

УДК 531.539:534.1

© 1999 г. А.П. Маркеев

О ДИНАМИКЕ СФЕРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА С ВИБРИРУЮЩИМ ПОДВЕСОМ

Изучается движение сферического маятника, точка подвеса которого совершает вертикальные гармонические колебания высокой частоты и малой амплитуды. Показано существование двух типов движений маятника, когда он совершает высокочастотные колебания вблизи конических движений, для которых маятник составляет постоянный угол с вертикалью и вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью. Для движений первого и второго типов центр тяжести маятника расположен соответственно ниже и выше точки подвеса. Найдена бифуркационная кривая, разбивающая плоскость параметров задачи на две области. В одной из них существует только движение первого типа, а в другой, помимо движения первого типа, существуют еще два движения второго типа. Решена задача об устойчивости упомянутых, близких к коническим, движений маятника. Оказалось, что движение первого типа устойчиво, а из движений второго типа устойчиво только движение с более высоким расположением центра тяжести.

Задаче динамики маятника с вибрирующей точкой подвеса посвящено довольно много исследований (обширную библиографию можно найти, например, в монографии [1]). Особенно подробно рассматривался [2–4] вопрос об открытой в начале нашего века возможности динамической стабилизации перевернутого маятника за счет вертикальных вибраций его точки подвеса [5]. Получено [6] полное решение задачи об устойчивости вертикальных относительных равновесий математического маятника, точка подвеса которого совершает вертикальные гармонические колебания произвольной частоты и амплитуды.

1. Функция Гамильтона. Рассмотрим сферический маятник, представляющий собой абсолютно твердый невесомый стержень длины l , совершающий пространственное движение вокруг одного своего конца и несущий на другом конце точечную массу m . Точка подвеса O маятника совершает гармонические колебания вдоль вертикали с амплитудой A и частотой Ω : $\xi_0 = A \cos \Omega t$, где ξ_0 – смещение точки подвеса от некоторого фиксированного положения O^* (фиг. 1).

За обобщенные координаты примем сферические координаты θ, φ . Пусть p_θ, p_φ – соответствующие им обобщенные импульсы, обезразмеренные при помощи множителя $ml^2\Omega$, а $\tau = \Omega t$ – безразмерное время. Тогда для функции Гамильтона имеем выражение

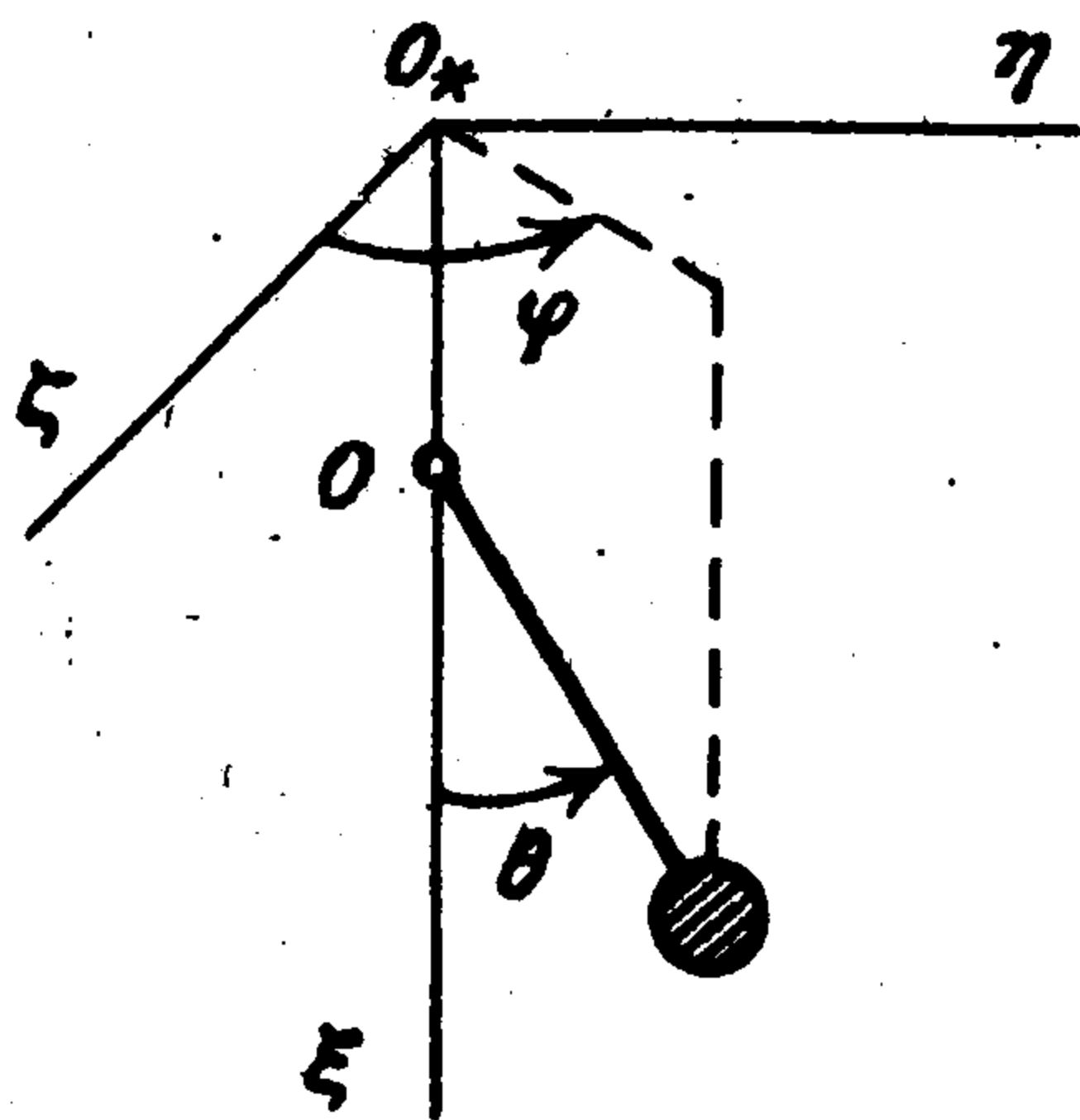
$$H = \frac{1}{2}(p_\theta - \varepsilon^2 \sin \tau \sin \theta)^2 - \frac{1}{2}\beta^2 \cos \theta + \frac{p_\varphi^2}{2 \sin^2 \theta} \quad (1.1)$$

$$\varepsilon = \sqrt{A/l}, \quad \beta = \sqrt{2g/(\Omega^2 l)}$$

Не зависящие от координат и импульсов величины в (1.1) отброшены.

Координата φ – циклическая. Соответствующий ей интеграл запишем в виде

$$2p_\varphi^2 = \alpha^2, \quad p_\varphi = \sin^2 \theta d\varphi / d\tau \quad (\alpha = \text{const}) \quad (1.2)$$



Фиг. 1

После игнорирования циклической координаты получим приведенную систему с одной степенью свободы. Ее канонически сопряженными переменными являются величины θ, p_θ , а постоянная α играет роль параметра. Считаем, что $\alpha \neq 0$, так как при $\alpha = 0$ угол φ постоянен и сферический маятник движется в фиксированной вертикальной плоскости подобно математическому маятнику.

Дальнейшее исследование проводится при следующих предположениях. Считаем, что амплитуда A колебаний точки подвеса мала по сравнению с длиной l маятника; это означает, что величина ε в (1.1) является малым параметром ($0 < \varepsilon \ll 1$). Предполагаем также, что частота Ω колебаний точки подвеса велика по сравнению с частотой $\sqrt{g/l}$ малых колебаний математического маятника; для конкретности полагаем, что $\sqrt{g/(\Omega^2 l)} < \varepsilon^2$. Кроме того, в дальнейшем считаем, что угловая скорость вращения маятника вокруг вертикали мала по сравнению с Ω .

Учтя эти предположения, введем обозначения $\alpha^2 = \varepsilon^4 a, \beta^2 = \varepsilon^4 b$. Тогда функция Гамильтона (1.1) запишется в виде

$$H = \frac{1}{2}(p_\theta - \varepsilon^2 \sin \tau \sin \theta)^2 - \frac{1}{2} \varepsilon^4 b \cos \theta + \varepsilon^4 \frac{a}{4 \sin^2 \theta} \quad (1.3)$$

Для параметров a и b справедливы оценки

$$0 < a < 2 \frac{1}{g} \sin^4 \theta_0 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_0^2, \quad 0 < b < 2$$

Нижним нулевым индексом обозначены начальные значения соответствующих величин.

2. Упрощение функции Гамильтона. Для исследования движения маятника при малых ε воспользуемся методами теории возмущений [7]. Предварительно удобно сделать каноническую замену переменных

$$\theta = s, \quad p_\theta = \varepsilon r \quad (2.1)$$

Уравнениям движения в новых переменных соответствует гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} \varepsilon r^2 - \varepsilon^2 \sin \tau r \sin s + \frac{1}{4} \varepsilon^3 \left(\frac{a}{\sin^2 s} - 2b \cos s + 2 \sin^2 \tau \sin^2 s \right) \quad (2.2)$$

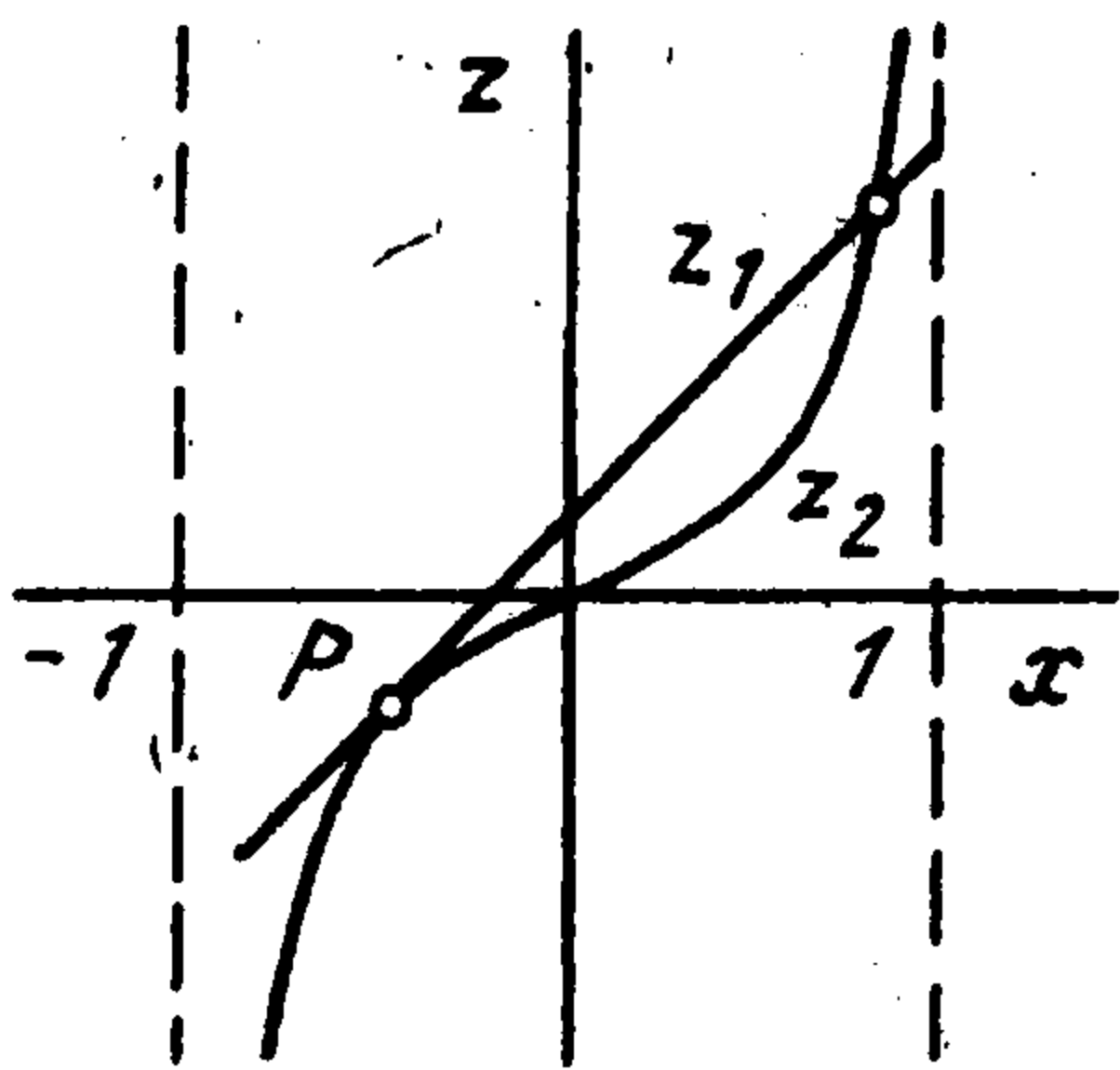
При помощи канонической замены переменных $s, r \rightarrow u, v$ упростим функцию Гамильтона (2.2) так, чтобы она не содержала вермя τ в членах до третьей степени включительно относительно ε . Для построения этой замены переменных используем классическую теорию возмущений или какой-либо ее современный вариант, например, метод Депри-Хори [7]. Вычисления показывают, что искомая замена задается формулами

$$s = u + \varepsilon^2 \cos \tau \sin u - 2\varepsilon^3 \sin \tau v \cos u + O(\varepsilon^4) \quad (2.3)$$

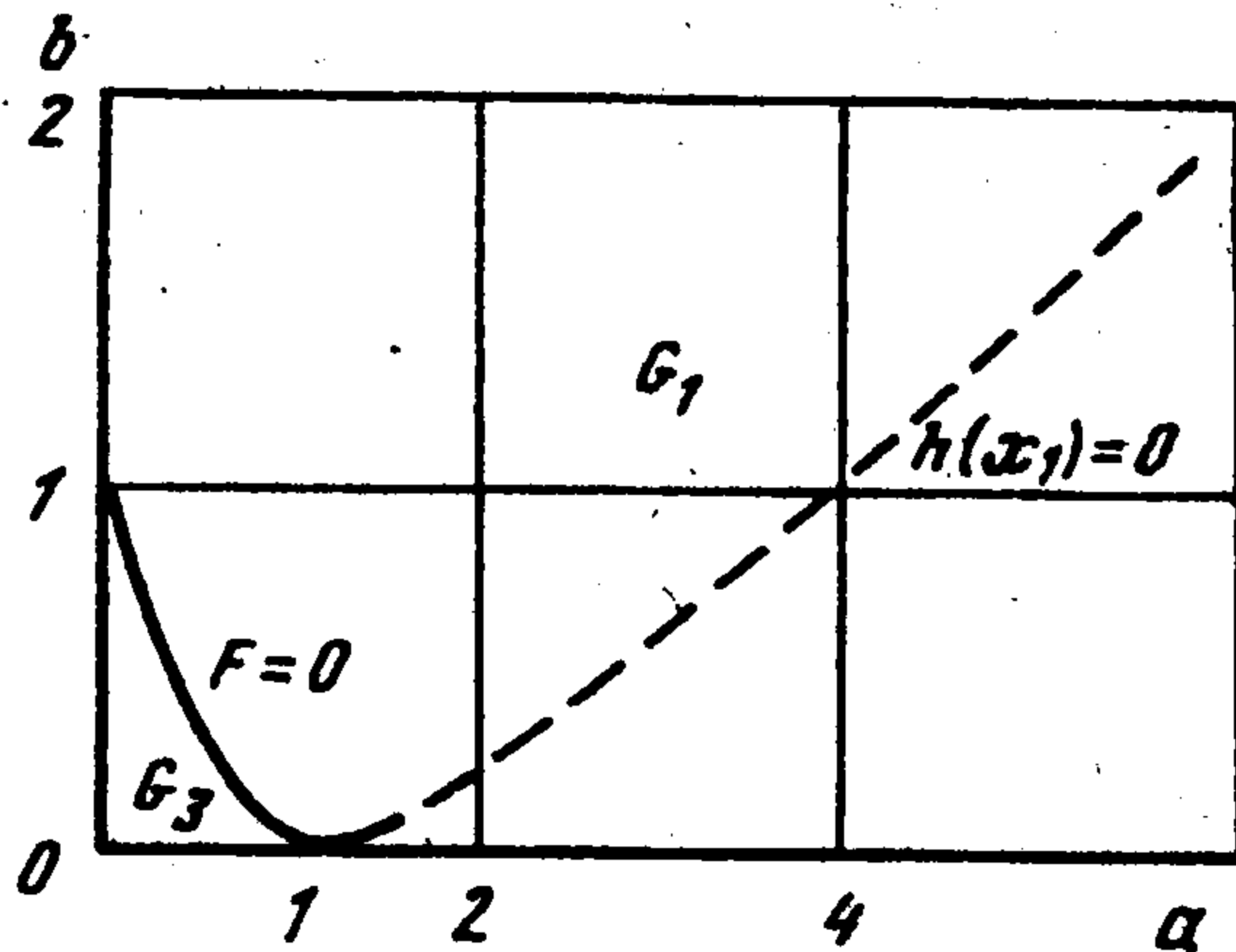
$$r = v - \varepsilon^2 \cos \tau v \cos u + \frac{1}{8} \varepsilon^3 (\sin 2\tau \sin 2u - 8 \sin \tau v^2 \sin u) + O(\varepsilon^4)$$

а преобразованная функция Гамильтона имеет следующий вид:

$$H = \frac{1}{2} \varepsilon v^2 + \frac{1}{4} \varepsilon^3 \left(\frac{a}{\sin^2 u} - 2b \cos u + \sin^2 u \right) + O(\varepsilon^4) \quad (2.4)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

В дальнейших вычислениях удобнее вместо переменных u, v использовать канонически сопряженные переменные x, y , задаваемые равенствами

$$x = \cos u, \quad v = -y \sin u \quad (2.5)$$

В переменных x, y функция Гамильтона (2.4) принимает такую форму:

$$H = \frac{1}{2} \varepsilon (1 - x^2) y^2 + \varepsilon^3 \Pi + O(\varepsilon^4) \quad (2.6)$$

$$\Pi = \frac{1}{4} \left(\frac{a}{1 - x^2} - 2bx + 1 - x^2 \right)$$

3. Бифуркационная кривая. Если в гамильтониане (2.6) пренебречь величиной $O(\varepsilon^4)$, то получим автономную гамильтонову систему, интегрируемую в квадратурах. Не останавливаясь на общем решении этой приближенной системы, рассмотрим только вопрос о существовании ее положений равновесия $x = \text{const}, y = 0$. Равновесные значения величины x являются вещественными корнями уравнения $\partial \Pi / \partial x = 0$, лежащими, согласно первой из формул (2.5), в интервале $(-1, 1)$.

Анализ уравнения $\partial \Pi / \partial x = 0$ проведем графическим способом. Для этого запишем его в виде $z_1(x) = z_2(x)$, где

$$z_1 = \frac{x}{a} + \frac{b}{a}, \quad z_2 = \frac{x}{(1 - x^2)^2} \quad (3.1)$$

и в плоскости x, z рассмотрим графики функций $z = z_1(x), z = z_2(x)$.

Прямая $z = z_1(x)$ содержит два положительных параметра a и b и для значений x из интервала $(-1, 1)$ пересекает кривую $z = z_2(x)$ либо в одной точке, для которой $x = x_1 > 0$, либо в трех точках, отвечающих трем значениям x_i ($i = 1, 2, 3$), удовлетворяющим неравенствам $-1 < x_3 < x_2 < 0 < x_1 < 1$. Точка P на фиг. 2 соответствует бифуркационным значениям параметров a, b . В этой точке прямая $z = z_1(x)$ касается кривой $z = z_2(x)$, т.е. в точке P одновременно выполняются два соотношения $z_1 = z_2$ и $dz_1/dx = dz_2/dx$. Учтя (3.1), эти соотношения можно записать в виде уравнений

$$f(x) \equiv x^5 + bx^4 - 2x^3 - 2bx^2 + (1-a)x + b = 0 \quad (3.2)$$

$$g(x) \equiv 4x^3 + 3bx^2 + b = 0$$

В критической точке P многочлены f и g имеют общий корень. Это возможно тогда и только тогда, когда результат $R(f, g)$ этих многочленов равняется нулю [8]. Результат является функцией параметров a, b и, как показывают вычисления, его можно представить в виде $R(f, g) = -b F(a, b)$, где

$$F(a, b) = 256b^6 + 3(9a^2 - 32a - 256)b^4 - 96(a^2 - 29a - 8)b^2 + 256(a - 1)^3$$

Так как $b \neq 0$, то результат обращается в нуль только когда $F(a, b) = 0$. В плоскости a, b кривая $F(a, b) = 0$ является бифуркационной. При переходе через нее меняется число положений равновесия приближенной системы. Область $a > 0, 2 > b > 0$ допустимых значений параметров a, b разбивается бифуркационной кривой на две области: G_1 и G_3 (фиг. 3). В области G_1 существует одно положение равновесия, в котором $x = x_1 > 0$, а в области G_3 — три положения равновесия, для которых $x = x_i$ ($i = 1, 2, 3$), $-1 < x_3 < x_2 < 0 < x_1 < 1$.

4. Периодические решения приведенной системы. Теперь рассмотрим приведенную систему с полным гамильтонианом (2.6). Приближенная система является для нее невозмущенной. В окрестности изученных в разд. 3 положений равновесия $x = \text{const}$, $y = 0$ полную систему можно рассматривать как квазилинейную с 2π -периодическими по τ возмущениями, порядок которых по ε выше трех.

Характеристическое уравнение линеаризованной в окрестности положения равновесия невозмущенной системы имеет вид

$$\lambda^2 + \varepsilon^4(1 - x_i^2)\gamma_2 = 0, \quad \gamma_2 = \frac{4x_i^3 + 3bx_i^2 + b}{2x_i(1 - x_i^2)} \quad (4.1)$$

Здесь γ_2 — вторая производная функции Π из (2.6), вычисленная при $x = x_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Так как при малых ε корни уравнения (4.1) малы, то имеет место нерезонансный случай метода малого параметра Пуанкаре. Поэтому [9] в областях G_1 и G_3 (фиг. 3) из каждого положения равновесия приближенной системы рождается единственное аналитическое по ε , 2π -периодическое по τ решение системы с полным гамильтонианом (2.6). Периодические добавки к равновесным значениям $x = x_i, y = 0$ имеют порядок ε^4 и выше.

Учитывая замены переменных (2.1), (2.3) и (2.5), получаем, что для упомянутых периодических движений маятника величина p_θ имеет порядок ε^4 , а угол θ маятника с вертикалью задается равенством

$$\theta_i = \arccos x_i + \varepsilon^2 \sqrt{1 - x_i^2} \cos \tau + O(\varepsilon^4), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.2)$$

Величина $O(\varepsilon^4)$ в (4.2) 2π -периодична по τ .

5. Движения маятника, близкие к коническим, и их устойчивость. Периодическим решениям (4.2) приведенной системы с одной степенью свободы соответствуют движения маятника исходной системы с двумя степенями свободы, близкие к коническим движениям (КД). Для этих движений угол θ_i маятника с вертикалью мало отличается от его постоянного значения $\arccos x_i$, а соответствующая безразмерная угловая скорость $d\varphi_i/d\tau$ вращения маятника вокруг вертикали определяется из (1.2):

$$\frac{d\varphi_i}{d\tau} = \pm \varepsilon^2 \frac{\sqrt{2a}}{2 \sin^2 \theta_i} = \pm \varepsilon^2 \frac{\sqrt{2a}}{2(1 - x_i^2)} + O(\varepsilon^4) \quad (5.1)$$

Она отличается от постоянной 2π -периодическими по τ членами порядка ε^4 . Двойной знак в (5.1) указывает на то, что для одного и того же значения величины x_i возможны два направления вращения маятника вокруг вертикали.

Для первого из решений (4.2) имеем $x_1 > 0$, и в соответствующем движении, близком к КД, центр тяжести маятника находится ниже точки подвеса. Это движение маятника назовем движением первого типа. Оно является аналогом КД сферического маятника при неподвижной точке подвеса.

Для двух других решений из (4.2) имеем $-1 < x_3 < x_2 < 0$. В соответствующих движениях маятника, близких к КД, центр тяжести расположен выше точки подвеса. Эти движения назовем движениями второго типа. В задаче о движении сферического маятника с неподвижным подвесом для них аналога нет.

Если значения параметров a и b лежат в области G_3 (фиг. 3), то существуют одно движение первого типа и два движения второго типа. На бифуркационной кривой два движения второго типа сливаются и при переходе в область G_1 исчезают, в области G_1 существует одно движение первого типа.

Исследуем устойчивость движений маятника, близких к КД, по отношению к возмущениям величин θ, p_θ . Этим движениям отвечают 2π -периодические по τ решения $x^* = x_i + O(\varepsilon^4)$, $y^* = O(\varepsilon^4)$ уравнений движения с гамильтонианом (2.6). Положив $x = x^* + q$, $y = y^* + p$, получим функцию Гамильтона возмущенного движения в виде следующего ряда по степеням q, p :

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots, \quad H_k = \sum_{\nu+\mu=k} h_{\nu\mu}(\tau) q^\nu p^\mu \quad (5.2)$$

Коэффициенты $h_{\nu\mu}$ — 2π -периодические по τ функции, причем с погрешностью порядка ε^4 имеем

$$h_{20} = \frac{1}{2}\varepsilon^3\gamma_2, \quad h_{02} = \frac{1}{2}\varepsilon(1-x_i^2), \quad h_{30} = \frac{1}{6}\varepsilon^3\gamma_3 \quad (5.3)$$

$$h_{12} = -\varepsilon x_i, \quad h_{40} = \frac{1}{24}\varepsilon^3\gamma_4, \quad h_{22} = -\frac{1}{2}\varepsilon$$

Остальные коэффициенты форм H_k ($k = 2, 3, 4$) имеют четвертый порядок малости относительно ε . Входящая в (5.3) величина γ_2 определена вторым из равенств (4.1), а γ_3 и γ_4 вычисляются по формулам

$$\gamma_3 = 6a \frac{x_i(1+x_i^2)}{(1-x_i^2)^4}, \quad \gamma_4 = 6a \frac{5x_i^4 + 10x_i^2 + 1}{(1-x_i^2)^5}$$

Рассмотрим сначала устойчивость в линейном приближении. Характеристические показатели линеаризованных уравнений возмущенного движения представимы в виде $\lambda + O(\varepsilon^4)$, где λ — корень уравнения (4.1). Поэтому при малых ε вопрос об устойчивости в линейном приближении решается знаком величины γ_2 : при $\gamma_2 > 0$ имеет место устойчивость, а при $\gamma_2 < 0$ — неустойчивость.

Для движения первого типа величина $x_1 > 0$, и, с учетом положительности параметра b , из (4.1) получаем, что величина $\gamma_2 > 0$, и следовательно, это движение устойчиво в линейном приближении.

Каждое же движение второго типа либо устойчиво в линейном приближении всюду в своей области существования G_3 (фиг. 3), либо неустойчиво в этой области. Это следует из того, что x_2 и x_3 отрицательны, и поэтому, в силу (4.1), вопрос об устойчивости в линейном приближении решается знаком величины многочлена $g(x)$ из (3.2), вычисленного при $x = x_i$ ($i = 2, 3$): при $g(x_i) < 0$ имеет место устойчивость в линейном приближении, а при $g(x_i) > 0$ — неустойчивость. Но величина $g(x_i)$ не может обратиться в нуль внутри области G_3 , так как в противном случае там должна бы была обратиться в нуль и величина $f(x_i)$, а согласно результатам разд. 3 многочлены f и g из (3.2) одновременно обращаются в нуль только на бифуркационной кривой $F(a, b) = 0$, разделяющей области G_1 и G_3 .

Определим знаки величин $g(x_i)$ ($i = 2, 3$). В соответствии с вышесказанным для этого достаточно рассмотреть, например, случай, когда a и b лежат на луче $a = b$, причем $0 < a \ll 1$. Из уравнения $f(x) = 0$ тогда находим

$$x_2 = -a + O(a^2), \quad x_3 = -1 + \sqrt{a}/2 + O(a)$$

Поэтому

$$g(x_2) = a + O(a^3) > 0, \quad g(x_3) = -4 + O(\sqrt{a}) < 0$$

Таким образом, всюду в области G_3 величина $g(x_2)$ положительна, а величина $g(x_3)$ отрицательна.

Следовательно, движение второго типа, отвечающее значению $x = x_3$, устойчиво в линейном приближении всюду в области G_3 , а движение, отвечающее значению $x = x_2$, неустойчиво.

Из теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению [10] следует, что движение второго типа, отвечающее значению $x = x_2$, неустойчиво не только в линейном приближении, но и в строгой нелинейной постановке задачи об устойчивости.

При строгом же решении задачи об устойчивости движений маятника первого типа и движений второго типа, отвечающих значению $x = x_3$, необходим нелинейный анализ. Проведем его, опираясь на КАМ-теорию [11, 12].

Для этого при помощи канонического преобразования Биркгофа $q, p \rightarrow Q, P$ приведем функцию Гамильтона возмущенного движения (5.2) к нормальной форме [13]

$$H = \frac{1}{2} \sigma (Q^2 + P^2) + \frac{1}{4} c_2 (Q^2 + P^2)^2 + O_5$$

где O_5 — 2π -периодическая по τ совокупность членов ряда, степень которых относительно Q, P не ниже пятой, а σ и c_2 — постоянные величины, причем, как показывают вычисления,

$$\sigma = \varepsilon^2 \sqrt{(1-x_i^2)\gamma_2} + O(\varepsilon^4), \quad c_2 = -\varepsilon \frac{h(x_i)}{16\gamma_2^2(1-x_i^2)^6} + O(\varepsilon^2)$$

$$h(x) = (3x^4 + 15x^2 - 2)a^2 + (15x^4 + 32x^2 + 1)(1-x^2)^2 a + (2x^2 + 1)(1-x^2)^5$$

Если $c_2 \neq 0$, то, согласно теореме Арнольда–Мозера [11, 12], имеет место устойчивость. Поэтому при малых ε достаточным условием устойчивости исследуемых движений маятника будет выполнение неравенства $h(x_i) \neq 0$ ($i = 1, 3$). Последнее условие не будет выполняться только для таких значений параметров a и b , для которых одновременно $h(x_i) = 0$ и $f(x_i) = 0$, где f — многочлен из (3.2).

Рассмотрим равенство $h(x) = 0$ как квадратное уравнение относительно параметра a . Представляют интерес только положительные корни этого уравнения. Можно убедиться, что оба корня вещественны, причем один из корней отрицателен для всех значений x из интервала $(-1, 1)$. Второй же корень положителен только для значений x , удовлетворяющих неравенству

$$|x| < \frac{1}{6} \sqrt{-90 + 6\sqrt{249}} \approx 0,3605 \quad (5.4)$$

Обозначим этот корень через $a(x)$. Имеем

$$a(x) = \frac{15x^4 + 32x^2 + 1 + S(x)}{2(2 - 15x^2 - 3x^4)} (1-x^2)^2 \quad (5.5)$$

$$S(x) = [3(x^2 + 3)(83x^6 + 107x^4 + x^2 + 1)]^{1/2}$$

Подставив (5.5) в равенство $f(x) = 0$ и разрешив его относительно b , найдем

$$b(x) = \frac{(x^2 + 3)(21x^2 - 1) + S(x)}{2(2 - 15x^2 - 3x^4)} x \quad (5.6)$$

Равенства (5.5) и (5.6) в параметрической форме задают в областях G_1 и G_3 плоскости a, b (фиг. 3) кривую, на которой не выполнено достаточное условие устойчивости $h(x_i) \neq 0$.

Для значений x из интервала (5.4) знаменатель и числитель дроби в выражении (5.6) для $h(x)$ положительны. Поэтому для значения $x = x_3 < 0$, соответствующего движению маятника второго типа, величина b отрицательна и, следовательно, всюду в области G_3 выполнено достаточное условие $h(x_3) \neq 0$ устойчивости этого движения.

Рассмотрим теперь движение первого типа. Для него $x = x_1 > 0$. Поэтому в параметрических уравнениях кривой $h(x_1) = 0$, на которой не выполнено достаточное условие устойчивости, параметр x положителен и удовлетворяет условию (5.4). С учетом того, что $b < 2$, получаем еще более узкую область изменения параметра: $0 < x < 0,306$. Численный анализ показывает, что кривая $h(x_1) = 0$ не проходит через область G_3 . Часть этой кривой, лежащая в области G_1 , изображена на фиг. 3 штриховой линией. Вне кривой $h(x_1) = 0$ внутри областей G_1 и G_3 движение маятника первого типа устойчиво. Для значений a и b , лежащих на кривой $h(x_1) = 0$, вопрос об устойчивости этого движения остается открытым.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00220).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стрижак Т.Г.* Методы исследования динамических систем типа "маятник". Алма-Ата: Наука, 1981. 253 с.
2. *Боголюбов Н.Н.* Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. тр. Ин-та строит. механики АН УССР. 1950. № 14. С. 9–34.
3. *Капица П.Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. Вып. 5. С. 588–597.
4. *Капица П.Л.* Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физ. наук. 1951. Т. 44. Вып. 1. С. 7–20.
5. *Stephenson A.* On a new type of dynamical stability // Mem. and Proc. Manchester Lit. and Phil. Soc. 1908. V. 52. Pt 2. P. 1–10.
6. *Бардин Б.С., Маркеев А.П.* Об устойчивости равновесия маятника при вертикальных колебаниях точки подвеса // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 922–929.
7. *Джакалья Г.Е.О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 319 с.
8. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968. 431 с.
9. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
10. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
11. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18. Вып. 6. С. 91–192.
12. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
13. *Биркгоф Дж.Д.* Динамические системы. М.: Гостехиздат, 1941. 320 с.