УДК 531.36 + 521.1

© 1999 г. А.А. Джумабаева, А.Л. Куницын, А.Т. Туякбаев

О СТАБИЛИЗАЦИИ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ В СИСТЕМЕ ЗЕМЛЯ – ЛУНА

Исследуется поступательно-вращательное движение орбитальной станции (ОС) в системе Земля – Луна, рассматриваемой как тело переменного состава с твердой оболочкой и установленным на ней двигателем малой тяги, имеющим постоянную автономную ориентацию во вращающейся вместе с Луной системе координат. Показывается, что с помощью малого и постоянного по модулю реактивного ускорения можно стибилизировать как сами новые точки либрации, так и положения относительного равновесия ОС. При этом каждой величине реактивного ускорения в зависимости от его ориентации соответствует целое семейство точек либрации, окружающих классическую коллинеарную точку, но лишь часть из них может быть устойчивой. Показывается, что при учете эллиптичности орбиты Луны в окрестности этих точек могут возникать периодические поступательно-вращательные движения ОС с периодом, равным периоду обращения Луны.

В проведенных ранее исследованиях задача об устойчивости положений относительного равновесия ОС в окрестности коллинеарных точек либрации системы Земля – Луна, как правило, решалась в ограниченной постановке: ОС либо считалась материальной точкой [1–4], либо предполагалось, что нахождение центра масс ОС (рассматриваемой как твердое тело или гиростат) в точке либрации априори обеспечивается специальными управляющими силами [5], природа которых и законы управления не обсуждались.

1. Рассмотрим движение ОС в поле тяготения Земли и Луны, считая последние точками с массами m_1 и m_2, движущимися относительно друг друга по эллиптическим кеплеровым орбитам. В отличие от классической эллиптической задачи трех тел будем считать ОС не точечной массой, а телом переменного состава с твердой оболочкой и трехосным эллипсоидом инерции. Массу ОС m будем предполагать изменяющейся по экспоненциальному закону $m = m_0\exp(-\lambda t)$, $\lambda > 0$. При этом будем считать, что по мере выгорания рабочего тела положение центра масс ОС, направления главных осей инерции относительно ее корпуса, а также величины соответствующих радиусов инерции остаются неизменными (что можно обеспечить, например, подобным изменением размеров рабочего тела).

Будем полагать, что реактивный двигатель, сообщающий ОС постоянное по модулю реактивное ускорение $\mathbf{w}$, постоянно проходящее через ее центр масс, имеет автономную систему стабилизации направления тяги во вращающейся вместе с Луной системе координат $Oxyz$, начало которой находится в центре масс Земли и Луны, оси Ox и Oy лежат в плоскости их орбит (ось Ox направлена по линии Земля – Луна), а ось Oz перпендикулярна этой плоскости.

Введем еще две прямоугольные системы координат с началом в центре масс станции: орбитальную $CXYZ$ (ось CZ направлена вдоль радиус-вектора центра масс C, проведенного из точки O, ось CX – по направлению переносной скорости центра масс C, ось CY – дополняет систему до правой) и связанную с твердой оболочкой станции $Cx_1x_2x_3$ с осями, направленными по главным осям инерции ОС. Положение связанной системы координат относительно орбитальной зададим с помощью углов Эйлера ψ, φ, θ.

При вычислении силовых функций U_1 и U_2 сил ньютоновского притяжения ОС Землей и Луной будем считать, что ее характерный размер l много меньше расстояний $r_i = [(x - a_i)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$ (i = 1,2; a_1, a_2 – координаты Земли и Луны в системе $Oxyz$) между ОС и Землей и Луной. Тогда пренебрегая членами порядка $(l/a)^3$ и выше (a – полуось орбиты Луны), примем следующие приближенные выражения для $U_i (i = 1,2)$ [6]:

$$U_i = \frac{\mu_i m}{r_i} - \frac{3\mu_i}{2r_i^3}\sum_{j=1}^{3}\left(A_j\gamma_{ij}^2 - \frac{A_j}{3}\right) \tag{1.1}$$

Здесь μ_1 и μ_2 – гравитационные параметры Земли и Луны соответственно, A_j – главные центральные моменты инерции ОС, а

$$\gamma_{ij} = [(x - a_i)a_{1j} + ya_{2j} + za_{3j}]r_i^{-1} \tag{1.2}$$

– направляющие косинусы радиус-векторов r_i относительно связанных осей $Cx_1x_2x_3$, где величины a_{sj} выражаются через углы Эйлера по формулам

$$\begin{aligned}
&a_{11} = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta\\
&a_{12} = -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta\\
&a_{13} = \sin\psi\sin\theta,\ a_{21} = \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta\\
&a_{22} = -\sin\psi\sin\varphi - \cos\psi\cos\varphi\cos\theta,\ a_{23} = -\cos\psi\sin\theta\\
&a_{31} = \sin\varphi\sin\theta,\ a_{32} = \cos\varphi\sin\theta,\ a_{33} = \cos\theta
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Учитывая, что зависящие от геометрии масс члены, входящие в (1.1), пропорциональны величине $(l/a)^2$, имеющей порядок 10^{-14} при $l \le 30$ м, их нецелесообразно учитывать в уравнениях движения центра масс, т.е. поступательное движение ОС можно отделить от вращательного (но не наоборот).

Выбирая в качестве новой независимой переменной истинную аномалию орбиты Луны ν и переходя к координатам Нехвила [2] ξ, η, ζ по формулам (e – эксцентриситет орбиты Луны)

$$x = \rho\xi,\ y = \rho\eta,\ z = \zeta,\ \rho = a(1 - e^2)/(1 - e\cos\nu)$$

а также учитывая, что условие неизменности величины реактивного ускорения и его ориентации во вращающейся системе позволяет считать силовое поле потенциальным, получим следующие уравнения движения центра масс ОС (точкой обозначено дифференцирование по ν, а за единицу длины принята величина a):

$$\begin{aligned}
&\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = -\psi(\nu)\frac{\partial W_1}{\partial \xi}\\
&\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = -\psi(\nu)\frac{\partial W_1}{\partial \eta}\\
&\ddot{\zeta} = \psi(\nu)\frac{\partial W_1}{\partial \zeta}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь

$$W_1 = -\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} + \frac{\zeta^2}{2}e\cos\nu - \left(\frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2}\right) - \tilde{w}(1 - e\cos\nu)^2\left(\sigma_\xi\xi + \sigma_\eta\eta + \sigma_\zeta\zeta\right)$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2},\quad \psi(\nu) = \frac{1}{1-e\cos\nu},\quad \tilde{w} = \frac{wa^2\left(1-e^2\right)^2}{\mu_1+\mu_2}$$

$$\rho_1^2 = (\xi+\mu)^2+\eta^2+\zeta^2,\quad \rho_2^2 = (\xi+\mu-1)^2+\eta^2+\zeta^2$$

а σ_ξ, σ_η, σ_ζ – направляющие косинусы реактивного ускорения во вращающейся системе $O\xi\eta\zeta$.

Полная потенциальная энергия, определяющая вращательное движение ОС, запишется как [6, 7]

$$\tilde{W}_2 = \frac{1}{2}\dot{\nu}\sum_{s=1}^{3} A_s a_{3s}^2 + \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\mu_i}{\rho_i^3}\sum_{j=1}^{3}\left(A_j\gamma_{ij}^2 - \frac{A_j}{3}\right) \tag{1.5}$$

Заметим, что как система (1.4), так и потенциальная энергия (1.5) – аналитические функции эксцентриситета орбиты Луны e, который можно рассматривать как малый параметр. При обращении этого параметра в нуль система уравнений поступательно-вращательного движения ОС становится автономной и обладающей обобщенным интегралом энергии $T_2 + W_1 + \tilde{W}_2 = \mathrm{const}$ (T_2 – квадратичная часть кинетической энергии, выраженной через ξ, η, ζ, φ, θ, ψ и их производные). При $e \neq 0$ указанная система уравнений является периодической с периодом 2π относительно истинной аномалии ν.

2. Покажем, что при $e = 0$ система уравнений поступательно-вращательного движения ОС имеет семейство стационарных движений, которым соответствуют положения относительного равновесия ОС во вращающейся системе координат $O\xi\eta\zeta$. Как следует из системы (1.3), равновесные значения координат центра масс ОС (новые точки либрации) найдутся из условий, определяющих стационарные значения функции W_1 и приводящих к уравнениям

$$\tilde{w}\sigma_\xi + \xi - \alpha_1(\xi+\mu) - \alpha_2(\xi+\mu-1) = 0$$

$$\tilde{w}\sigma_\eta + (1-\alpha)\eta = 0,\quad \tilde{w}\sigma_\zeta - \alpha\zeta = 0 \tag{2.1}$$

$$\left(\alpha_1 = \frac{1-\mu}{\rho_1^3},\quad \alpha_2 = \frac{\mu}{\rho_2^3},\quad \alpha = \alpha_1+\alpha_2\right)$$

Из этих уравнений можно либо определять координаты точек либрации, задавшись величиной ускорения $\tilde{w}$ и направляющими косинусами σ_ξ, σ_η, σ_ζ, либо наоборот – по заданным координатам точек либрации находить необходимую величину реактивного ускорения и его ориентацию. Первый путь малоперспективен, поскольку приводит к необходимости решать сложную систему нелинейных уравнений относительно координат ξ, η, ζ точек либрации. Обратная постановка задачи позволяет сразу найти величину необходимого ускорения $\tilde{w}$ и его ориентацию.

Действительно, возводя каждое из уравнений (2.1) в квадрат и складывая, найдем

$$\tilde{w}^2 = (\xi - \alpha_1(\xi+\mu) - \alpha_2(\xi+\mu-1))^2 + (1-\alpha)^2\eta^2 + \alpha^2\zeta^2 \tag{2.2}$$

В малой окрестности классической точки либрации необходимые значения $\tilde{w}$ будут, очевидно, малы и их можно вычислить, разлагая правую часть (2.2) в ряд по степеням отклонений

$$\xi_* = \bar{\xi} - \xi_0,\ \eta_* = \bar{\eta} - \eta_0,\ \zeta_* = \bar{\zeta} - \zeta_0$$

где ξ_0, η_0, ζ_0 – координаты классических точек либрации. Для коллинеарных точек либрации (наиболее интересных с прикладной точки зрения) будем иметь (нулевой индекс здесь и далее означает, что указанные величины должны быть взяты в классических точках либрации)

$$\tilde{w}^2 = \left[\frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2}\right]_0^2 \xi_*^2 + \left[\frac{\partial^2 W_1}{\partial \eta^2}\right]_0^2 \eta_*^2 + \left[\frac{\partial^2 W_1}{\partial \zeta^2}\right]_0^2 \zeta_*^2 + \ldots \quad (2.3)$$

Таким образом, в первом приближении для одной и той же величины ускорения $\tilde{w}$ получаем бесчисленное множество новых точек либрации, расположенных на поверхности эллипсоида, окружающего классическую точку либрации, с центром в этой точке. Необходимая ориентация вектора реактивного ускорения (его направляющие косинусы) находится из системы (2.1).

Для входящих в (2.3) производных получим

$$\left[\frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2}\right]_0 = -(1+2\alpha_0),\ \left[\frac{\partial^2 W_1}{\partial \eta^2}\right] = \alpha_0 - 1,\ \left[\frac{\partial^2 W_1}{\partial \zeta^2}\right]_0 = \alpha_0$$

$$\left(\alpha_0 = (\alpha_1 + \alpha_2)_0\right)$$

Так, для залунной классической точки либрации, обозначая через ε ($\varepsilon \approx 0{,}156...$) ее расстояние от Луны, будем иметь

$$\alpha_0 = \mu(1+\varepsilon)^{-3} + (1-\mu)\varepsilon^{-3} \approx (1-\mu)\varepsilon^{-3}$$

Отсюда для значений полуосей эллипсоида a_ξ, a_η, a_ζ с центром в этой точке найдем

$$a_\xi \approx \frac{1}{2}\tilde{w}\varepsilon^3,\ a_\eta \approx \tilde{w}\varepsilon^3,\ a_\zeta \approx \tilde{w}\varepsilon^3/(1-\mu)$$

Таким образом, рассматриваемый эллипсоид близок (поскольку $\mu \ll 1$) к сжатому вдоль оси $O\xi$ эллипсоиду вращения с полуосями по двум другим координатным осям, приблизительно в раза превышающими полуось, соответствующую оси вращения.

Перейдем к нахождению положений относительного равновесия самой ОС как твердого тела в орбитальной системе координат $CXYZ$. С учетом сделанного предположения о постоянстве радиусов инерции ОС в качестве потенциальной энергии, характеризующей вращательное движение ОС, вместо (1.5) можно рассматривать функцию $W_2 = \tilde{W}_2/m$, которая не будет явно зависеть от времени, поскольку в ней вместо моментов инерции A_j будут фигурировать квадраты радиусов инерции I_j^2, которые заменят соответствующие моменты инерции и в динамических уравнениях Эйлера. В качестве лагранжевых координат, определяющих вращательное движение ОС, возьмем углы Эйлера ψ, φ, θ. Тогда положения относительного равновесия ОС определятся из системы уравнений

$$\frac{\partial W_2}{\partial \varphi} = 0,\ \frac{\partial W_2}{\partial \theta} = 0,\ \frac{\partial W_2}{\partial \psi} = 0 \quad (2.4)$$

Кроме радиусов инерции эти уравнения будут содержать в качестве параметров координаты центра масс, являющиеся решениями уравнений (2.1). Не рассматривая общий случай ввиду громоздкости получающихся уравнений, ограничимся множеством положений равновесия при $\zeta = 0$. Обращаясь к выражению (1.5) при учете соотношений (1.2) и (1.3), можно убедиться, что первые два уравнения (2.4) удовлетворяются для любых ξ и η при $\varphi = 0$ и $\theta = \pi/2$, а из последнего находится равновесное значение угла $\psi = \psi_*$, где

$$\operatorname{tg}\psi_* = \frac{2\eta\left[\beta_1(\xi+\mu) + \beta_2(\xi+\mu-1)\right]}{\beta_1\left[(\xi+\mu)^2 - \eta^2\right] + \beta_2\left[(\xi+\mu-1)^2 - \eta^2\right]} \quad (2.5)$$

$$\beta_1 = (1-\mu)/\rho_1^5,\ \beta_2 = \mu/\rho_2^5$$

3. Исследуем устойчивость найденных положений относительного равновесия ОС. Поскольку в уравнения движения центра масс не входят фазовые координаты, определяющие вращательное движение ОС, то устойчивость положений относительного равновесия центра масс (точек либрации) можно рассматривать, учитывая только уравнения (1.4). Отметим, что потенциальная энергия W_1 и при наличии реактивного ускорения $\tilde{w}$, как легко убедиться, не имеет изолированного минимума при $e = 0$ ни при каких значениях своих переменных, и, следовательно, можно рассчитывать лишь на возможность гироскопической стабилизации точек либрации, т.е. получение только необходимых условий устойчивости. Для этого введем возмущения

$$y_1 = \xi - \bar{\xi},\ y_2 = \eta - \bar{\eta},\ y_3 = \zeta - \bar{\zeta}$$

и составим уравнения возмущенного движения, полагая в (1.4) $e = 0$. Опуская нелинейные члены, будем иметь:

$$\begin{aligned} &\ddot{y}_1 - 2\dot{y}_2 + b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3 = 0 \\ &\ddot{y}_2 + 2\dot{y}_1 + b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_{23}y_3 = 0 \\ &\ddot{y}_3 + b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b_{33}y_3 = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

где

$$b_{11} = -1 - \alpha_1\left[3\left(\frac{\bar{\xi}+\mu}{\rho_1}\right)^2 - 1\right] - \alpha_2\left[3\left(\frac{\bar{\xi}+\mu-1}{\rho_2}\right)^2 - 1\right]$$

$$b_{21} = b_{12} = -3\bar{\eta}\left[\beta_1\left(\bar{\xi}+\mu\right) + \beta_1\left(\bar{\xi}+\mu-1\right)\right],\ b_{31} = b_{13} = b_{21}\bar{\zeta}/\bar{\eta}$$

$$b_{22} = -1 + \alpha - 3\bar{\eta}^2\beta,\ b_{23} = b_{32} = -3\bar{\zeta}\bar{\eta}\beta,\ b_{33} = \alpha - 3\bar{\zeta}^2\beta.$$

$(\beta = \beta_1 + \beta_2)$

Соответствующие значения $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ величины реактивного ускорения и его ориентация находятся из уравнений равновесия (2.1). Поскольку само ускорение не входит в выражения для коэффициентов системы (3.1), область устойчивости целесообразно строить в конфигурационном пространстве ξ, η, ζ, не используя уравнений равновесия (2.1), что существенно упрощает решение задачи (при этом выражения для вторых частных производных, входящих в коэффициенты системы (3.1), полностью совпадают с соответствующими выражениями для классической ограниченной задачи трех тел).

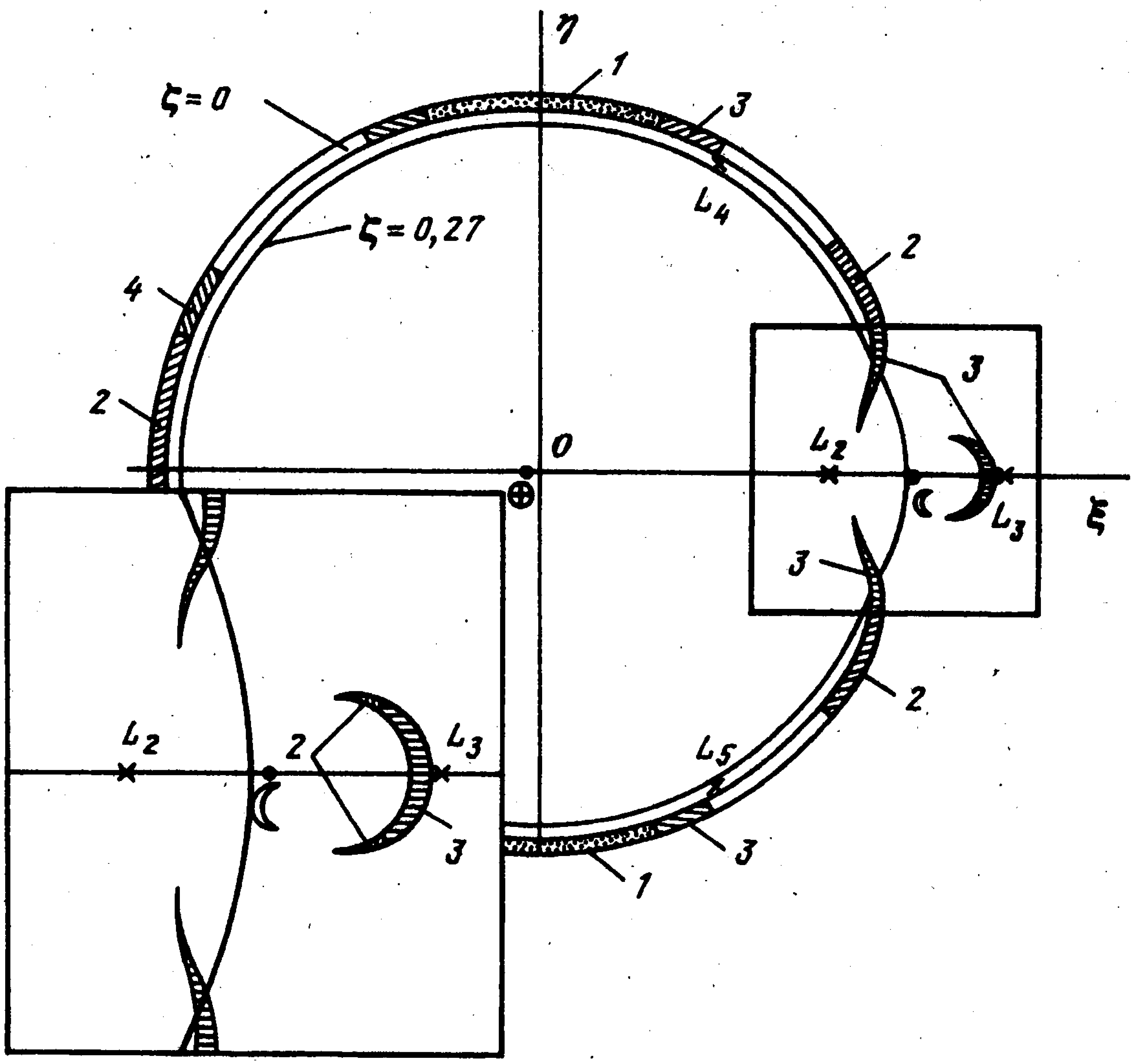
Необходимые условия устойчивости тривиального решения системы (3.1) заключаются в требовании вещественности и отрицательности всех корней характеристического уравнения

$$\lambda^6 + b_4\lambda^4 + b_2\lambda^2 + b_0 = 0 \tag{3.2}$$

$$b_4 = 4 + b_{11} + b_{22} + b_{33}$$

$$b_2 = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - b_{31}^2 - b_{23}^2 + b_{22}b_{33} + b_{11}b_{33} + 4b_{33}$$

$$b_0 = b_{11}b_{22}b_{33} - b_{31}^2b_{22} - b_{23}^2b_{11} - b_{21}^2b_{33} + 2b_{31}b_{12}b_{32}$$



относительно λ^2. Этому требованию можно удовлетворить, используя совместно условие отрицательности дискриминанта кубического уравнения, соответствующего (3.2) (гарантирующего вещественность корней) и условия Рауса – Гурвица (гарантирующие их отрицательность), записываемые в данном случае как

$$\frac{1}{4}\left(\frac{2}{27}b_4^3-\frac{1}{3}b_2b_4+b_0\right)^2+\frac{1}{27^2}\left(3b_2-b_4^2\right)^3<0 \qquad (3.3)$$

$$b_4>0,\ b_0>0,\ b_4b_2>b_0$$

Множество значений координат, удовлетворяющих неравенствам (3.3), определяют бесчисленное множество устойчивых в первом приближении новых точек либрации. Это множество ограничено двусвязной поверхностью. На фигуре изображены сечения этой поверхности плоскостями $\zeta = 0$ (симметричная относительно оси $\eta = 0$ двусвязная область, состоящая из незамкнутого кольца и серповидной области, расположенной вблизи коллинеарной точки либрации L_3) и $\zeta = 0{,}27$ (практически сливающаяся в одну линию), полученные на ЭВМ. Область устойчивости, таким образом, распадается на две части: одна из них почти вся состоит из точек, сильно удаленных от Луны (☾), (на расстояние до Земли (⊕) и больше), другая же (намного меньших размеров) располагается вблизи внешней коллинеарной точки либрации L_3 и включает не только коллинеарные точки, но и точки, лежащие по обе стороны оси $O\xi$. Последние особенно привлекательны для использования в целях ретрансляции, поскольку обеспечивают одновременную видимость ОС с Луны и Земли.

Максимальное значение необходимого реактивного ускорения во всей области устойчивости составляет $\tilde{w}_{\max} = 0{,}51$, что для $w_{\max}$ дает $1{,}39 \cdot 10^{-3}$ м/с^2.

Заметим, что, хотя полученные условия устойчивости лишь необходимы, для рассматриваемой системы с потенциальными силами (т.е. допускающей представление в гамильтоновой форме) они будут и условиями полной устойчивости по Биркгофу за исключением некоторых резонансных множеств [8].

Исследуем теперь устойчивость найденной в разд. 2 ориентации ОС относительно орбитальной системы координат. Имея в виду получить достаточные условия устойчивости, составим вторые производные от потенциальной энергии W_2. Полагая $\varphi = 0$, $\theta = \pi/2$, $\psi = \psi_*$, найдем

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial\varphi\partial\psi} = \frac{\partial^2 W_2}{\partial\theta\partial\psi} = \frac{\partial^2 W_2}{\partial\varphi\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial\psi^2} = 3(I_3 - I_1)f_\psi, \quad \frac{\partial^2 W_2}{\partial\varphi^2} = (I_2 - I_1)f_\varphi, \quad \frac{\partial^2 W_2}{\partial\theta^2} = (I_2 - I_3)f_\theta$$

$$f_\psi = \left[(h_1 - h_2)\cos 2\psi - 2h_{12}\sin 2\psi\right]_* \tag{3.4}$$

$$f_\varphi = \left[3((h_1\cos^2\psi + h_2\sin^2\psi) + h_{12}\sin 2\psi) - 1\right]_*$$

$$f_\theta = \left[3((h_1\sin^2\psi + h_2\cos^2\psi) - h_{12}\sin 2\psi) - 1\right]_*$$

$$h_1 = \beta_1(\xi + \mu)^2 + \beta_2(\xi + \mu - 1)^2, \quad h_2 = \beta\eta^2$$

$$h_{12} = \left[\beta_1(\xi + \mu) + \beta_2(\xi + \mu - 1)\right]\eta$$

Звездочкой обозначен результат подстановки вместо величины ψ значения, определяемого формулой (2.5). Можно убедиться, что после этой подстановки для множества точек либрации, расположенных в окрестности точки L_3, где $\eta < \xi$, будем иметь $f_\psi > 0$. Функции f_φ, f_θ в этой области, как показали расчеты на ЭВМ, могут принимать, как положительные, так и отрицательные значения. При этом реализуются только два из возможных четырех различных случаев:

1) $f_\psi > 0, f_\varphi > 0, f_\theta > 0$ и 2) $f_\psi > 0, f_\varphi > 0, f_\theta < 0$.

Тогда достаточные условия устойчивости (заключающиеся в требовании положительности вторых производных, определяемых выражениями (3.4)) будут даваться следующими неравенствами, которым должны удовлетворять радиусы инерции ОС соответственно:

1) $I_2 > I_3 > I_1$; 2) $I_3 > I_2 > I_1$.

Аналогичные условия устойчивости можно получить и для других значений координат центра масс, расположенных вдали от Луны и представляющих меньший практический интерес. На фигуре в области устойчивости центра масс при $\zeta = 0$ отмечены области различных сочетаний знаков у функций f_ψ, f_φ и f_θ, в которых могут выполняться достаточные условия устойчивости посредством выбора специальной геометрии масс (в области 1: $f_\psi < 0, f_\varphi < 0, f_\theta > 0$, $(I_1 > I_2 > I_3)$; в области 2: $f_\psi > 0$, $f_\varphi > 0, f_\theta > 0$, $(I_2 > I_3 > I_1)$; в области 3: $f_\psi > 0, f_\varphi > 0, f_\theta < 0$, $(I_3 > I_2 > I_1)$; в области 4: $f_\psi < 0, f_\varphi > 0, f_\theta > 0$, $(I_2 > I_1 > I_3)$; в незаштрихованной части области достаточные условия не выполняются).

Полученные результаты по существованию и устойчивости положений относительного равновесия ОС позволяют сделать определенные выводы о движении и при отличном от нуля, но достаточно малом эксцентриситете e. Так, при $e \neq 0$ как система уравнений (1.4), так и система уравнений, определяющих вращательное движение ОС, является 2π-периодической относительно истинной аномалии Луны v (выполняющей роль независимой переменной) и аналитической относительно эксцентриситета e (он может выполнять роль малого параметра). Следовательно, на основании теоремы Пуанкаре [9] в окрестности найденных положений равновесия могут возникать 2π-периодические движения, если только у характеристического уравнения (3.2) нет корней вида $\pm\, ki$ (k = 0, 1, 2, ...). Поскольку рассматриваемая система уравнений поступательно-вращательного движения ОС может быть записана в гамильтоновой форме, то она обратима и согласно исследованиям, проведенным ранее [10, 11], характеристические показатели уравнений в вариациях для этих периодических движений с точностью до квадрата малого параметра e будут совпадать с корнями характеристического уравнения (3.2). Таким образом, построенная выше область устойчивости точек либрации при $e = 0$, будет при малых $e \neq 0$ практически совпадать с областью устойчивости указанного периодического движения, за исключением множества точек, приводящих к параметрическому резонансу, который возникает, когда [11] $\lambda_s \pm \lambda_j = ik$, где k – целое число.

Только в этих случаях устойчивость периодических движений может нарушаться при сколь угодно малых $e \neq 0$. Таким образом, за исключением множества точек исчезающе малой меры, построенная область устойчивости практически сохранится и при учете эксцентриситета лунной орбиты. Если еще исключить множество точек области, соответствующих внутренним резонансам второго и третьего порядка [12], то, как это следует из общей теории гамильтоновых систем, полученные условия устойчивости гарантируют устойчивость и при учете в уравнениях возмущенного движения нелинейных членов до третьего порядка включительно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Farquhar R.W.* Station-keeping in the vicinity of collinear libration points with an application to a lunar communications problem // Space Flight mech. Spec. Symp. Denver, Colo: Wash. 1966. Washington: Amer. Astronaut. Soc., 1967. P. 519–535.
2. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
3. *Dusek H.M.* Motion in the vicinity of libration points of a generalized restricted three-body model // AIAA Paper. 1965. № 682. 22 p.
4. *Krasilnikov P.S., Kunitsyn A.L.* On the stabilization of the collinear libration points of the restzicted circular three-body problem // Celest. Mech. 1977. V. 15. № 1. P. 41–51.
5. *Рубановский В.Н.* Об относительном равновесии спутника-гиростата в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 494–503.
6. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
7. *Румянцев В.В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 141 с.
8. *Birkhoff G.D.* Dynamical systems. N.Y.: Amer. Math. Soc., 1927. 295 p.
9. *Малкин И.Г.* Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Л.; М.: Гостехиздат, 1949. 244 с.
10. *Куницын А.Л., Муратов А.С.* Об устойчивости одного класса квазиавтономных периодических систем при внутреннем резонансе // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 31–39.
11. *Тхай В.Н.* Некоторые задачи об устойчивости обратимой системы с малым параметром // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 1. С. 3–12.
12. *Kunitsyn A.L., Markeyev A.P.* Stability in resonance cases // Applied mechanics. Soviet reviews: N.Y.: Hemisphere, 1990. № 1. P. 237–326.

Москва

Поступила в редакцию
23.III.1998