УДК 62–50

© 1999 г. Н.Н. Субботина

АСИМПТОТИКИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ

В отличие от предыдущего исследования достаточных условий сходимости минимаксных решений сингулярно возмущенных уравнений Гамильтона–Якоби (Г–Я), типичным примером которых служат уравнения Беллмана–Айзекса (Б–А), условия сходимости сформулированы не в терминах вспомогательных конструкций [1], а в терминах гамильтониана, краевой функции, предположений об их непрерывности, липшицевости и т.п. Получено также уравнение асимптотики, т.е. получено уравнение Г–Я, минимаксным решением которого является предел решений уравнений Г–Я с малым параметром в знаменателе перед частью импульсных переменных [2, 3], при стремлении малого параметра к нулю.

Областью приложения исследований сингулярно возмущенных уравнений Г–Я–Б–А являются задачи теории оптимального управления и дифференциальные игры, динамика которых содержит "быстрые" и "медленные" движения, а также задачи с липшицевыми управлениями при условии, что соответствующие константы Липшица сколь угодно велики (см. [4–14], а также ссылки в этих работах). В таких задачах минимаксным (и/или вязкостным) [9–11] решением сингулярно возмущенного уравнения Б–А является функция цены, а вопросы существования и построения асимптотик сводятся к существованию предела функций цены и соответствующей этому пределу невозмущенной задачи при стремлении скорости "быстрых" движений или констант Липшица к бесконечности.

1. Постановка задачи. Достаточные условия сходимости. Рассматривается следующая задача Коши $\mathbf{P}^\varepsilon$ для сингулярно возмущенного уравнения Г–Я ($\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ – малый параметр):

$$\partial u^\varepsilon(t,x,y)/\partial t + H^\varepsilon(t,x,y,D_x u^\varepsilon, D_y u^\varepsilon) = 0 \tag{1.1}$$

$$(t,x,y) \in G^0 = (0,\theta)\times R^n \times R^l$$

$$u^\varepsilon(\theta,x,y) = \sigma(x), \quad x \in R^n, y \in R^l \tag{1.2}$$

Предполагается, что компоненты вектора $D_y u^\varepsilon$ – импульсных переменных – входят в выражение для гамильтониана H^ε с коэффициентами, содержащими малый параметр ε в знаменателе.

Относительно степени гладкости исходных данных задачи $\mathbf{P}^\varepsilon$ будем полагать, что

B.1. Функция $\sigma(x)$ непрерывна в R^n

B.2. Гамильтониан $H^\varepsilon(t, x, y, p, q)$ непрерывен в области определения $(G = [0, \theta] \times R^n \times R^l) \times R^n \times R^l$ и удовлетворяет оценке

$$\sup_{(t,x,y)\in G} \frac{|H^\varepsilon(t,x,y,0,0)|}{(1+\|x\|+\|y\|)} < \infty \tag{1.3}$$

B.3. Выполняется следующее условие Липшица по переменным p, q при любых $(t, x, y) \in G, p', p'' \in R^n, q', q'' \in R^l$:

$$| H^{\varepsilon}(t,x,y,p',q') - H^{\varepsilon}(t,x,y,p'',q'') | \leq \lambda^{\varepsilon}(x,y)(\| p' - p'' \| + 1/\varepsilon \| q' - q'' \|) \tag{1.4}$$

где $\lambda^{\varepsilon}(x, y) := (1 + \|x\| + \|y\|)\mu^{\varepsilon}$, μ^{ε} – постоянная.

B.4. Выполняется локальное условие Липшица по переменным x, y:

$$\frac{| H^{\varepsilon}(t,x',y',p,q) - H^{\varepsilon}(t,x'',y'',p,q) |}{(\| x' - x'' \| + \| y' - y'' \|)((1 + \| p \|) + 1/\varepsilon(1 + \| q \|))} < L^{\varepsilon} \tag{1.5}$$

при $t \in [0,\theta]$, $p \in R^n$, $q \in R^l$, $x',x'' \in B_x$, $x' \neq x''$, $y',y'' \in B_y$, $y' \neq y''$, где $B_x \in R^n$, $B_y \in R^l$ – произвольные ограниченные области, $L^{\varepsilon} = L^{\varepsilon}(B_x, B_y) = \mathrm{const} \in (0, \infty)$.

Известно [8–11], что задача $\mathbf{P}^{\varepsilon}$ (1.1), (1.2), как правило, не обладает классическим решением, однако условия B.1–B.4 гарантируют при каждом $\varepsilon > 0$ существование и единственность обобщенного минимаксного (и/или вязкостного) решения $u^{\varepsilon}(t, x, y)$ [9–11].

Напомним одно из эквивалентных определений минимаксного решения [9, 11], которое будет использоваться в дальнейших построениях.

Пусть S^{ε} – некоторое непустое множество, M^{ε} – многозначное отображение

$$G \times S^{\varepsilon} \ni (t,x,y,s') \mapsto M^{\varepsilon}(t,x,y,s') \subset R^n \times R^l \times R \tag{1.6}$$

Пару $(S^{\varepsilon}, M^{\varepsilon})$ будем называть характеристическим ε-комплексом уравнения (1.1) (или для краткости комплексом), если выполнены указанные ниже требования.

1°. Для любых $(t, x, y) \in G$ и $s' \in S^{\varepsilon}$ множество $M^{\varepsilon}(t, x, y, s') \subset R^n \times R^l \times R$ непусто, выпукло и замкнуто.

Для любых $(t,x,y,s') \in G \times S^{\varepsilon}$ и $(f,g,r) \in M^{\varepsilon}(t,x,y,s')$ справедливы оценки

$$\| f \| \leq \lambda^{\varepsilon}(x,y), \quad \| g \| \leq \lambda^{\varepsilon}(x,y)$$

$$| r | \leq m^{\varepsilon}(t,s')(1 + \| x \| + \| y \|)$$

причем величина $\lambda^{\varepsilon}(x, y)$ определена в условии B.3. Для любого $s' \in S^{\varepsilon}$ функция $t \mapsto m^{\varepsilon}(t,s')$ суммируема на $[0, \theta]$, а многозначное отображение $(t,x,y) \mapsto M^{\varepsilon}(t,x,y,s')$ полунепрерывно сверху.

2°. Для любых $(t, x, y) \in G$ и $p \in R^n$, $q \in R^l$ справедливы равенства

$$\text{а) } \max_{s' \in S^{\varepsilon}} \min \{ \langle f, p \rangle + (1/\varepsilon)\langle g, q \rangle - r : (f,g,r) \in M^{\varepsilon}(t,x,y,s') \} =$$

$$= H^{\varepsilon}(t,x,y,p,q)$$

$$\text{б) } \min_{s' \in S^{\varepsilon}} \max \{ \langle f, p \rangle + (1/\varepsilon)\langle g, q \rangle] - r : (f,g,r) \in M^{\varepsilon}(t,x,y,s') \} =$$

$$= H^{\varepsilon}(t,x,y,p,q)$$

Множество всех комплексов $(S^{\varepsilon}, M^{\varepsilon})$ обозначим символом $\mathbf{C}(H^{\varepsilon})$. Заметим, что указанным условиям удовлетворяет, например, пара $(S^{\varepsilon}, M^{\varepsilon})$, где $S^{\varepsilon} = R^n \times R^l$, $s' = (s_1, s_2) \in S^{\varepsilon}$ и

$$M^{\varepsilon}(t,x,y,s_1,s_2) = \{ (f,g,r) \in R^n \times R^l \times R : \ \| f \| \leq \lambda^{\varepsilon}(x,y),$$

$$\| g \| \leq \lambda^{\varepsilon}(x,y), \ r = \langle f, s_1 \rangle + (1/\varepsilon)\langle g, s_2 \rangle - H^{\varepsilon}(t,x,y,s_1,s_2) \}$$

Здесь $\lambda^{\varepsilon}(x, y) = (1 + \|x\| + \|y\|)\mu^{\varepsilon}$ – величина из условия Липшица B.3, $(t, x, y) \in G$, $s_1 \in R^n$, $s_2 \in R^l$.

Пару $(S^{\varepsilon}, M^{\varepsilon})$ будем называть верхним (нижним) характеристическим ε-комплексом уравнения (1.1), если выполнены условия 1° и 2°а (соответственно 1° и 2°б). Совокупность верхних (нижних) характеристических ε-комплексов обозначим $C^{\uparrow}(H^{\varepsilon})$ (соответственно $C^{\downarrow}(H^{\varepsilon})$).

Выберем произвольно комплекс $(S^{\varepsilon}, M^{\varepsilon}) \in C(H^{\varepsilon})$ и $s' \in S^{\varepsilon}$. Символом $\varepsilon - \mathrm{Sol}(t_0, x_0, y_0, z_0, s')$ обозначим множество абсолютно непрерывных функций $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot)) : [0, \theta] \mapsto R^n \times R^l \times R$, удовлетворяющих условию $(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0)$ и дифференциальному включению

$$(\dot{x}(t), \varepsilon\dot{y}(t), \dot{z}(t)) \in M^{\varepsilon}(t, x(t), y(t), s') \tag{1.7}$$

Определение 1. Верхним (нижним) решением уравнения Г–Я (1.1) называется полунепрерывная снизу (сверху) функция $G \ni (t,x,y) \mapsto u^{\varepsilon}(t,x,y) \in R$, удовлетворяющая следующему условию: для любых $(t_0, x_0, y_0, z_0) \in \mathrm{epi}\, u^{\varepsilon}$ $((t_0, x_0, y_0, z_0) \in \mathrm{hypo}\, u^{\varepsilon})$, $s' \in S^{\varepsilon}$ и $\tau \in [t_0, \theta]$ существует траектория $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot)) \in \varepsilon - \mathrm{Sol}(t_0, x_0, y_0, z_0, s')$, такая, что $(\tau, x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \in \mathrm{epi}\, u^{\varepsilon}$ $((\tau, x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \in \mathrm{hypo}\, u^{\varepsilon})$.

Здесь $(S^{\varepsilon}, M^{\varepsilon}) \in C^{\uparrow}(H^{\varepsilon})$ $((S^{\varepsilon}, M^{\varepsilon}) \in C^{\downarrow}(H^{\varepsilon}))$, $\varepsilon - \mathrm{Sol}(t_0, x_0, y_0, z_0, s')$ – множество траекторий дифференциального включения (1.7), удовлетворяющих условию $(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0)$.

Символами epi u^{ε} и hypo u^{ε} обозначаются соответственно множества

$$\{(t,x,y,z) : (t,x,y) \in G, z \geqslant u^{\varepsilon}(t,x,y)\}$$

$$\{(t,x,y,z) : (t,x,y) \in G, z \leqslant u^{\varepsilon}(t,x,y)\}$$

– надграфик и подграфик функции u^{ε}. Определение верхнего (нижнего) решения не зависит от выбора комплекса $(S^{\varepsilon}, M^{\varepsilon}) \in C^{\uparrow}(H^{\varepsilon})$ (соответственно $(S^{\varepsilon}, M^{\varepsilon}) \in C^{\downarrow}(H^{\varepsilon})$).

Определение 2. Минимаксным решением уравнения (1.1) называется непрерывная функция $G \ni (t,x,y) \mapsto u^{\varepsilon}(t,x,y) \in R$, которая одновременно является верхним и нижним решением.

Предположим далее, что

B.5. Гамильтониан $H^{\varepsilon}(t, x, y, p, 0)$ и ограничения B.1–B.4, а также вводимые ниже ограничения A.1, A.2 непрерывно зависят от параметра ε.

Следствием этого предположения является непрерывная зависимость от параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ минимаксных решений $u^{\varepsilon}(t, x, y)$ задачи $\mathbf{P}^{\varepsilon}$.

Для того чтобы обеспечить существование предела $u^{\varepsilon}(t, x, y)$ при $\varepsilon \downarrow 0$, потребуем выполнения следующих структурных условий.

A.1. Пусть существуют непрерывно зависящие от параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ характеристические комплексы $(S^{\varepsilon}_{\pm}, M^{\varepsilon}_{+}) \in C^{\uparrow}(H^{\varepsilon})$, $(S^{\varepsilon}_{-}, M^{\varepsilon}_{-}) \in C^{\downarrow}(H^{\varepsilon})$ и соответствующие им множества притяжения $Y^{\varepsilon}_{\pm} = Y^{\varepsilon}_{\pm}(t, x, s^{\varepsilon}_{\pm}) \subset R^l$, обладающие следующими свойствами:

а) множества $S^{\varepsilon}_{\pm}$, не зависят от параметра ε, и для любых $s_{\pm} \in S_{\pm}$ многозначные отображения $(t,x,y) \mapsto M^{\varepsilon}_{\pm}(t,x,y,s_{\pm})$ локально-липшицевы в метрике Хаусдорфа, а константы Липшица L^{ε} удовлетворяют условию B.4;

б) для любых $(t,x) \in [0,\theta] \times R^n, s_{\pm} \in S_{\pm}$ множества $Y^{\varepsilon}_{\pm}(t,x,s_{\pm})$ замкнуты и ограничены, причем

$$\forall y \in Y^{\varepsilon}_{\pm}(t,x,s_{\pm}) : \ \|y\| \leqslant \chi^{\varepsilon}(1 + \|x\|)$$

$$\chi^{\varepsilon} = \mathrm{const}, \ \chi^{\varepsilon} \in (0, \mu^{\varepsilon}]; \tag{1.8}$$

в) для любых $(t',x')\in[0,\theta]\times R^n$, $(t'',x'')\in[0,\theta]\times R^n$, $s_\pm\in S_\pm$ выполняются условия Липшица

$$\operatorname{dist}(Y^\varepsilon_\pm(t',x',s_\pm),\ Y^\varepsilon_\pm(t'',x'',s_\pm))\leqslant \nu^\varepsilon(|t'-t''|+\|x'-x''\|) \tag{1.9}$$

$$\nu^\varepsilon=\text{const},\ \ \nu^\varepsilon\in(0,L^\varepsilon]$$

(dist(Y^1, Y^2) – хаусдорфово расстояние между множествами Y^1 и Y^2 в конечномерном пространстве);

г) для любых компактов $D\subset[0,\theta]\times R^n$ и $D_0\subset R^l$:

$$D_0\supset\bigcup_{(t_0,x_0)\in D,s_+\in S_+} Y^\varepsilon_+(t_0,x_0,s_+)$$

$$\left(D_0\supset\bigcup_{(t_0,x_0)\in D,s_-\in S_-} Y^\varepsilon_-(t_0,x_0,s_-)\right)$$

существует $\delta(\varepsilon)>0$, такое, что $\delta(\varepsilon)\downarrow 0$ при $\varepsilon\downarrow 0$, и при любых $(t_0, x_0, y_0)\in D\times D_0$, $s'=s_+\in S_+$, $(s'=s_-\in S_-)$, $(x^\varepsilon(\cdot), y^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot))\in\varepsilon-\mathrm{Sol}(t_0, x_0, y_0, z_0, s')$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}&dist(y^\varepsilon(t),Y^\varepsilon(t,x^\varepsilon(t),s'))\leqslant \operatorname{diam}D_0\ \text{ при } t\geqslant t_0\\ &y^\varepsilon(t)\in Y^\varepsilon(t,x^\varepsilon(t),s'))\ \text{ при }\ t\in[t_0+\delta(\varepsilon),\theta]\end{aligned} \tag{1.10}$$

где $Y^\varepsilon=Y^\varepsilon_+$, $(Y^\varepsilon=Y^\varepsilon_-)$.

А.2. Для величин

$$\begin{aligned}&H^\varepsilon_\pm(t,x,s)=\max_{s_\pm\in S_\pm}\min\{\langle f,s\rangle-r:\\ &(f,r)\in\operatorname{co}\operatorname{pr}_{x,z}M^\varepsilon_\pm(t,x,Y^\varepsilon_\pm(t,x,s_\pm),s_\pm)\}\end{aligned} \tag{1.11}$$

где $\mathrm{pr}_{x,z}M$ – проекция множества M из пространства переменных (x, y, z) на пространство переменных (x, z), а co Q – выпуклая оболочка множества Q, при любых $(t, x, s)\in[0,\theta]\times R^n\times R^n$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_*]$ справедливо неравенство

$$|H^\varepsilon_+(t,x,s)-H^\varepsilon_-(t,x,s)|\leqslant\alpha(\varepsilon) \tag{1.12}$$

где $\alpha(\varepsilon)\downarrow 0$ при $\varepsilon\downarrow 0$.
Предел

$$H(t,x,s)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}H^\varepsilon_+(t,x,s)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}H^\varepsilon_-(t,x,s) \tag{1.13}$$

будем рассматривать в качестве гамильтониана в следующей невозмущенной задаче Коши **P**:

$$\begin{aligned}&\partial u(t,x)/\partial t+H(t,x,D_xu)=0,\ \ (t,x)\in(0,\theta)\times R^n\\ &u(\theta,x)=\sigma(x),\ \ x\in R^n\end{aligned} \tag{1.14}$$

Основным результатом данной работы является следующее утверждение

Теорема 1. Пусть в задачах Коши $\mathbf{P}^\varepsilon$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_*]$ для сингулярно возмущенного уравнения Г–Я (1.1) выполнены условия А.1, А.2, В.1–В.5. Тогда минимаксные решения этих задач $u^\varepsilon(t,x,y)$ сходятся при $\varepsilon\downarrow 0$, $(t,x,y)\in G$ к минимаксному решению

$u(t, x)$ невозмущенной задачи $\mathbf{P}$ равномерно на любых компактах $D \subset [0, \theta] \times R^n$, $D_0 \subset R^l$.

Заметим, что условие А.1 не очень удобно для проверки. Далее предлагается более удобное условие

А.1* Пусть при любых $(t, x, y, p, q) \in G \times R^n \times R^l$

а) справедливо представление

$$H^\varepsilon(t,x,y,p,q) = H^\varepsilon(t,x,y,p,0) + (1/\varepsilon)h^\varepsilon(t,x,y,q)$$

$$\forall\lambda \geqslant 0:\ h^\varepsilon(t,x,y,\lambda q) = \lambda h^\varepsilon(t,x,y,q)$$

$$h^\varepsilon(t,x,y,q) = \langle q, k^\varepsilon(t,x,y)\rangle + \eta^\varepsilon(t,x,q)$$

где, согласно В.3,

$$|\eta^\varepsilon(t,x,q)| \leqslant \tfrac{1}{2}\mu^\varepsilon(1+\|x\|)\|q\|$$

$$\|k^\varepsilon(t,x,y)\| \leqslant \tfrac{1}{2}\mu^\varepsilon(1+\|x\|+\|y\|)$$

($\mu^\varepsilon > 0$ – постоянная из условия В.3);

б) введем в рассмотрение множества

$$F_+^\varepsilon(t,x,q) = \{g \in R^l : \|g\| \leqslant \tfrac{1}{2}\mu^\varepsilon(1+\|x\|), \langle q,g\rangle \geqslant \eta^\varepsilon(t,x,q)\}$$

$$F_-^\varepsilon(t,x,q) = \{g \in R^l : \|g\| \leqslant \tfrac{1}{2}\mu^\varepsilon(1+\|x\|), \langle q,g\rangle \leqslant \eta^\varepsilon(t,x,q)\}$$

$$Y_\pm^\varepsilon(t,x,q) \subset \{\forall y^0 :\ -k^\varepsilon(t,x,y^0) \in F_\pm^\varepsilon(t,x,q)\}$$

и пусть для любых $(t, x) \in [0, \theta] \times R^n$, $s_\pm \in S_\pm$ множества $Y_\pm^\varepsilon(t,x,s_\pm)$ – замкнуты и ограничены, причем

$$\forall y \in Y_\pm^\varepsilon(t,x,s_\pm):\ \|y\| \leqslant \chi^\varepsilon(1+\|x\|)$$

$$\chi^\varepsilon = \text{const},\quad \chi^\varepsilon \in (0,\mu^\varepsilon]$$

в) для любых $(t',x') \in [0,\theta]\times R^n, (t'',x'') \in [0,\theta]\times R^n$, $s_\pm \in S_\pm$ выполняются условия Липшица

$$\operatorname{dist}(Y_\pm^\varepsilon(t',x',s_\pm),\ Y_\pm^\varepsilon(t'',x'',s_\pm)) \leqslant \nu^\varepsilon(|t'-t''| + \|x'-x''\|)$$

$$\nu^\varepsilon = \text{const},\quad \nu^\varepsilon \in (0, L^\varepsilon]$$

г) предполагаем, что для любого компакта $D \subset [0, \theta] \times R^n$ существует непрерывное отображение $D \ni (t, x) \to K^\varepsilon(t, x) \geqslant K^\varepsilon(D) > 0$, такое, что

$$\forall y \notin Y_\pm^\varepsilon(t,x,q)\ \exists y^* \in Y_\pm^\varepsilon(t,x,q):$$

$$\langle (y-y^*), (k^\varepsilon(t,x,y) - k^\varepsilon(t,x,y^*))\rangle \leqslant -K^\varepsilon(t,x)\|y-y^*\|^2$$

$$\max_{g \in F_\pm^\varepsilon(t,x,q)} \langle (y-y^*), (k^\varepsilon(t,x,y^*) + g)\rangle = -h^\varepsilon(t,x,y^*,(y^*-y)) = 0$$

При замене условия А.1. на А.1* справедливость утверждения теоремы 1 сохраняется, а именно справедлива

Теорема 2. При выполнении предположений А.1*, А.2, В.1–В.5 минимаксные решения $u^\varepsilon(t, x, y)$ задачи $\mathbf{P}^\varepsilon$ сходятся при $\varepsilon \downarrow 0$ к минимаксному решению $u(t, x)$ задачи $\mathbf{P}$ при всех $(t, x, y) \in G$ локально равномерно.

2. Доказательство теоремы 1. Покажем, что условия А.1 и А.2 аналогичны условиям 3 и 4 из работы [1] и обеспечивают сходимость $u^\varepsilon(t, x, y)$ и $u(t, x)$. Для наглядности все дальнейшие рассуждения проводятся для верхних характеристических комплексов и соответствующих множеств притяжения, фигурирующих в условии А.1. Аналогичные конструкции и утверждения для нижних характеристических комплексов получаются с помощью формальной замены нижнего индекса плюс на минус.

Пусть $(t_0, x_0, y_0) \in D \times D_0$, $z_0 \in R^1$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ и согласно А.1, $s_+ \in S_+$, $Y_+^\varepsilon(t, x, s_+)$ – множества притяжения относительно ε – характеристического комплекса (S_+, M_+^ε). И пусть $(x^\varepsilon(\cdot), y^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot)) \in \varepsilon - \mathrm{Sol}(t_0, x_0, y_0, z_0, s_+)$, $s_+ \in S_+$, т.е.

$$(\dot{x}^\varepsilon(t), \varepsilon\dot{y}^\varepsilon(t), \dot{z}^\varepsilon(t)) \in M_+^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t), s_+) \tag{2.1}$$

$$(x^\varepsilon(t_0), y^\varepsilon(t_0), z^\varepsilon(t_0)) = (x_0, y_0, z_0)$$

В дальнейшем понадобится следующий факт теории дифференциальных включений (см. [12]).

Пусть $(t, x, z) \mapsto F_i(t, x, z) \subset R^n \times R : [t_0, \theta] \times R^n \times R \mapsto 2^{R^n \times R}$ $(i = 1, 2)$ – два многозначных отображения с выпуклыми, компактными, непустыми значениями, полунепрерывные сверху по включению. Пусть $x_0 \in R^n, z_0 \in R$. Рассмотрим дифференциальные включения

$$(\dot{x}_i(t),\ \dot{z}_i(t)) \in F_i(t, x_i(t), z_i(t)), \quad t \in [t_0, \theta] \tag{2.2}$$

$$(x_i(t_0),\ z_i(t_0)) = (x_0, z_0), \quad i = 1, 2$$

Множество решений $(x_i(\cdot), z_i(\cdot))$ i-го дифференциального включения (2.2) обозначим $\mathrm{Sol}_i(t_0, x_0, z_0)$. Справедливо (см. [12]) следующее

Утверждение 1. Для любого решения $(x_1(\cdot), z_1(\cdot)) \in \mathrm{Sol}_1(t_0, x_0, z_0)$ существует такое решение $(x_2(\cdot), z_2(\cdot)) \in \mathrm{Sol}_2(t_0, x_0, z_0)$, что при всех $t \in [t_0, \theta]$ справедливы оценки

$$\| w_1(t) - w_2(t) \| \leqslant \int_{t_0}^{t} \mathrm{dist}(F_1(\tau, x_1(\tau), z_1(\tau)) \tag{2.3}$$

$$F_2(\tau, x_2(\tau), z_2(\tau))d\tau, \quad w = x, z$$

Итак, зафиксируем некоторое решение $(x^\varepsilon(\cdot), y^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot)) \in \varepsilon - \mathrm{Sol}\,(t_0, x_0, y_0, z_0, s_+)$, $s_+ \in S_+$ и по функции $y^\varepsilon(\cdot)$: $[t_0, \theta] \mapsto D_0$ построим многозначное отображение

$$(t, x) \mapsto Y_0^\varepsilon(t, x, s_+) \subset Y_+^\varepsilon(t, x, s_+) \tag{2.4}$$

$$Y_0^\varepsilon(t, x, s_+) = \{y_0 \in Y_+^\varepsilon(t, x, s_+) : \mathrm{dist}(y^\varepsilon(t), Y_+^\varepsilon(t, x, s_+)) = \| y^\varepsilon(t) - y_0 \|\}$$

Можно показать, что при любом s_+ отображение $(t, x) \mapsto Y_0^\varepsilon(t, x, s_+)$ компактнозначно и полунепрерывно сверху по включению. А значит, этими же свойствами будет обладать и многозначное отображение вида

$$(t, x) \mapsto \mathrm{co}\,\mathrm{pr}_{x,z}\, M_+^\varepsilon(t, x, Y_0^\varepsilon(t, x, s_+), s_+) \tag{2.5}$$

Рассмотрим теперь порождаемое (2.5) дифференциальное включение

$$(\dot{x}_0^\varepsilon(t), \dot{z}_0^\varepsilon(t)) \in \mathrm{co}\,\mathrm{pr}_{x,z}\, M_+^\varepsilon(t, x_0^\varepsilon(t), Y_0^\varepsilon(t, x_0^\varepsilon(t), s_+), s_+) \tag{2.6}$$

$$x_0^\varepsilon(t_0) = x_0, \quad z_0^\varepsilon(t_0) = z_0$$

Согласно теории дифференциальных включений [12] решение (2.6) существует на $[t_0, \theta]$. Пусть $\mathrm{Sol}_0^\varepsilon(t_0, x_0, z_0, s_+)$ – множество всех таких решений, а $(x_0^\varepsilon(\cdot), z_0^\varepsilon(\cdot))$, $\mathrm{Sol}^\varepsilon(t_0, x_0, z_0, s_+)$ – множество всех решений $(x_\varepsilon(\cdot), z_\varepsilon(\cdot))$ дифференциального включения

$$(\dot{x}_\varepsilon(t), \dot{z}_\varepsilon(t)) \in \mathrm{co}\,\mathrm{pr}_{x,z}\, M_+^\varepsilon(t, x_\varepsilon(t), Y_+^\varepsilon(t, x_\varepsilon(t), s_+), s_+)$$

$$x_\varepsilon(t_0) = x_0, \quad z_\varepsilon(t_0) = z_0 \tag{2.7}$$

Очевидно, что справедливо соотношение

$$\mathrm{Sol}_0^\varepsilon(t_0, x_0, z_0, s_+) \subset \mathrm{Sol}^\varepsilon(t_0, x_0, z_0, s_+) \tag{2.8}$$

Для выбранной траектории $(x^\varepsilon(\cdot), y^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot)) \in \varepsilon - \mathrm{Sol}\,(t_0, x_0, y_0, z_0, s_+)$ оценим расстояние между $(x^\varepsilon(t), z^\varepsilon(t))$ и $(x_\varepsilon(t), z_\varepsilon(t))$ – точкой на траектории $(x_\varepsilon(\cdot), z_\varepsilon(\cdot)) \in \mathrm{Sol}^\varepsilon\,(t_0, x_0, z_0, s_+)$, ближайшей к $(x^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot))$. Здесь $t \in [t_0, \theta]$.

По построению это расстояние не превосходит расстояния между $(x^\varepsilon(t), z^\varepsilon(t))$ и $(x_0^\varepsilon(t), z_0^\varepsilon(t))$ – точкой на траектории $(x_0^\varepsilon(\cdot), z_0^\varepsilon(\cdot)) \in \mathrm{Sol}_0^\varepsilon(t_0, x_0, z_0, s_+)$, ближайшей к $(x^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot))$.

Используя утверждение 1, получаем оценку:

$$\| x^\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t) \| \leqslant \| x^\varepsilon(t) - x_0^\varepsilon(t) \| \leqslant \int_{t_0}^{t} \| \dot{x}^\varepsilon(\tau) - \dot{x}_0^\varepsilon(\tau) \| \, d\tau \leqslant \int_{t_0}^{t} \mathrm{dist}\,(\mathrm{pr}_x\, M_+^\varepsilon(\tau, x^\varepsilon(\tau), y^\varepsilon(\tau), s_+)$$

$$\mathrm{pr}_x\, M_+^\varepsilon(\tau, x_0^\varepsilon(\tau), Y_0^\varepsilon(\tau, x_0^\varepsilon(\tau), s_+), s_+))d\tau \leqslant \int_{t_0}^{t} \mathrm{dist}\,(\mathrm{pr}_x\, M_+^\varepsilon(\tau, x^\varepsilon(\tau), y^\varepsilon(\tau), s_+)$$

$$\mathrm{pr}_x\, M_+^\varepsilon(\tau, x_0^\varepsilon(\tau), y_0^\varepsilon(\tau), s_+))d\tau \tag{2.9}$$

$$\| z^\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t) \| \leqslant \| z^\varepsilon(t) - z_0^\varepsilon(t) \| \leqslant \int_{t_0}^{t} \| \dot{z}^\varepsilon(\tau) - \dot{z}_0^\varepsilon(\tau) \| \, d\tau \leqslant \int_{t_0}^{t} \mathrm{dist}\,(\mathrm{pr}_z\, M_+^\varepsilon(\tau, x^\varepsilon(\tau), y^\varepsilon(\tau), s_+)$$

$$\mathrm{pr}_z\, M_+^\varepsilon(\tau, x_0^\varepsilon(\tau), y_0^\varepsilon(\tau), s_+))d\tau \tag{2.10}$$

где $y_0^\varepsilon(\cdot) : [t_0, \theta] \mapsto D_0 : t \mapsto y_0^\varepsilon(t) \in Y_0^\varepsilon(t, x_0^\varepsilon(t), s_+)$ – некоторая измеримая функция, причем согласно (2.4)

$$\| y^\varepsilon(t) - y_0^\varepsilon(t) \| = \mathrm{dist}\,(y^\varepsilon(t), Y_+^\varepsilon(t, x_0^\varepsilon(t), s_+))$$

Учитывая условия А.1а, А.1в и свойства операции dist, продолжим оценку (2.9):

$$\| x^\varepsilon(t) - x_0^\varepsilon(t) \| \leqslant \int_{t_0}^{t} L^\varepsilon \{ \| x^\varepsilon(\tau) - x_0^\varepsilon(\tau) \| + \| y^\varepsilon(\tau) - y_0^\varepsilon(\tau) \| \} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} L^\varepsilon \{ \| x^\varepsilon(\tau) - x_0^\varepsilon(\tau) \| + \mathrm{dist}\,(y^\varepsilon(\tau), Y_+^\varepsilon(\tau, x^\varepsilon(\tau), s_+)) +$$

$$+ \mathrm{dist}\,(Y_+^\varepsilon(\tau, x^\varepsilon(\tau), s_+), Y_+^\varepsilon(\tau, x_0^\varepsilon(\tau), s_+)\} d\tau \leqslant \int_{t_0}^{t} L^\varepsilon \{ (1 + \nu)$$

$$\| x^\varepsilon(\tau) - x_0^\varepsilon(\tau) \| + \mathrm{dist}\,(y^\varepsilon(\tau), Y_+^\varepsilon(\tau, x^\varepsilon(\tau), s_+)) \} d\tau \tag{2.11}$$

Согласно условию А.1г для быстрой переменной $y^\varepsilon(\cdot)$ выбранного решения $(x^\varepsilon(\cdot), y^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot)) \in \varepsilon - \mathrm{Sol}\,(t_0, x_0, y_0, z_0, s_+)$ справедливы соотношения (1.10), а именно

$$\mathrm{dist}\,(y^\varepsilon(t), Y_+^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), s_+)) \leqslant \mathrm{diam}\, D_0 = d_0 \text{ при } t \geqslant t_0 \tag{2.12}$$

$$y^\varepsilon(t) \in Y_+^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), s_+)) \text{ при } t \in [t_0 + \delta(\varepsilon), \theta] \tag{2.13}$$

Используя оценки типа неравенства Гронуола, получим из (2.11), (2.12) при $t \in [t_0, t_0 + \delta(\varepsilon)]$ соотношения

$$\| x^\varepsilon(t) - x_0^\varepsilon(t) \| \leq \frac{d_0}{L^\varepsilon}(e^{L^\varepsilon(1+\nu^\varepsilon)\delta(\varepsilon)} - 1) = \varphi(\varepsilon) \tag{2.14}$$

где $\varphi(\varepsilon) \downarrow 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$. При $t \in [t_0 + \delta(\varepsilon), \theta]$ из (2.11), (2.13), (2.14) получаем

$$\| x^\varepsilon(t) - x_0^\varepsilon(t) \| \leq \| x^\varepsilon(t_0 + \delta(\varepsilon)) - x_0^\varepsilon(t_0 + \delta(\varepsilon)) \| + \int_{t_0+\delta(\varepsilon)}^{\theta} L^\varepsilon(1+\nu^\varepsilon) \| x^\varepsilon(\tau) - x_0^\varepsilon(\tau) \| d\tau \tag{2.15}$$

$$\begin{gathered}\| x^\varepsilon(t) - x_0^\varepsilon(t) \| \leq \exp[L^\varepsilon(1+\nu^\varepsilon)(t - t_0 - \delta(\varepsilon))] \| x^\varepsilon(t_0 + \delta(\varepsilon)) - x_0^\varepsilon(t_0 + \delta(\varepsilon)) \| \leq \\ \leq \exp[L^\varepsilon(1+\nu^\varepsilon)(\theta - t_0)]\varphi(\varepsilon) = \rho(\varepsilon)\end{gathered} \tag{2.16}$$

где $\rho(\varepsilon) \downarrow 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Аналогичную оценку получаем для величины $\| z^\varepsilon(t) - z_0^\varepsilon(t) \|$.

Суммируя вышесказанное и, в частности, замечание о том, что приведенные выше рассуждения годятся как для верхних, так и для нижних характеристических комплексов, фигурирующих в условии А.1, приходим к выводу о справедливости следующего утверждения.

Лемма 1. Для любых компактов D, D_0 из условия А.1г существуют такие отображения $(0, \varepsilon_*] \mapsto R_+ \times R_+ : \varepsilon \mapsto (\alpha(\varepsilon), \rho(\varepsilon))$, что $\alpha(\varepsilon) \downarrow 0$, $\rho(\varepsilon) \downarrow 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$, и при любых $(t_0, x_0) \in D$, $y_0 \in D_0$, $z_0 \in R$, $s' = s_+ \in S_+$ ($s' = s_- \in S_-$), $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, $(x^\varepsilon(\cdot), y^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot)) \in \varepsilon - \mathrm{Sol}\,(t_0, x_0, y_0, z_0, s')$ существует такое $(x_\varepsilon(\cdot), z_\varepsilon(\cdot)) \in \mathrm{Sol}^\varepsilon\,(t_0, x_0, z_0, s')$, что

$$\| x^\varepsilon(\tau) - x_\varepsilon(\tau) \| \leq \rho(\varepsilon), \quad \| z^\varepsilon(\tau) - z_\varepsilon(\tau) \| \leq \rho(\varepsilon) \tag{2.17}$$

при $\tau \in [t_0 + \delta(\varepsilon), \theta]$

Замечание 1. Обозначим через $G_\varepsilon(t_0, \tau, x_0, y_0, z_0, s')$ область достижимости системы (2.1) в момент времени τ, а через $G_\varepsilon^{\rho(\varepsilon)}(t_0, \tau, x_0, z_0, s')$ – замкнутую $\rho(\varepsilon)$-окрестность области достижимости системы (2.7). Тогда условие (2.17) можно переписать в виде

$$\mathrm{pr}_{x,z}\, G_\varepsilon(t_0, \tau, x_0, y_0, z_0, s') \subset G_\varepsilon^{\rho(\varepsilon)}(t_0, \tau, x_0, z_0, s') \tag{2.18}$$

где $\rho(\varepsilon)$ – величина из оценок (2.16) – одна и та же для всех $(t_0, x_0) \in D$, $y_0 \in D_0$, $z_0 \in R$.

Введем в рассмотрение функции

$$\begin{gathered} v_\varepsilon^0(t, x) = \inf_{s_+ \in S_+} \min_{y \in Y_+^\varepsilon(t, x, s_+)} v^\varepsilon(t, x, y) \\ w_\varepsilon^0(t, x) = \sup_{s_- \in S_-} \max_{y \in Y_-^\varepsilon(t, x, s_-)} w^\varepsilon(t, x, y) \end{gathered} \tag{2.19}$$

где $v^\varepsilon(t, x, y)$ – верхнее минимаксное решение сингулярно возмущенной задачи $\mathbf{P}^\varepsilon$, $w^\varepsilon(t, x, y)$ – нижнее минимаксное решение задачи $\mathbf{P}^\varepsilon$. Заметим, что ранее [1] аналогичные операции min и max рассматривались на множествах притяжения Y, не зависящих от t, x, s_+ и s_-. Подобные (2.19) конструкции используются также в работе [13].

Согласно теории минимаксных решений [9, 11], для любых $(t, x, y) \in G$, $s_+ \in S_+$, $s_- \in S_-$ непусто пересечение

$$M_+^\varepsilon(t, x, s_+) \cap M_-^\varepsilon(t, x, s_-) \neq 0$$

Используя это свойство, а также предположение А.1*в о липшицевости множеств притяжения, методом от противного нетрудно доказать, что при любых $(t, x, y) \in G$, $s_+ \in S_+$, $s_- \in S_-$ для соответствующих множеств притяжения из А.1* выполняется условие

$$Y_+^\varepsilon(t, x, s_+) \cap Y_-^\varepsilon(t, x, s_-) \neq 0 \tag{2.20}$$

Если теперь в (2.19) положить

$$v^\varepsilon(t, x, y) = w^\varepsilon(t, x, y) = u^\varepsilon(t, x, y)$$

где $u^\varepsilon(t, x, y)$ – минимаксное решение задачи $\mathbf{P}^\varepsilon$, то из условия (2.20) вытекает, что для любых (t, x) имеет место неравенство

$$v_\varepsilon^0(t, x) \leqslant w_\varepsilon^0(t, x) \tag{2.21}$$

Лемма 2. Для любых $(t_0, x_0) \in D$, $y_0 \in D_0$, $s_+ \in S_+ (s_- \in S_-)$, $z_0 = z_0^+ \geqslant v_\varepsilon^0(t_0, x_0)$ $(z_0 = z_0^- \leqslant w_\varepsilon^0(t_0, x_0))$, $\tau \in [t_0 + \delta(\varepsilon), \theta]$ существует точка $(x_+^*, z_+^*) \in G_\varepsilon^{\rho(\varepsilon)}(t_0, \tau, x_0, z_0^+, s_+)$ и точка $(x_-^*, z_-^*) \in G_\varepsilon^{\rho(\varepsilon)}(t_0, \tau, x_0, z_0^-, s_-)$, такие, что

$$(\tau, x_+^*, z_+^*) \in \operatorname{epi} v_\varepsilon^0 \qquad (\tau, x_-^*, z_-^*) \in \operatorname{hypo} w_\varepsilon^0$$

Доказательство этого утверждения проводится по той же схеме, что и доказательство утверждения 1 из [1].

Используя предположение о непрерывности исходных данных задачи $\mathbf{P}^\varepsilon$ от параметра ε, получаем, что при всех $(t, x) \in [0, \theta] \times R^n$, $s_+ \in S_+$, $s_- \in S_-$ сходятся при $\varepsilon \downarrow 0$ в метрике Хаусдорфа множества

$$Y_\pm^\varepsilon(t, x, s_+) \mapsto Y_\pm^0(t, x, s_+)$$

$$\operatorname{co} \operatorname{pr}_{x,z} M_\pm^\varepsilon(t, x, Y_\pm^\varepsilon(t, x, s_\pm), s_\pm) \mapsto M_\pm^0(t, x, s_\pm)$$

Из предположений А.1а, А.1в следует, что при любых $s_\pm \in S_\pm$ многозначные отображения $(t, x) \mapsto M_\pm^0(t, x, s_\pm)$ являются выпукло- и компактно-значными и удовлетворяют условию Липшица с константой $L^0 = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} L^\varepsilon(1 + \nu^\varepsilon)$. Из условия А.2 вытекает, что комплексы $(S_+, M_+^0), (S_-, M_-^0)$ являются соответственно верхним и нижним характеристическими комплексами в невозмущенной задаче Коши $\mathbf{P}$, где гамильтониан имеет представление

$$H(t, x, s) = \max_{s_+ \in S_+} \min \{\langle f, s\rangle - g : (f, g) \in M_+^0(t, x, s_+)\} =$$
$$= \min_{s_- \in S_-} \max \{\langle f, s\rangle - g : (f, g) \in M_-^0(t, x, s_-)\} \tag{2.22}$$

Модифицируя схему доказательства утверждения 2 из [1] с учетом нестационарности множеств притяжения, получаем, что справедлив следующий факт.

Лемма 3. Функция

$$v^\#(t, x) = \liminf_{\varepsilon\downarrow 0, (t', x') \mapsto (t, x)} v_\varepsilon^0(t', x') \tag{2.23}$$

является верхним минимаксным решением задачи $\mathbf{P}$, а функция

$$w^\#(t, x) = \limsup_{\varepsilon\downarrow 0, (t', x') \mapsto (t, x)} w_\varepsilon^0(t', x') \tag{2.24}$$

является нижним минимаксным решением задачи $\mathbf{P}$ (1.14).

Из свойств верхних и нижних минимаксных решений задачи $\mathbf{P}$ вытекает, что при всех (t, x)

$$v^{\#}(t,x) \geqslant w^{\#}(t,x)$$

а из условия (2.21) и построений (2.23), (2.24) следует

$$v^{\#}(t,x) \leqslant w^{\#}(t,x)$$

Таким образом, для всех $(t, x, y) \in D \times D_0$ имеем равенство

$$v^{\#}(t,x) = w^{\#}(t,x) = u(t,x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} u^{\varepsilon}(t,x,y) \tag{2.25}$$

Из оценок, полученных в лемме 1, вытекает, что сходимость в условии (2.25) равномерна на любых выбранных компактах $D \subset [0, \theta] \times R^n$ и $D_0 \subset R^l$. Теорема 1 доказана.

Замечание 2. Из условий A.2, (1.13) и B.5 можно получить следующее представление для гамильтониана $H(t, x, s)$ в невозмущенной задаче $\mathbf{P}$:

$$H(t,x,s) = \max_{s_+ \in S_+} \min_{y^* \in Y^0(t,x,s_+)} H^0(t,x,y^*,s,0) = \min_{s_- \in S_-} \max_{y_* \in Y^0(t,x,s_-)} H^0(t,x,y_*,s,0) \tag{2.26}$$

где $H^0(t, x, y, s, 0) = \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} H^{\varepsilon}(t, x, y, s, 0)$.

Замечание 3. Доказательство теоремы 2 сводится к проверке того, что в качестве допустимых комплексов условия A.1 в теореме 1 можно рассматривать множества $S_+ = S_- = \{(p, q) \in R^n \times R^l\}$ и многозначные отображения вида

$$(t,x,y) \mapsto M_+^{\varepsilon}(t,x,y,p,q) = \{(f,g,r) \in R^n \times R^l \times R:$$

$$\|f\| \leqslant \lambda^{\varepsilon}(x,y), \quad g \in k^{\varepsilon}(t,x,y) + F_+^{\varepsilon}(t,x,q),$$

$$r = \langle f, p\rangle - H^{\varepsilon}(t,x,y,p,0)\}$$

$$(t,x,y) \mapsto M_-^{\varepsilon}(t,x,y,p,q) = \{(f,g,r) \in R^n \times R^l \times R:$$

$$\|f\| \leqslant \lambda^{\varepsilon}(x,y), \quad g \in k^{\varepsilon}(t,x,y) + F_-^{\varepsilon}(t,x,q),$$

$$r = \langle f, p\rangle - H^{\varepsilon}(t,x,y,p,0)\}$$

Из условия A.1*г следует экспоненциальная оценка скорости сближения "быстрых" компонент обобщенных характеристик и соответствующих множеств притяжения и, следовательно, выполнение условия A.1г.

3. Примеры. Условия A.1, A.2, B.1–B.5 выполнены, например, в модельных примерах работы [1].

Для первого примера верхние характеристические комплексы и соответствующие им множества притяжения, удовлетворяющие условию A.1, имеют вид:

$$s_+ = q', \quad S_+ = Q$$

$$M_+^{\varepsilon}(t,x,y_1,y_2,q') = \mathrm{co}\{(f(t,x,y_1,y_2), h_1^{\varepsilon}(y_1,p'), h_2^{\varepsilon}(y_2,q'),$$

$$g(t,x,y_1,y_2)) : \mathbf{p}' \in P\}$$

$$h_1^{\varepsilon}(y_1,\mathbf{p}') = \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{p}' - y_1), \quad h_2^{\varepsilon}(y_2,q') = \frac{1}{\varepsilon}(q' - y_2)$$

$$Y_+^{\varepsilon}(t,x,q') = P^{\varepsilon} \times Q^{\varepsilon}$$

$$M_+^0(t,x,q') = \mathrm{co}\{(f(t,x,\mathbf{p}',q'), g(t,x,\mathbf{p}',q')) : \mathbf{p}' \in P\}$$

$$Y_+^0(t,x,q') = P \times Q$$

где P^{ε} и Q^{ε} – замкнутые ε-окрестности множеств P и Q.

Для того чтобы построить подходящие нижние характеристические комплексы, нужно в предлагаемых конструкциях поменять ролями p' и q', P и Q, а множества притяжения использовать те же.

Для второго примера верхние характеристические комплексы и соответствующие им множества притяжения, удовлетворяющие условию А.1г, имеют вид

$$s_+ = \beta, \quad S_+ = B$$

$$M_+^{\varepsilon}(t, x, y, \beta) = \operatorname{co}\{(f(t, x, y), \frac{1}{\varepsilon}(\xi - y), g(t, x, y)) : \xi \in Y(t, x, \beta)\}$$

$$M_+^0(t, x, \beta) = \operatorname{co}\{(f(t, x, \xi), g(t, x, \xi)) : \xi \in Y(t, x, \beta)\}$$

$$Y_+^{\varepsilon}(t, x, \beta) = Y(t, x, \beta)^{\varepsilon}, \quad Y_+^0(t, x, \beta) = Y(t, x, \beta)$$

где $Y(t, x, \beta)^{\varepsilon}$ – замкнутая ε-окрестность множества $Y(t, x, \beta)$.

Для того чтобы построить подходящие нижние характеристические комплексы и множества притяжения, в предлагаемых конструкциях нужно поменять ролями β и α, B и A.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00219, 96-15-96245).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Субботина Н.Н.* Асимптотические свойства минимаксных решений уравнений Айзекса – Беллмана в дифференциальных играх с быстрыми и медленными движениями // ПММ. 1996. Т. 60. № 6. С. 901–908.
2. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Мат. сб. 1952. Т. 31. № 3. С. 575–586.
3. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
4. *Красовский Н.Н., Решетов В.М.* Задачи сближения – уклонения в системах с малым параметром при производных // ПММ. 1974. Т. 38. № 5. С. 771–779.
5. *Barron E.N., Evans L.C., Jensen R.* Viscosity solutions of Isaacs' equations and differential games with Lipschitz controls // J. Different. Equat. 1984. V. 53. № 2. P. 213–233.
6. *Kokotovic P.V.* Applications of singular perturbation techniques to control problems // SIAM Review. 1984. V. 26. № 4. P. 501–550.
7. *Bensoussan A.* Perturbation Methods in Optimal Control. Chichester: Wiley-Gautier, 1988. 573 p.
8. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
9. *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона – Якоби. М.: Наука, 1991. 214 с.
10. *Crandall M.G., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton – Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277. № 1. P. 1–42.
11. *Subbotin A.I.* Generalized Solutions of First Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhäuser, 1995. 312 p.
12. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
13. *Bagagiolo F., Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I.* A viscosity solutions approach to some asymptotic problems in optimal control // Partial differential Equation Methods in Control and Shape Analysis / Eds. Da G. Prato and J.P. Zolèsio. New York: Dekker, 1997. P. 29–39.
14. *Gaitsgory V.* Limit Hamilton – Jacobi – Isaacs equations for singularly perturbed zero – sum differential games // J. Math. Analys. Appl. 1996. V. 202. № 3. P. 862–899.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
16.III.1998