ln \rho$, $\Phi(\rho) = \rho(\partial \ln \rho/\partial \mathbf{Y})^2$ (критерий Фишера), и других.

С целью достижения оптимального значения функционала J_0 управление плотностью $\rho(\mathbf{Y}, t)$ предполагается обеспечить за счет выбора соответствующей структуры процесса $\mathbf{Y}$, который, в свою очередь, при заданных физико-технических характеристиках структур определяется видом закона смены последних. Таким образом, поставленная задача может быть также сформулирована как задача синтеза стохастического процесса с заданными характеристиками – в данном случае оптимальным законом смены структур исследуемого процесса. В качестве вектора, определяющего в последующем управление структурными переходами, наиболее целесообразно использовать вектор интенсивностей смены состояния [1]

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{Y}, t) = \| 0 \ \ \nu_{12} ... \nu_{1s} \ \ \nu_{21} \ \ 0 \ \ \nu_{23} ... \nu_{2s} \ \ \nu_{31} \ \ \nu_{32} \ \ 0 \ \ \nu_{34} ... \nu_{s(s-1)} \ \ 0 \|^T$$

где $\nu_{lr}(\mathbf{Y}, t)$ – интенсивность переходов из состояния l в состояние r, потребовав при его формировании, например, во избежание частой смены состояний, минимума его квадратичной формы на заданном интервале времени T для $Y \in Y_*$, т.е.

$$\min \iint\limits_{T\mathbf{Y}_*} \boldsymbol{\nu}^T(\mathbf{Y},t)\boldsymbol{\nu}(\mathbf{Y},t)d\mathbf{Y}dt$$

Так как вектор $\boldsymbol{\nu}$ содержит нулевые компоненты, то, по существу, в дальнейшем осуществляется поиск не самого вектора $\boldsymbol{\nu}$, а вектора $\boldsymbol{\nu}_0$, связанного с ним соотношением $\boldsymbol{\nu} = E_0\boldsymbol{\nu}_0$, где $\boldsymbol{\nu}_0$ – вектор, образованный из вектора $\boldsymbol{\nu}$ исключением нулевых компонент, E_0 – матрица, образованная из единичной добавлением нулевых строк для формирования соответствующих нулевых элементов вектора $\boldsymbol{\nu}$.

Тогда окончательно минимизируемый критерий J принимает вид

$$J = \iint\limits_{T\mathbf{Y}_*} \{\Phi[\rho(\mathbf{Y},t)] + \boldsymbol{\nu}_0^T(\mathbf{Y},t)\boldsymbol{\nu}_0(\mathbf{Y},t)\}d\mathbf{Y}dt \tag{2}$$

В свою очередь, плотность распределения процесса $\mathbf{Y}$, описываемого уравнениями (1), такова:

$$\rho(\mathbf{Y},t) = \sum_{l=1}^{s} \omega(\mathbf{Y},l,t) = \sum_{l=1}^{s} \omega^{(l)}(\mathbf{Y},t)$$

где $\omega^{(l)}(\mathbf{Y}, t)$ – плотность распределения расширенного вектора $\left\| \begin{matrix} \mathbf{Y} \\ l \end{matrix} \right\|$ (l – номер состояния).

Для приложений наиболее характерен непрерывный процесс $\mathbf{Y}$, когда восстановленные значения l-го состояния совпадают с конечными значениями процесса r-го состояния, т.е. когда финальные условия существования r-й (предыдущей) структуры являются начальными условиями для l-й (последующей) структуры. Для такого процесса (по предложенной ранее классификации [1] "процесса с мгновенным полным восстановлением") условная плотность вероятности восстановления реализаций является δ-функцией ([1], с. 64), что приводит к отсутствию точек разрыва при сопряжении уравнений плотностей существования процесса в соответствующих структурах. В этом случае функции $\omega^{(l)}(\mathbf{Y}, t)$ описываются следующей системой обобщенных уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК) [1]

$$\frac{\partial\omega^{(l)}(\mathbf{Y},t)}{\partial t} = L[\omega^{(l)}(\mathbf{Y},t)] - \sum_{r=1}^{s} \nu_{lr}(\mathbf{Y},t)\omega^{(l)}(\mathbf{Y},t) + \sum_{r=1}^{s} \nu_{rl}(\mathbf{Y},t)\omega^{(r)}(\mathbf{Y},t), \quad l = 1,...,s$$

где L – оператор ФПК. Вводя вектор $\boldsymbol{\nu}_0(\mathbf{Y}, t)$ и вектор $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{Y}, t) = \left\| \omega^{(1)}(\mathbf{Y},t) \ ... \ \omega^{(s)}(\mathbf{Y},t) \right\|^T$, имеем в общем виде

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}(\mathbf{Y},t)}{\partial t} = L[\boldsymbol{\omega}(\mathbf{Y},t)] - [\Omega[\boldsymbol{\omega}(\mathbf{Y},t)](E_s \otimes I_s) - \boldsymbol{\omega}^T(\mathbf{Y},t) \otimes E_s]E_0\nu_0(\mathbf{Y},t) \tag{3}$$

$$\Omega(\boldsymbol{\omega}) = \mathrm{diag}(\omega^{(1)}, ..., \omega^{(s)})$$

где E_0 – единичная $(s \times s)$-матрица, I_s – единичная строка размерности s, $\otimes$ – символ кронекеровского произведения.

Учитывая, что при введении вектора $\boldsymbol{\omega}$ выражение для плотности имеет вид $\rho(\mathbf{Y}, t) = I_s\boldsymbol{\omega}(\mathbf{Y}, t)$, функционал (2) представим так:

$$J = \iint_{T\mathbf{Y}_*} \{\Phi[I_s\boldsymbol{\omega}(\mathbf{Y},t)] + \boldsymbol{\nu}_0^T(\mathbf{Y},t)\boldsymbol{\nu}_0(\mathbf{Y},t)\}d\mathbf{Y}dt = \int_T W(t)dt \tag{4}$$

и перепишем для упрощения последующего решения уравнения (3) следующим образом:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} = L(\boldsymbol{\omega}) - [\Omega(\boldsymbol{\omega})(E_s \otimes I_s) - \boldsymbol{\omega}^T \otimes E_s]E_0\boldsymbol{\nu}_0 = L(\boldsymbol{\omega}) - F(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\nu}_0 \tag{5}$$

Тогда окончательно поставленную задачу можно сформулировать как задачу поиска вектора $\boldsymbol{\nu}_0$, обеспечивающего синтез такого вектора $\boldsymbol{\omega}$, описываемого уравнением (5), который доставлял бы минимум функционалу (4). Это позволяет решить задачу выбора оптимальной структуры путем определения максимальной компоненты вектора вероятностей состояний [1]

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{Y},t)d\mathbf{Y} \tag{6}$$

Далее используем метод динамического программирования, согласно которому при поиске оптимального управления в классе ограниченных кусочно-непрерывных функций со значениями из открытой области $\boldsymbol{\nu}_*$ задача сводится к решению функционального уравнения

$$\min_{\mathrm{v}\in\mathrm{v}_*}\left\{\frac{dV}{dt} + W\right\} = 0 \tag{7}$$

при конечном условии $V(t_k) = 0$ относительно оптимального функционала V, параметрически зависящего от времени $t \in T$ и определенного на множестве вектор-функций $\boldsymbol{\omega}$, удовлетворяющих уравнению (5).

Для линейных систем функционал V отыскивается в виде интегральной квадратичной формы [2]

$$V = \int_{\mathbf{Y}_*} \boldsymbol{\omega}^T(\mathbf{Y},t)a(\mathbf{Y},t)\boldsymbol{\omega}(\mathbf{Y},t)d\mathbf{Y}$$

(a – $(s \times s)$-матрица). Отсюда, учитывая уравнение (5) для $\boldsymbol{\omega}$, получаем исходное выражение для последующего определения оптимального $\boldsymbol{\nu}_0^*$

$$\frac{dV}{dt} + W = \int_{\mathbf{Y}_*}\left\{\boldsymbol{\omega}^T\frac{\partial a}{\partial t}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^T(a^T + a)(L(\boldsymbol{\omega}) - F(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\nu}_0) + \Phi(I_s\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\nu}_0^T\boldsymbol{\nu}_0\right\}d\mathbf{Y} \tag{8}$$

Анализ данного выражения показывает, что определение вектора $\boldsymbol{\nu}_0^*$ из решения функционального уравнения (7) сводится к классической задаче отыскания вектор-функции, реализующей минимум определенного интеграла (8). При этом искомая вектор-функция $\boldsymbol{\nu}_0^*(\mathbf{Y}, t)$ должна удовлетворять системе уравнений Эйлера, откуда следует, что

$$\boldsymbol{\nu}_0^* = \tfrac{1}{2}F^T(\boldsymbol{\omega})(a^T + a)\boldsymbol{\omega}$$

Подстановка найденного оптимального закона смены состояний $\boldsymbol{\nu}_0^*$ в (5) позволяет записать уравнение для оптимального в смысле (4) вектора $\boldsymbol{\omega}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = L(\boldsymbol{\omega}) - \frac{1}{2} F^T(\boldsymbol{\omega})(a^T + a)\boldsymbol{\omega} \qquad (9)$$

Интегрирование этого уравнения завершает решение задачи выбора оптимальной структуры путем определения максимальной компоненты вектора вероятностей состояний (6).

Уравнения, необходимые для определения матричной функции $a(Y, t)$, входящей в (9), вытекают из условия

$$(dV / dt + W)_{\boldsymbol{\nu}_0 = \boldsymbol{\nu}_0^*} = 0$$

после подстановки найденного ν_0^* в выражение (8)

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{1}{s}(a^T + a)L(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}_0^T - \frac{1}{s^2}\boldsymbol{\omega}_0\boldsymbol{\omega}_0^T \Phi(I_s \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{4}(a^T + a)F(\boldsymbol{\omega})F^T(\boldsymbol{\omega})(a^T + a) \qquad (10)$$

где $\boldsymbol{\omega}_0 = \|1/\omega^{(1)}, \ldots, 1/\omega^{(s)}\|^T$ – вспомогательный вектор, введенный для удобства преобразований и упрощения записи уравнения (10).

Совместное решение системы (9), (10) при краевых условиях

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{Y}, t_0) = \boldsymbol{\omega}_0, \quad V(Y, t_k) = 0$$

исчерпывает, по существу, теоретическое решение поставленной проблемы.

В случае формирования вектора $\boldsymbol{\nu}_0^*$ в предположении его независимости от $\mathbf{Y}$, из условия минимизации функционального уравнения (8) вытекает интегральная зависимость $\boldsymbol{\nu}_0^*$ от ω

$$\boldsymbol{\nu}_0^* = (2\Delta)^{-1} \int_{\mathbf{Y}_*} F^T(\boldsymbol{\omega})(a^T + a)\boldsymbol{\omega} d\mathbf{Y}, \quad \boldsymbol{\Delta} = \int_{\mathbf{Y}_*} d\mathbf{Y}$$

которая после подстановки в соотношения (5) и (8) приводит к образованию системы уже интегро-дифференциальных (в отличие от (9), (10)) уравнений с частными производными, поиск решения которых оказывается существенно сложнее, чем в первом случае.

Несмотря на то, что найденное теоретическое решение поставленной проблемы определяет принципиальную возможность оптимального выбора структуры процесса $\mathbf{Y}$, практическое решение краевой задачи непосредственно для сопряженной системы уравнений с частными производными (9), (10) представляется весьма затруднительным. Не останавливаясь на многочисленных возможных приближенных методах решения данной задачи, ориентированных на компромисс между необходимой точностью и объемом вычислительных затрат, в качестве одного из методов решения рассмотрим далее метод, использующий разложение функций $\boldsymbol{\omega}$, в ряды по некоторой системе ортонормированных функций $\boldsymbol{\varphi} = \|\varphi_1, \ldots, \varphi_N\|^T$ векторного аргумента

$$a(\mathbf{Y}, t) = B(t)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{Y}), \quad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{Y}, t) = A(t)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{Y})$$

$A(t)$ и $B(t)$ – обыкновенная и блочная матрицы коэффициентов разложения, определяемые в процессе решения. В этом случае задача сводится к двухточечной краевой задаче интегрирования матричного интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \int_{\mathbf{Y}} \left\{ L(A\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{\varphi}^T - \frac{1}{2} F((A\boldsymbol{\varphi})F^T(A\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{\varphi}^T B^T + B\boldsymbol{\varphi})(A\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{\varphi}^T) \right\} d\mathbf{Y}$$

Решение этой задачи оказывается гораздо проще и может быть осуществлено различными традиционными способами: пристрелки, инвариантного погружения и т.д. Особенностью практической реализации решения в данном случае является отсутствие жестких требований к его точности, так как при выборе структуры определяется лишь номер максимальной компоненты вектора

$$P(t) = A(t)\int_{\mathbf{Y}} \varphi(\mathbf{Y})d\mathbf{Y}$$

а не ее значение.

Для иллюстрации возможности использования подобного подхода рассмотрим следующий пример. Нелинейный стохастический процесс со случайной структурой описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{y}} = f^{(l)}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{v}_t, \quad l = 1, 2$$

$$f^{(1)}(\mathbf{y}, t) = -\mathbf{y}^2, \quad f^{(2)}(\mathbf{y}, t) = -\mathbf{y} + 0{,}01\mathbf{y}^3$$

$\mathbf{v}_t$ – нормированный белый гауссовский шум.

Требуется осуществить выбор структуры процесса $\mathbf{y}$, обеспечивающий максимум вероятности его существования в заданных пределах $\mathbf{y}_* = [y_{\min} = -0{,}8;\ y_{\max} = 0{,}9]$ на интервале времени $T = [0;\ 300]$ с, т.е. минимизирующий критерий имеет вид

$$J = \int_T \int_{\mathbf{y}_*} \{-\rho(\mathbf{y},t) + \boldsymbol{\nu}_0^T(\mathbf{y},t)\boldsymbol{\nu}_0(\mathbf{y},t)\}dydt, \quad \rho(\mathbf{y},t) = \omega^{(1)}(\mathbf{y},t) + \omega^{(2)}(\mathbf{y},t)$$

где

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = L(\boldsymbol{\omega}) - F(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\nu}_0, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{Vmatrix} \omega^{(1)} \\ \omega^{(2)} \end{Vmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}_0 = \begin{Vmatrix} \nu_{12} \\ \nu_{21} \end{Vmatrix}.$$

$$L(\boldsymbol{\omega}) = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}^2\omega^{(1)}) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 \omega^{(1)}}{\partial \mathbf{y}^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{y}}[(\mathbf{y} - 0{,}01\mathbf{y}^3)\omega^{(2)}] + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 \omega^{(2)}}{\partial \mathbf{y}^2} \end{Vmatrix}, \quad F(\boldsymbol{\omega}) = \begin{Vmatrix} \omega^{(1)} & -\omega^{(2)} \\ -\omega^{(1)} & \omega^{(2)} \end{Vmatrix}$$

Уравнения (9), (10) для оптимального вектора и сопряженной матричной функции в данном случае имеют вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = L(\boldsymbol{\omega}) - \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} \Omega_0 & -\Omega_0 \\ -\Omega_0 & \Omega_0 \end{Vmatrix}(a^T + a)\boldsymbol{\omega}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{1}{2}(a^T + a)L(\boldsymbol{\omega})\begin{Vmatrix} \dfrac{1}{\omega^{(1)}} & \dfrac{1}{\omega^{(2)}} \end{Vmatrix} + \frac{1}{4}\begin{Vmatrix} \dfrac{1}{\omega^{(1)}}\left(1 + \dfrac{\omega^{(2)}}{\omega^{(1)}}\right) & \dfrac{1}{\omega^{(1)}} + \dfrac{1}{\omega^{(2)}} \\ \dfrac{1}{\omega^{(1)}} + \dfrac{1}{\omega^{(2)}} & \dfrac{1}{\omega^{(2)}}\left(1 + \dfrac{\omega^{(1)}}{\omega^{(2)}}\right) \end{Vmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{4}(a^T + a)\begin{Vmatrix} \Omega_0 & -\Omega_0 \\ -\Omega_0 & \Omega_0 \end{Vmatrix}(a^T + a)$$

Решение данной задачи осуществлялось путем аппроксимации функций ω, a рядами Фурье на интервале [–5; 5] с точностью до четвертых членов разложений и интегрирования полученной системы уравнений для коэффициентов разложения с использованием приближенного метода инвариантного погружения [3] на временном интервале [0; 300] с. По завершении интегрирования и формирования приближенных значений функций $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, номера структур, выбранных по признаку максимальной вероятности состояния в текущий момент времени, оказались распределенными во времени следующим образом: на интервалах [0; 87] с и [115; 300] с – вторая структура; на интервале [87; 115] с – первая структура. Одновременно проинтегрирована система уравнений плотностей $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$ для традиционного случая неуправляемой смены состояний с единичной интенсивностью [1] и установлено, что в последнем случае значение минимизируемого критерия J оказалось в 1,47 раза выше, чем при оптимальном управлении выбором структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Казаков И.Е., Артемьев В.М.* Оптимизация динамических систем случайной структуры. М.: Наука, 1980. 381 с.
2. *Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К.* Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. М.: Машиностроение, 1986. 214 с.
3. *Первачев С.В., Перов А.И.* Адаптивная фильтрация сообщений. М.: Радио и связь, 1991. 160 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
23.IV.1998