УДК 531.539:534.1

© 1999 г. Ю.Ф. Голубев

РЕЗОНАНСЫ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ И КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Для исследования параметрического резонанса в системах с "большими" возмущениями, описываемых линейным дифференциальным уравнением второго порядка с периодическими кусочно-постоянными коэффициентами, предлагается техника, основанная на композиции элементарных фазовых потоков[1]. Дана матрица монодромии и указан критерий параметрического резонанса, учитывающий возможность кратных мультипликаторов и действия диссипативных сил. При двухступенчатой зависимости коэффициентов от времени на одном периоде найдены области параметрического резонанса для разных типов линейных механических систем с одной степенью свободы.

Традиционно техника изучения параметрического резонанса основывается на сочетании теории Флоке с методами малого параметра и фурье-анализа [1–4]. Другой подход к указанной проблеме состоит в применении условий абсолютной устойчивости и вариационных методов, например [4, 5]. Для иллюстрации результатов метода малого параметра в [3] рассматривался аналог уравнения Хилла с кусочно-постоянными коэффициентами типа квазипрямоугольного синуса и в [1] уравнение Мейсснера (двухступенчатый кусочно-постоянный аналог уравнения Матье). Более подробно уравнение Мейсснера изучалось в работах [2, 6]. Предлагаемая статья дополняет, а в некоторых случаях уточняет ранее полученные результаты.

1. Критерий параметрического резонанса. Пусть движение механической системы с одной степенью свободы описывается обыкновенным линейным дифференциальным уравнением второго порядка, коэффициенты которого – известные периодические (с одинаковым периодом τ) функции времени (или другой независимой переменной):

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0 \tag{1.1}$$

Обозначим

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$$

матрицу монодромии [4, 7], задающую преобразование решений через период τ. Из теоремы Флоке [4] следует, что характеристическое уравнение монодромии, определяющее мультипликаторы, имеет вид

$$\mu^2 - B\mu + D = 0, \quad D = \exp\left(-\int_0^\tau a(t)dt\right)$$

где $B = a_{11} + a_{22}$ – след матрицы монодромии.

[1] *Голубев Ю.Ф.* Резонансы линейных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. Препринт № 43. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1997. 31 с.

В соответствии с теорией Флоке [4] справедлив критерий[1].

Теорема 1. Пусть движение системы описывается однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с периодическими коэффициентами, имеющими одинаковый период. Параметрический резонанс в ней возникает тогда и только тогда, когда реализуется какой-либо из следующих случаев:

1) $D > 1$,

2) $D = 1$: $|B| > 2$ либо $|B| = 2$ и $a_{12}^2 + a_{21}^2 \neq 0$;

3) $0 < D < 1$: $|B| > D + 1$,

где a_{ij} – компоненты матрицы монодромии.

Этот критерий отличается от приведенного ранее [5] тем, что не требует обязательного свойства абсолютной устойчивости движения.

2. Вычисление матрицы монодромии. Для того чтобы воспользоваться теоремой 1, требуется найти компоненты матрицы монодромии. Пусть базисные функции $x_1(t)$, $x_2(t)$ удовлетворяют начальным условиям [7]

$$x_1(0) = 1, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 1 \tag{2.1}$$

Тогда

$$a_{11} = x_1(\tau), \quad a_{22} = \dot{x}_2(\tau), \quad a_{21} = \dot{x}_1(\tau), \quad a_{12} = x_2(\tau)$$

Будем в дальнейшем изучать уравнение (1.1) с кусочно-постоянными коэффициентами

$$a(t) = \begin{cases} a_1, & 0 \leqslant t < t_1' \\ a_2, & t_1' \leqslant t < t_2' \\ \dots \\ a_n, & t_{n-1}' \leqslant t < t_n' = \tau \end{cases}, \quad b(t) = \begin{cases} b_1, & 0 \leqslant t < t_1' \\ b_2, & t_1' \leqslant t < t_2' \\ \dots \\ b_n, & t_{n-1}' \leqslant t < t_n' = \tau \end{cases}$$

где a_k, b_k $(t_k' = t_{k-1}' + t_k,\ t_k > 0;\ k = 1,\ \dots,\ n)$ – постоянные параметры, $t_0' = 0$.

Отметим, что интервалы постоянства значений функций $a(t)$ и $b(t)$ совпадают. Следовательно, на каждом таком интервале дифференциальное уравнение определяет фазовый поток с матрицей G_j, переводящий фазовую точку из начального положения в момент времени t_{j-1}' в конечное положение к моменту времени t_j'.

Примем правило непрерывного продолжения решений в моменты скачков коэффициентов. Пусть $A(t_j')$ – матрицант [4], отвечающий моменту времени $t_j' = t_{j-1}' + t_j$, и $A(t_{j-1}')$ – матрицант тех же решений, соответствующий моменту времени t_{j-1}'. Тогда

$$A(t_j') = G_j A(t_{j-1}')$$

Матрица монодромии есть значение матрицанта $A(t)$ в момент времени $t_n' = \tau$, поэтому она выражается формулой

$$A = A(t_n') = G_1 G_2 \dots G_n$$

Сначала рассмотрим случай, когда $b_k(t) = \omega_k^2(t) > 0 (k = 1,\ \dots,\ n)$, причем все коэффициенты уравнения принимают действительные значения. Дифференциальное уравнение такого типа условимся называть уравнением осциллятора. В частности, при $a(t) \equiv 0$ имеем уравнение Хилла с кусочно-постоянными коэффициентами, и для него матрица фазового потока через интервал времени t_j выражается формулой

$$G_j = \begin{Vmatrix} \cos(\omega_j t_j) & \dfrac{1}{\omega_j}\sin(\omega_j t_j) \\ -\omega_j \sin(\omega_j t_j) & \cos(\omega_j t_j) \end{Vmatrix}$$

При $a_j \neq 0$ и $a_j^2 < 4\omega_j^2 (j=1, \ ..., \ n)$ имеем

$$G_j = \exp\left(-\frac{a_j t_j}{2}\right) G'_j, \quad \Omega_j = \sqrt{4\omega_j^2 - a_j^2}$$

$$G'_j = \begin{Vmatrix} \cos(\Omega_j t_j) + \dfrac{a_j}{2\Omega_j}\sin(\Omega_j t_j) & \dfrac{1}{\Omega_j}\sin(\Omega_j t_j) \\ -\left(\dfrac{a_j^2}{4\Omega_j} + \Omega_j\right)\sin(\Omega_j t_j) & -\dfrac{a_j}{2\Omega_j}\sin(\Omega_j t_j) + \cos(\Omega_j t_j) \end{Vmatrix}$$

Если окажется, что $a_j^2 = 4\omega_j^2$, то получим

$$G'_j = \begin{Vmatrix} 1 + a_j t_j / 2 & t_j \\ -a_j^2 t_j / 4 & 1 - a_j t_j / 2 \end{Vmatrix}$$

Наконец, если $a_j^2 > 4\omega_j^2$, то матрица фазового потока примет вид

$$G_j = \frac{G_j^- \exp(\alpha_j^- t_j) + G_j^+ \exp(\alpha_j^+ t_j)}{\alpha_j^+ - \alpha_j^-}$$

$$\alpha_j^{\pm} = \frac{-a_j \pm \sqrt{a_j^2 - 4\omega_j^2}}{2}, \quad G_j^{\pm} = \begin{Vmatrix} \mp\alpha_j^{\mp} & \pm 1 \\ \mp\alpha_j^-\alpha_j^+ & \pm\alpha_j^{\pm} \end{Vmatrix}$$

Для уравнения осциллятора соответствующая матрица монодромии получается в виде произведения указанных элементарных матриц, описывающих преобразование фазовых координат на отдельных интервалах постоянства коэффициентов a и b.

Рассмотрим обобщенное уравнение осциллятора с коэффициентами $a(t) \equiv 0$, $b_k = -\overline{\omega}_k^2 (k = 1, ..., n)$, где постоянные $\overline{\omega}_k(t)$ могут принимать либо действительные, либо чисто мнимые ненулевые значения. Для этого уравнения матрица фазового потока на j-м интервале имеет вид

$$G_j = \begin{Vmatrix} \mathrm{ch}(\overline{\omega}_j t_j) & \dfrac{1}{\overline{\omega}_j}\mathrm{sh}(\overline{\omega}_j t_j) \\ \overline{\omega}_j \,\mathrm{sh}(\overline{\omega}_j t_j) & \mathrm{ch}(\overline{\omega}_j t_j) \end{Vmatrix}$$

Если окажется, что величина $\overline{\omega}_j = i\omega_j$ – чисто мнимая, то эта матрица совпадает с матрицей фазового потока гармонического осциллятора.

Теорема 2. Пусть решения $x_1(t)$, $x_2(t)$ обобщенного уравнения осциллятора с коэффициентами $a(t) \equiv 0$, $b_k = -\overline{\omega}_k^2 (k = 1, ..., n)$ удовлетворяют начальным условиям (2.1). Тогда значения этих решений и их производных в момент времени t'_n выражаются формулами

$$x_1(t'_n) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\gamma} P_\gamma \,\mathrm{ch}\, S_\gamma, \quad \dot{x}_1(t'_n) = \frac{\overline{\omega}_n}{2^{n-1}} \sum_{\gamma} \gamma_n P_\gamma \,\mathrm{sh}\, S_\gamma$$

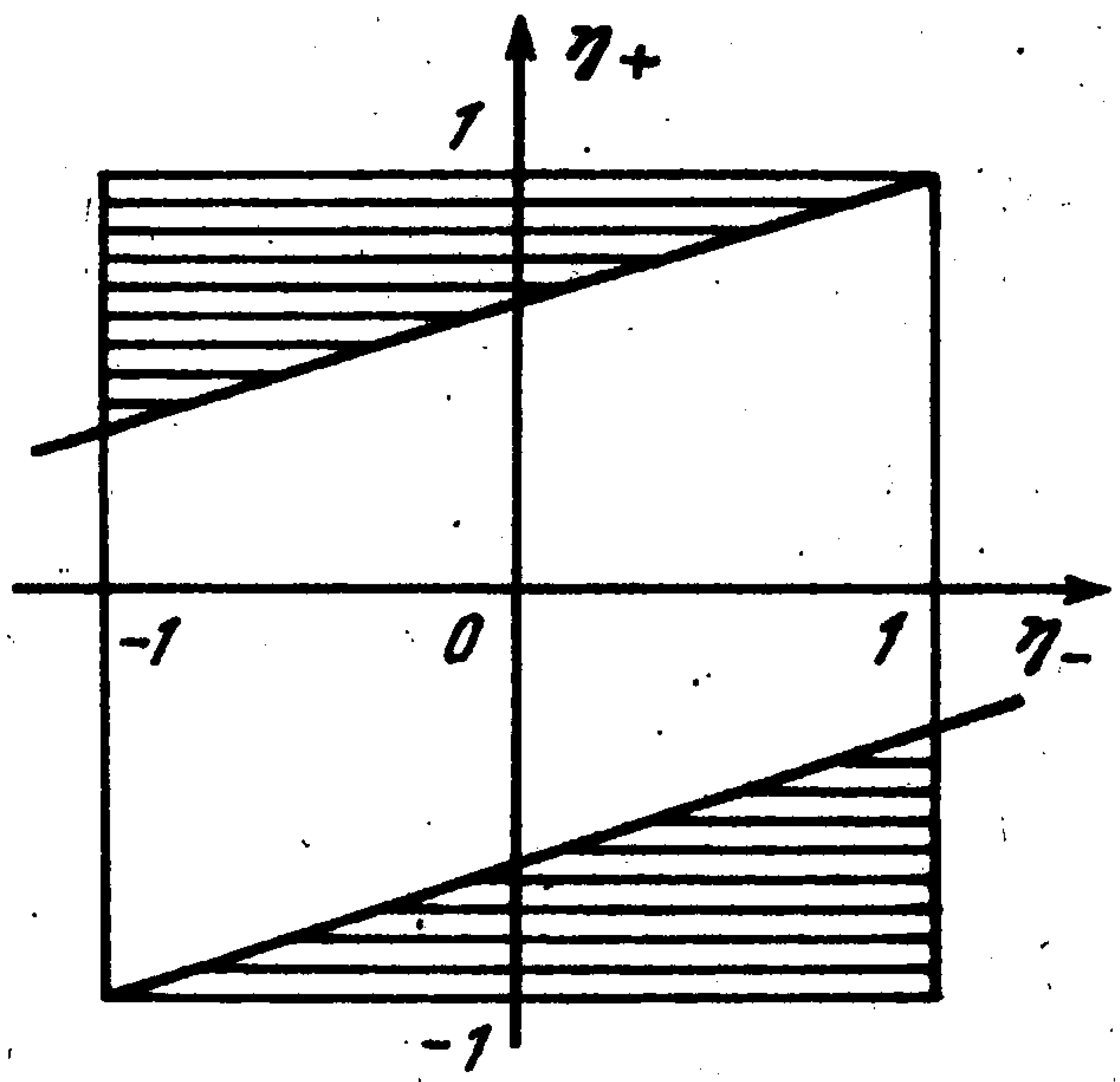
$$x_2(t'_n) = \frac{1}{\overline{\omega}_1 2^{n-1}} \sum_{\gamma} P_\gamma \,\mathrm{sh}\, S_\gamma, \quad \dot{x}_2(t'_n) = \frac{\overline{\omega}_n}{\overline{\omega}_1 2^{n-1}} \sum_{\gamma} \gamma_n P_\gamma \,\mathrm{ch}\, S_\gamma$$

$$P_\gamma = \prod_{r=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\gamma_r \overline{\omega}_r}{\gamma_{r+1}\overline{\omega}_{r+1}}\right), \quad S_\gamma = \sum_{r=1}^{n} \gamma_r \overline{\omega}_r t_r$$

где набор $\gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$ состоит из компонент γ_r, принимающих значения $\gamma_1 = 1$, $\gamma_r = \pm 1$ $(r = 2, ..., n)$, а суммирование осуществляется по всем таким наборам.

Для уравнения Хилла с кусочно-постоянными коэффициентами: $a(t) \equiv 0$, $b_k = \omega_k^2 (k = 1, ..., n)$, можно принять $\overline{\omega}_k = i\omega_k$. Тогда компоненты матрицы монодромии даются следствием.

Следствие 1. Пусть решения $x_1(t)$, $x_2(t)$ уравнения Хилла с кусочно-постоянной функцией $\omega(t)$ при $t = 0$ удовлетворяют начальным условиям (2.1). Тогда утверждение теоремы 2 справедливо при замене $\overline{\omega}_k$ на ω_k и гиперболических функций на соответствующие тригонометрические с изменением знака полученного таким образом выражения для $\dot{x}_1(t_n')$.



Фиг. 1

3. Двухступенчатое кусочно-постоянное воздействие. С помощью формул предыдущего раздела исследуем резонансные области для нескольких систем, описываемых дифференциальными уравнениями различного типа.

Система 1. Пусть движение описывается уравнением Хилла с кусочно-постоянной периодической функцией $b = \omega^2(t)$, причем

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_1, & 0 \leqslant t < t_1 \\ \omega_2, & t_1 \leqslant t < t_2' = t_1 + t_2 = \tau \end{cases} \tag{3.1}$$

Воспользуемся теоремой 1 и учтем, что $D = 1$. Изучим сначала условие резонанса $|a_{11} + a_{22}| > 2$. Обозначим $\tau_1 = \omega_1 t_1$, $\tau_2 = \omega_2 t_2$. В соответствии со следствием 1 рассматриваемое условие принимает вид

$$|\varkappa_+\eta_+ - \varkappa_-\eta_-| > 2 \tag{3.2}$$

где $\varkappa_\pm = (\omega_1 \pm \omega_2)^2/(2\omega_1\omega_2)$, $\eta_\pm = \cos(\tau_1 \pm \tau_2)$. Очевидно, что при любых положительных значениях ω_1, ω_2 имеем $\varkappa_+ \geqslant 2$, $\varkappa_- \geqslant 0$. Равенства $\varkappa_+ = 2$, $\varkappa_- = 0$ достигаются тогда и только тогда, когда $\omega_1 = \omega_2$. Условие параметрического резонанса можно представить в виде совокупности неравенств

$$\eta_+ > \frac{2}{\varkappa_+} + \frac{\varkappa_-}{\varkappa_+}\eta_- \quad \text{либо} \quad \eta_+ < -\frac{2}{\varkappa_+} + \frac{\varkappa_-}{\varkappa_+}\eta_-$$

Чтобы получить область резонанса, из квадрата $|\eta_-| \leqslant 1$, $|\eta_+| \leqslant 1$ следует вырезать полосу, заключенную между прямыми

$$\eta_+ = \frac{2}{\varkappa_+} + \frac{\varkappa_-}{\varkappa_+}\eta_-, \quad \eta_+ = -\frac{2}{\varkappa_+} + \frac{\varkappa_-}{\varkappa_+}\eta_-$$

Отметим, что $\varkappa_-/\varkappa_+ < 1$, так что угол наклона указанных прямых не превышает $\pi/4$. При этом первая из них проходит через точку (1, 1), а вторая – через точку (–1, –1).

На фиг. 1 области, соответствующие параметрическому резонансу, заштрихованы. Они существуют при любых не равных друг другу ω_1 и ω_2 и исчезают только при $\omega_1 = \omega_2$.

Согласно теореме 1 резонанс в случае кратных мультипликаторов отсутствует тогда и только тогда, когда одновременно выполнены равенства

$$a_{21} = a_{12} = 0$$

С учетом принятых обозначений имеем однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных $\sin(\tau_1 + \tau_2)$, $\sin(\tau_1 - \tau_2)$. Если $\omega_1 \neq \omega_2$, определитель системы отличен от нуля, и ее решением служат

$$\sin(\tau_1 + \tau_2) = 0, \quad \sin(\tau_1 - \tau_2) = 0$$

что отвечает углам квадрата на фиг. 1. Таким образом, параметрический резонанс будет иметь место также и в случае кратных мультипликаторов, а заштрихованные области на фиг. 1 включают границу, кроме точек (1, 1) и (–1, –1).

Система 2. Пусть движение в малой окрестности неустойчивого равновесия описывается уравнением с коэффициентами $a \equiv 0$, $b = -\omega^2(t)$, причем функция $\omega(t)$ имеет вид (3.1).

Учтем, что $D = 1$. Изучим условие резонанса $|a_{11} + a_{22}| > 2$. В соответствии с теоремой 2 рассматриваемое условие принимает вид (3.2), где коэффициенты $\varkappa_{\pm}$, – те же, что в системе 1 и $\eta_{\pm} = \operatorname{ch}(\tau_1 \pm \tau_2)$. На плоскости переменных (η_+, η_-) область допустимых значений есть угол, определенный неравенствами $\eta_- \geqslant 1$; $\eta_+ \geqslant \eta_-$, поскольку $\tau_1 \geqslant 0$ и $\tau_2 \geqslant 0$. Как и следовало ожидать, этот угол весь принадлежит области параметрического резонанса, за исключением точки вырождения (1, 1), для которой $\tau_1 = \tau_2 = 0$.

Система 3. Пусть $a \equiv 0$, $b = -\overline{\omega}^2(t)$, причем $\overline{\omega}$ может принимать как действительные, так и чисто мнимые значения, например,

$$\overline{\omega}(t) = \begin{cases} \omega_1, & 0 \leqslant t < t_1 \\ i\omega_2, & t_1 \leqslant t < t_2' = t_1 + t_2 = \tau \end{cases}$$

По теореме 2 условие $|a_{11} + a_{22}| > 2$ можно представить в виде

$$\eta > 1 + \varkappa\xi \text{ или } \eta < -1 + \varkappa\xi, \quad \varkappa = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$$

где $\eta = \operatorname{ch}\tau_1 \cos\tau_2$, $\xi = \operatorname{sh}\tau_1 \sin\tau_2$. На плоскости (ξ, η) в области между параллельными прямыми $\eta = 1 + \varkappa\xi$ и $\eta = -1 + \varkappa\xi$, которая всегда существует при конечных значениях $\varkappa$, параметрического резонанса не возникает. Кривые, соответствующие изменению параметра τ_2 при фиксированном параметре τ_1, представляют собой замкнутые эллипсы. Следовательно, при любых ω_1, ω_2 можно найти сочетание параметров τ_1, τ_2, при котором движение в окрестности неустойчивого положения равновесия будет стабилизировано.

Система 4. Изучим как может изменить области резонанса небольшая диссипация, добавленная в уравнение Хилла. Соответствующая система описывается дифференциальным уравнением (1.1), в котором $b = \omega^2$, $\omega(t)$ выражается формулой (3.1) и

$$a(t) = \begin{cases} a_1, & 0 \leqslant t < t_1 \\ a_2, & t_1 \leqslant t < t_1 + t_2 = \tau \end{cases}$$

где $a_1 \geqslant 0$, $a_2 \geqslant 0$ – постоянные, причем $\Omega_1^2 = 4\omega_1^2 - a_1^2 > 0$, $\Omega_2^2 = 4\omega_2^2 - a_2^2 > 0$. Матрица монодромии для данного случая получается в виде произведения соответствующих элементарных матриц фазового потока (см. разд. 2): $A = \sqrt{D}G_2'G_1'$.

Применим теорему 1 для случая $D < 1$. Выполнив умножение матриц, найдем условие параметрического резонанса

$$|\varkappa_+\eta_+ - \varkappa_-\eta_-| > 2\operatorname{ch}\left(\frac{a_1t_1 + a_2t_2}{2}\right)$$

$$\varkappa_{\pm} = \frac{4(\Omega_1 \pm \Omega_2)^2 - (a_1 + a_2)^2}{8\Omega_1\Omega_2}, \quad \eta_{\pm} = \cos(\Omega_1t_1 \pm \Omega_2t_2)$$

Предположим, что коэффициенты a_1, a_2 настолько малы, что $\varkappa_\pm > 0$. Тогда очевидно, что максимум модуля левой части критерия достигается при $\eta_+\eta_- = -1$ и равен $\varkappa_+ + \varkappa_-$. Достаточным условием возможности параметрического резонанса в системе будет

$$\varkappa_+ + \varkappa_- > 2\,\mathrm{ch}\left(\frac{a_1t_1 + a_2t_2}{2}\right) \tag{3.3}$$

В частности, если $\eta_+ = 1$ и $\eta_- = -1$, то

$$\Omega_1 t_1 = \frac{\pi}{2} + \pi(l+k), \quad \Omega_2 t_2 = -\frac{\pi}{2} + \pi(l-k), \quad l,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

Поэтому

$$\frac{a_1t_1 + a_2t_2}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_1}{\Omega_1} - \frac{a_2}{\Omega_2}\right)\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) + \left(\frac{a_1}{\Omega_1} + \frac{a_2}{\Omega_2}\right)\pi l\right]$$

Тем самым условие (3.3) ограничивает в зависимости от диссипации область значений натуральных чисел l и k, задающих соотношение длительностей участков постоянства коэффициентов дифференциального уравнения (1.1).

Система 5. Пусть уравнение движения имеет тот же вид, что для системы 4, но для каждого интервала постоянства коэффициентов выполнено $a_j^2 = 4\omega_j^2$, $j = 1;\ 2$. Условие параметрического резонанса эквивалентно неравенству

$$\frac{(a_1 - a_2)^2}{a_1a_2} > \frac{2[1 + \mathrm{ch}(\tau_1 + \tau_2)]}{\tau_1\tau_2}$$

где $\tau_1 = a_1t_1/2$, $\tau_2 = a_2t_2/2$. При фиксированных значениях $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$ это неравенство имеет решение, для которого будет параметрический резонанс, несмотря на диссипативный характер действующих сил.

Система 6. Пусть диссипация настолько велика, что $a_j^2 > 4\omega_j^2$. След матрицы A выразится формулой

$$\mathrm{tr}\,A = y_1y_2 + z_1z_2 - \varkappa(y_1 - z_1)(y_2 - z_2)$$

где

$$\varkappa = \frac{(\alpha_1^+ - \alpha_2^+)(\alpha_1^- - \alpha_2^-)}{(\alpha_2^+ - \alpha_2^-)(\alpha_1^+ - \alpha_1^-)}$$

$$0 < y_1 = \exp(\alpha_1^- t_1) < z_1 = \exp(\alpha_1^+ t_1) < 1$$

$$0 < y_2 = \exp(\alpha_2^- t_2) < z_2 = \exp(\alpha_2^+ t_2) < 1$$

Если заданы времена t_1, t_2, то

$$\alpha_1^- = \frac{\ln y_1}{t_1}, \quad \alpha_1^+ = \frac{\ln z_1}{t_1}, \quad \alpha_2^- = \frac{\ln y_2}{t_2}, \quad \alpha_2^+ = \frac{\ln z_2}{t_2}$$

$$\mathrm{tr}\,A = z_1z_2 + y_1y_2 - \frac{(t_2\ln z_1 - t_1\ln z_2)(t_2\ln y_1 - t_1\ln y_2)}{(\ln z_1 - \ln y_1)(\ln z_2 - \ln y_2)}(y_1 - z_1)(y_2 - z_2)$$

Стоящая в числителе дроби квадратичная форма по временам t_1, t_2, может быть сделана сколь угодно большой по абсолютной величине, и, следовательно, выполнение условия параметрического резонанса в данном случае всегда может быть обеспечено.

Система 7. Используем результаты анализа системы 1 и рассмотрим условия резонанса для уравнения Хилла, в котором

$$\omega(t)=\begin{cases}(1+\varepsilon)\omega, & 0\leq t<\tau/2\\ (1-\varepsilon)\omega, & (\tau/2)\leq t<\tau, \quad \varepsilon<1\end{cases}$$

причем $\tau = 2\pi/\nu$. Имеем уравнение Мейсснера [2]. Это уравнение рассматривалось в [1, 3] с целью иллюстрации асимптотических оценок резонансных областей при малых значениях ε. Укажем резонансные области без предположения о малости ε. Менее полный результат был получен ранее [2, 6]. В обозначениях системы 1 будем иметь

$$\omega_1=(1+\varepsilon)\omega,\quad \omega_2=(1-\varepsilon)\omega,\quad t_1=t_2=\frac{\tau}{2}$$

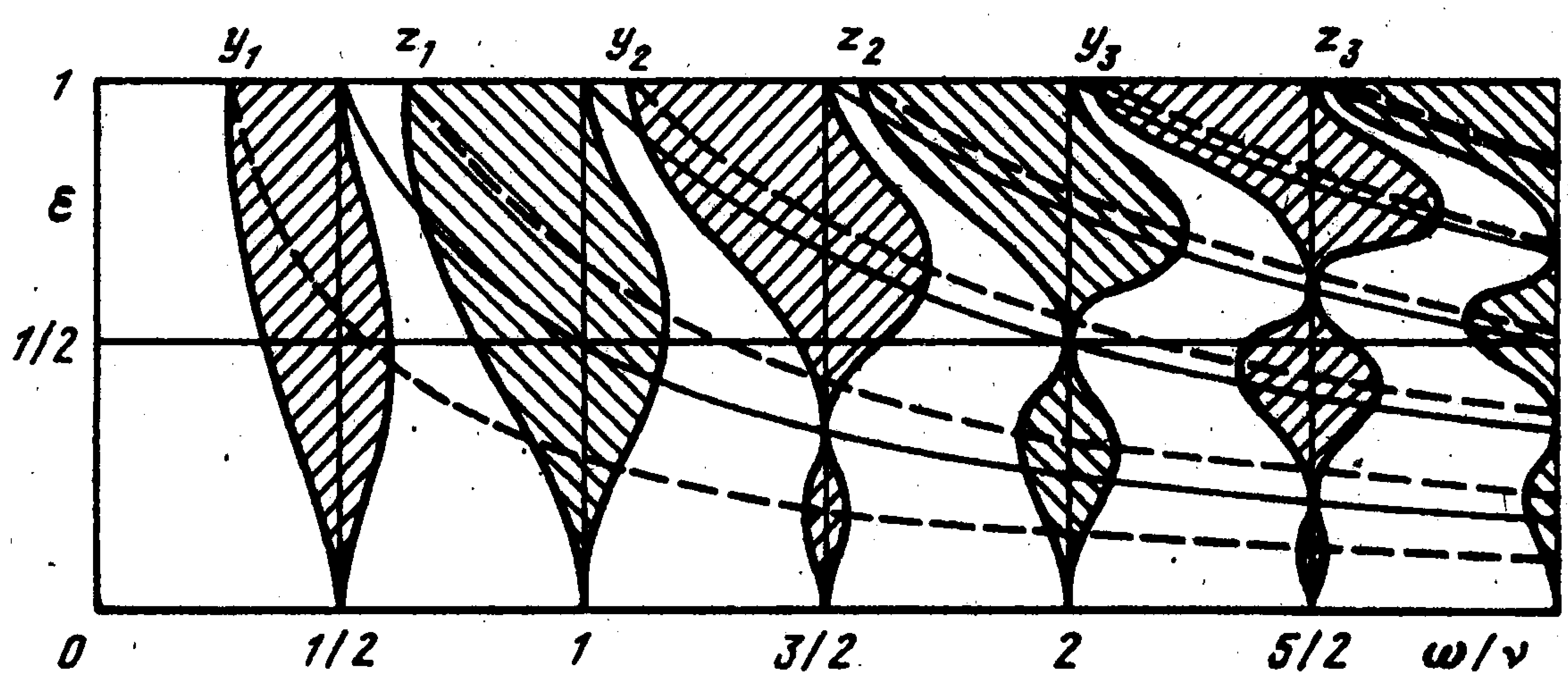
$$\varkappa_+=\frac{2}{1-\varepsilon^2},\quad \varkappa_-=\frac{2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2},\quad \tau_1=\frac{\omega\tau(1+\varepsilon)}{2},\quad \tau_2=\frac{\omega\tau(1-\varepsilon)}{2}$$

Так как $D = 1$, получаем два случая реализации параметрического резонанса.

Случай 1 $\varepsilon^2\sin^2(\chi\varepsilon)\geq\sin^2\chi$

Случай 2 $\varepsilon^2\cos^2(\chi\varepsilon)\geq\cos^2\chi,\quad \chi=\omega\tau/2=\pi\omega/\nu$

На фиг. 2 показаны области резонансных соотношений параметров. Штриховка слева–вниз–направо выделяет области, соответствующие случаю 1, а штриховка сле-



Фиг. 2

ва–вверх–направо – случаю 2. Величины y_i, z_i, (i = 1, 2, ...) – последовательные корни уравнений $\pi y = \operatorname{ctg}\pi y$, $\pi z = -\operatorname{tg}\pi z$ соответственно. Эти корни задают аргументы максимумов для функций $f_1(\varepsilon)=\varepsilon^2\sin^2\chi\varepsilon$, $f_2(\varepsilon)=\varepsilon^2\cos^2\chi\varepsilon$ при фиксированном отношении ω/ν. Например, значения аргумента ε, при которых функция $f_1(\varepsilon)$ достигает максимума, выражаются формулой $\varepsilon_i = z_i\nu/\omega$. Точно так же вычисляются аргументы максимумов для функции $f_2(\varepsilon)$. Указанным аргументам максимумов отвечают штриховые линии. Аналогично пересчитываются и нули функций $f_1(\varepsilon)$ и $f_2(\varepsilon)$. Графики соответствующих обратно пропорциональных зависимостей изображены сплошными тонкими линиями. На границе заштрихованных областей параметрический резонанс также будет иметь место, за исключением точек, для которых одновременно $\sin 2\chi = 0$, $\sin 2\chi\varepsilon = 0$. Таким точкам соответствуют значения $\omega/\nu = n/2$, $\varepsilon = k/n$, где k, n – целые числа. Точки на фиг. 2, порождающие резонансные области при $\varepsilon = 0$, соответствуют на фиг. 1 точкам $\eta_+ = \pm1$, $\eta_- = 0$. Сказанное дополняет известную картину резонансных областей в данном случае [6]. Отметим также, что в отличие от результатов [2] границы областей параметрического резонанса не содержат самопересечений.

Система 8. Рассмотрим колебания маятника переменной длины $l(t)$ в параллельном поле тяжести и запишем его уравнение движения в виде

$$\ddot{\varphi}+\frac{2\dot{l}}{l}\dot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$$

Имеем $a(t)=2\dot{l}/l$, D = 1 независимо от вида функции $l(t)$. Предположим, что длина маятника меняется периодически по закону

$$l(t)=\begin{cases} l_1, & 0\leqslant t<t_1 \\ l_2, & t_1\leqslant t<t_1+t_2, \quad \tau=t_1+t_2 \end{cases}$$

При изменении t внутри пределов постоянства функции $l(t)$ будет справедливо уравнение колебаний математического маятника, которое для малых по величине колебаний можно приближенно представить в виде уравнения Хилла с функцией $\omega(t)$ вида (3.1), причем $\omega_1=\sqrt{g/l_1}$, $\omega_2=\sqrt{g/l_2}$.

Все это напоминает постановку задачи для рассмотренной выше системы 1. Различие в том, что в моменты скачкообразного (очень быстрого) изменения длины маятника нельзя в его уравнении движения пренебречь членом, содержащим произведение скоростей $\dot{l}\dot{\varphi}$. В уравнении Хилла при скачкообразном изменении функции ω координата и скорость оставались непрерывными. В рассматриваемом примере координата φ в момент переключения будет непрерывной, а скорость $\dot{\varphi}$ в соответствии с теоремой о кинетическом моменте относительно точки подвеса изменится скачком вместе с изменением длины маятника:

$$l_2^2\dot{\varphi}^+=l_1^2\dot{\varphi}^-\rightarrow\dot{\varphi}^+=\lambda^2\dot{\varphi}^-, \quad \lambda=l_1/l_2$$

где $\dot{\varphi}^+$ – значение угловой скорости после, а $\dot{\varphi}^-$ – до скачкообразного изменения длины маятника. При изменении длины со значения l_2 на значение l_1 соответствующий коэффициент пересчета угловой скорости поменяется на взаимно обратный.

Теперь можно воспользоваться критерием параметрического резонанса, приняв $\tau_1=\omega_1 t_1$, $\tau_2=\omega_2 t_2$. Выпишем компоненты матрицы монодромии:

$$a_{11}=\cos\tau_1\cos\tau_2-\lambda^2\omega_1\omega_2^{-1}\sin\tau_1\sin\tau_2$$

$$a_{21}=-\lambda^{-2}\omega_2\cos\tau_1\sin\tau_2-\omega_1\sin\tau_1\cos\tau_2$$

$$a_{12}=\omega_1^{-1}\sin\tau_1\cos\tau_2+\lambda^2\omega_2^{-1}\cos\tau_1\sin\tau_2$$

$$a_{22}=-\lambda^{-2}\omega_1\omega_2\sin\tau_1\sin\tau_2+\cos\tau_1\cos\tau_2$$

Отметим в формулах для a_{21} и a_{22} наличие множителя λ^{-2}, связанного с тем, что период функции $l(t)$ заканчивается, когда она принимает значение, которое было в начале периода.

В соответствии с теоремой 1 условие резонанса $|a_{11}+a_{22}|>2$ принимает вид (3.2), где $\varkappa_{\pm}=(\omega_1\lambda\pm\omega_2\lambda^{-1})^2/(2\omega_1\omega_2)$. Очевидно, что при любых положительных значениях l_1, l_2 имеем $\varkappa_+\geqslant 2$, $\varkappa_-\geqslant 0$. Равенства $\varkappa_+=2$, $\varkappa_-=0$ достигаются тогда и только тогда, когда $l_1=l_2$.

В случае кратных мультипликаторов сохраняются выводы, полученные для системы 1. В итоге вновь имеем резонансные области, изображенные на фиг. 1.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (98-01-00065, 98-01-00805) и Федеральной целевой программы "Интеграция".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В.В., Морозова О.И.* О необходимых и достаточных условиях абсолютной устойчивости систем второго порядка // Автоматика и телемеханика. 1985. № 8. С. 161–164.
2. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 271 с.
3. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1: Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
4. *Голубев Ю.Ф.* Резонансы линейных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН № 43. М.: Ин-т прикл. математики. 1997. 31 с.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Физматгиз, 1961. 703 с.
6. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.
7. *Стретт М.И.О.* Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. Харьков; Киев: Гос. изд-во Украины, 1935. 238 с.
8. *Якобович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 715 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.XI.1997