УДК 531.36

© 1999 г. В.Н. Тхай

ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматриваются автономные или периодические по независимой переменной t системы, заданные на $\mathbb{R}^l \times \mathbb{T}^n$ ($\mathbb{T}^n$ – тор размерности n). Исследуются $2\pi k$-периодические вращательные движения (содержащие колебательные движения), замкнутые на $\mathbb{R}^l \times \mathbb{T}^n$ (через время $\Delta t = 2\pi k$, $k \in \mathbb{N}$, для 2π-периодической по t системы). Показано, что для таких движений справедлива теория, аналогичная теории для колебательных движений. В частности, справедлива теорема Пуанкаре о наличии нулевого характеристического показателя в автономной системе, теорема Андронова – Витта об устойчивости вращательного периодического движения автономной системы, теория продолжения по малому параметру вращательного периодического движения. Для обратимой системы даны необходимые и достаточные условия существования периодического вращательного движения, предложен метод построения всех таких движений. Проведено подробное исследование периодических вращательных движений системы, близкой к консервативной системе с одной степенью свободы. В частности, показано, что стационарные движения усредненной системы в методе В.М. Волосова отвечают точным периодическим вращательным движениям. Все $(2\pi k/|m|)$ – периодические вращательные движения консервативной системы ($k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$) сохраняются (в смысле продолжения по параметру) при действии малых 2π-периодических по t обратимых возмущений. В задаче о движении спутника в плоскости эллиптической орбиты под действием гравитационных сил (задача В.В. Белецкого) показано, что дополнительные возмущающие факторы не влияют на качественные выводы о существовании периодических вращательных и колебательных движений и об устойчивости таких движений.

В задаче о математическом маятнике прослеживается замечательная связь между колебательным и вращательным движениями. Эти два качественно различных вида движения математически также описываются функциями из разных классов. Однако есть общее свойство, объединяющее колебательное и вращательное движения: оба представляют собой периодически повторяющиеся процессы. Иначе говоря, колебательное и вращательное движения являются примерами периодического движения.

Обычно под периодическим движением понимается решение описывающих систему дифференциальных уравнений, определяемое периодическими функциями. При этом в фазовом пространстве периодическое движение представляется замкнутой интегральной кривой.

В задаче о математическом маятнике и колебательное и вращательное движения изображаются замкнутыми кривыми, если перейти с фазовой плоскости на фазовый цилиндр. На этом цилиндре состояние системы определяется угловой координатой (углом поворота маятника) и угловой скоростью, отсчитываемой вдоль оси цилиндра. Колебательное движение на фазовом цилиндре является частным случаем вращательного движения, когда число оборотов изображающей точки вокруг цилиндра вдоль замкнутой кривой равно нулю.

Для замкнутой кривой на фазовом цилиндре угол φ удовлетворяет условию

$$\varphi(t+\tau) = \varphi(t) + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$$

(τ – время полного обхода по замкнутой кривой). Тогда $\varphi^{\cdot}(t)$ – периодическая функция t с периодом τ и

$$\varphi(t) = (2\pi m/\tau)t + \psi(t),\ \psi(t+\tau) = \psi(t)$$

Значит, при переходе в равномерно вращающуюся с угловой скоростью $2\pi m/\tau$ систему координат имеем колебательное движение.

Такой подход приемлем для изучения вращательных движений. Однако здесь имеются определенные неудобства, связанные с зависимостью периода τ от начальных условий. Другой подход к исследованию как колебательных, так и вращательных движений в рамках единой теории основан на факте замкнутости соответствующей интегральной кривой. Так исследовались, например, вращения спутника в плоскости эллиптической орбиты [1, 2][1]. Оказывается, теория, развитая на основе второго подхода, вполне аналогична хорошо разработанной теории нелинейных колебаний.

В данной работе показано, как на основе теории нелинейных колебаний строится теория периодических движений, позволяющая единым способом исследовать как колебательные, так и вращательные движения. При этом рассматриваются вращательные движения, которые в частном случае вырождаются в колебательные.

1. Вращательные движения и их устойчивость. Рассмотрим систему

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol\cdot} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad \mathbf{y}^{\boldsymbol\cdot} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \tag{1.1}$$

($\mathbf{x}$ – l-вектор, $\mathbf{y}$ – n-вектор) с 2π-периодическими по t и вектору $\mathbf{y}$ правыми частями. Тем самым система (1.1) задана на $\mathbb{R}^l \times \mathbb{T}^n$, где $\mathbb{T}^n$ – тор размерности n. Решение этой системы $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$, $\mathbf{y} = \boldsymbol{\psi}(t)$ назовем $2\pi k$-периодическим движением, если

$$\boldsymbol{\varphi}(t + 2T^*) = \boldsymbol{\varphi}(t), \ \boldsymbol{\psi}(t + 2T^*) = \boldsymbol{\psi}(t) + 2\pi\mathbf{m}, \ \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n, \ T^* = \pi k \tag{1.2}$$

В этом случае интегральная кривая на $\mathbb{R}^l \times \mathbb{T}^n$ замкнется через время $\Delta t = 2\pi k$. И наоборот: если интегральная кривая на $\mathbb{R}^l \times \mathbb{T}^n$ замкнется через время $\Delta t = 2\pi k$, то функции $\boldsymbol{\varphi}(t)$, $\boldsymbol{\psi}(t)$ удовлетворяют условию (1.2).

Таким образом, условия (1.2) вполне определяют $2\pi k$-периодическое движение и дают необходимые и достаточные условия существования такого движения

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0 + 2T^*) = \boldsymbol{\varphi}(t_0), \ \boldsymbol{\psi}(t_0 + 2T^*) = \boldsymbol{\psi}(t_0) + 2\pi\mathbf{m}, \ \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n, \ T^* = \pi k$$

(t_0 – начальный момент времени).

Решение (1.2) описывает как колебательное ($\mathbf{m} = \mathbf{0}$), так и вращательное ($\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$) движения. При $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ решение (1.2) не является $2\pi k$-периодическим в обычно принятом смысле слова. Тем не менее с учетом приведенных выше пояснений всюду в статье рассматриваются $2\pi k$-периодические движения вида (1.2). В случае автономной системы (1.1) исследуются $2T^*$-периодические решения, замыкающиеся на $\mathbb{R}^l \times \mathbb{T}^n$ через время $\Delta t = 2T^*$. Наконец, отметим, что случаи, когда $l = 0$ или $n = 0$, также охватываются приведенными ниже исследованиями.

Пусть автономная система (1.2) допускает $2T^*$-периодическое движение (1.2). Тогда уравнения в вариациях для (1.2) имеют частное решение $\boldsymbol{\varphi}^{\boldsymbol\cdot}(t)$, $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol\cdot}(t)$, которое является $2T^*$-периодическим в обычном смысле слова

$$\boldsymbol{\varphi}^{\boldsymbol\cdot}(t + 2T^*) = \boldsymbol{\varphi}^{\boldsymbol\cdot}(t), \ \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol\cdot}(t + 2T^*) = \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol\cdot}(t)$$

причем сами уравнения в вариациях представляют систему линейных дифференциальных уравнений с $2T^*$-периодическими по t коэффициентами. Следовательно, справедлива теорема Пуанкаре [3]: характеристическое уравнение имеет по крайней мере один корень, равный единице.

Уравнения возмущенного движения для $2T^*$-периодического движения (1.2) являются $2T^*$-периодическими по t. В случае, когда остальные $l + n-1$ корней имеют модули, меньше единицы, эти уравнения допускают однопараметрическое семейство периодических решений. Отсюда следует справедливость утверждения.

[1] См. также: Варин В.П. Обобщенные периодические решения уравнений колебаний спутника // Препринт № 97, М.: Ин-т прикл. мат. РАН. 1997.

Теорема 1 (Андронова – Витта [4]). $2T^*$-периодическое движение (1.2) автономной системы (1.1) устойчиво по Ляпунову, если $l + n-1$ корней характеристического уравнения имеют модули, меньшие единицы.

Доказательство проводится дословным повторением доказательства [5] для случая периодического в обычном смысле слова решения.

Справедливо также обобщение [5] теоремы Андронова – Витта.

Если система (1.1) допускает p-семейство $2\pi k$-периодических вращательных движений ($p \le l + n$), то каждое из решений этого семейства устойчиво по Ляпунову, если характеристическое уравнение имеет $l + n-p$ характеристических показателей, по модулю меньших единицы.

2. Задача о продолжении вращательного движения по параметру. Рассмотрим достаточно гладкую автономную или 2π-периодическую систему

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \mu \mathbf{X}_1(\mu, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \\ &\mathbf{y}^{\cdot} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \mu \mathbf{Y}_1(\mu, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t); \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^l, \ \mathbf{y} \in \mathbb{T}^n \end{aligned} \tag{2.1}$$

(μ – параметр), заданную на $\mathbb{R}^l \times \mathbb{T}^n$. Предположим, что при $\mu = 0$ полученная порождающая система (1.1) допускает $2T^*$-периодическое движение вида (1.2), причем $T^* = \pi k$ в случае 2π-периодической по t системы (2.1). Исследуем вопрос о существовании в (2.1) при $\mu \ne 0$ $2T$-периодического движения, переходящего в движение (1.2) при $\mu \to 0$.

Необходимые и достаточные условия существования $2T$-периодического движения имеют вид

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}(\mu, \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, 2T) = \mathbf{x}^0 \\ &\mathbf{y}(\mu, \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, 2T) = \mathbf{y}^0 + 2\pi \mathbf{m}, \ \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\mathbf{x}(\mu, \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, t)$, $\mathbf{y}(\mu, \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, t)$ – общее решение системы (2.1) с начальной точкой ($\mathbf{x}^0$, $\mathbf{y}^0$) при $t = 0$. Система (2.1) имеет решение при $\mu = 0$: $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^* = \varphi(0)$, $\mathbf{y}^0 = \mathbf{y}^* = \psi(0)$. Поэтому из теоремы о неявной функции следует совместность системы (2.2) при достаточно малых $|\mu| \ne 0$, если выполняется условие:

в случае 2π-периодической по t системы (2.1)

$$\operatorname{rank} \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{x}(0, \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, 2\pi k)}{\partial \mathbf{x}^0} - \mathbf{I}_l & \dfrac{\partial \mathbf{x}(0, \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, 2\pi k)}{\partial \mathbf{y}^0} \\ \dfrac{\partial \mathbf{y}(0, \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, 2\pi k)}{\partial \mathbf{x}^0} & \dfrac{\partial \mathbf{y}(0, \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, 2\pi k)}{\partial \mathbf{y}^0} - \mathbf{I}_n \end{Vmatrix}_* = l + n \tag{2.3}$$

в случае автономной системы

$$\operatorname{rank} \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{x}(0, \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, 2T)}{\partial \mathbf{x}^0} - \mathbf{I}_l & \dfrac{\partial \mathbf{x}(0, \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, 2T)}{\partial \mathbf{y}^0} & \mathbf{X}(\varphi(2T), \psi(2T), 2T) \\ \dfrac{\partial \mathbf{y}(0, \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, 2T)}{\partial \mathbf{x}^0} & \dfrac{\partial \mathbf{y}(0, \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, 2T)}{\partial \mathbf{y}^0} - \mathbf{I}_n & \mathbf{Y}(\varphi(2T), \psi(2T), 2T) \end{Vmatrix}_* = l + n \tag{2.4}$$

($\mathbf{I}_j$ – единичная j-матрица).

Вычисления в (2.3) и (2.4) проводятся при $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^0 = \mathbf{y}^*$, $T = T^*$.

По аналогии со случаем периодического в обычном смысле слова ($\mathbf{m} = \mathbf{0}$) движения при выполнении условия (2.3) или (2.4) имеем изолированный по Пуанкаре случай [6].

Теорема 2. В изолированном по Пуанкаре случае система (2.1) имеет при достаточно малом $|\mu| \ne 0$ единственное $2T$-периодическое движение ($T = \pi k$ в случае 2π-периодической системы), переходящее в движение (1.2) при $\mu \to 0$.

Замечания. 1°. Проверка условия (2.3) или (2.4) проводится вычислением корней характеристического уравнения системы в вариациях.

2°. Из теоремы 2 следует полная аналогия в задачах о продолжении по параметру колебательного ($\mathbf{m} = \mathbf{0}$) и вращательного ($\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$) движений, причем в изолированном случае обе задачи решаются теоремой 2.

3°. Неизолированные случаи в теории вращательных движений исследуются также, как и в теории колебательных движений.

3. Система стандартного вида. Предположим, что в системе (2.1) $\mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mathbf{0}$. Тогда получим важную для приложений систему стандартного вида

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mu\mathbf{X}(\mu, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \tag{3.1}$$

$$\mathbf{y}^{\cdot} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \mu\mathbf{Y}(\mu, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$$

Исследуем сначала периодическую систему (3.1). Уравнения (2.2) имеют вид

$$\mathbf{x}^0 + \mu\mathbf{x}_1(\mu, \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, 2\pi k) = \mathbf{x}^0 \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, 2\pi k) + \mu\mathbf{y}_1(\mu, \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, 2\pi k) = \mathbf{y}^0 + 2\pi\mathbf{m}$$

где

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0(\mathrm{const}),\ \mathbf{y} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, t)$$

– решение порождающей системы

$$\mathbf{x}^{\cdot} = 0,\ \mathbf{y}^{\cdot} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \tag{3.3}$$

с начальной точкой $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$. Система (3.2) имеет единственное решение при достаточно малых $|\mu|$, если система функциональных уравнений

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \equiv \int_0^{2\pi k} \mathbf{X}(0, \mathbf{x}^0, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, t))dt = \mathbf{0} \tag{3.4}$$

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, 2\pi k) = \mathbf{y}^0 + 2\pi\mathbf{m}$$

имеет простой корень $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$. Очевидно, этот корень будет простым при выполнении условия

$$\mathrm{rank}\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial\mathbf{I}}{\partial\mathbf{x}^0} & \dfrac{\partial\mathbf{I}}{\partial\mathbf{y}^0} \\ \dfrac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial\mathbf{x}^0} & \dfrac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial\mathbf{y}^0} - \mathbf{I}_n \end{Vmatrix}_* = l + n \tag{3.5}$$

(вычисления проводятся для точки $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$).

Второе уравнение в (3.4) отражает факт $2\pi k$-периодичночти движения порождающей системы (3.3) и состоит из n скалярных уравнений относительно $l + n$ неизвестных $\overset{0}{x}_1, ..., \overset{0}{x}_l, \overset{0}{y}_1, ..., \overset{0}{y}_n$. Следовательно, его решение содержит l произвольных параметров и определяет l-семейство $2\pi k$-периодических движений порождающей системы. Здесь возможны различные интересные случаи.

1°. *Семейство от "амплитуды"* x^0. Пусть при $\mathbf{y}^0 = \mathbf{y}^*$ второе уравнение в (3.4) превращается в тождество по $\mathbf{x}^0$. Тогда в (3.5) имеем $(\partial\boldsymbol{\psi}/\partial\mathbf{x}^0)_* \equiv \mathbf{0}$ и достаточные условия разрешимости системы (3.2) состоят в следующем: a) уравнения в вариациях

$$d\mathbf{z}/dt = \partial\boldsymbol{\omega}/\partial\mathbf{y}\,|_*\,\mathbf{z}$$

для второго уравнения в (3.3), построенные для $2\pi k$-периодического движения $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, $\mathbf{y} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, t)$ порождающей системы (3.3) не имеют $2\pi k$-периодических решений;

б) амплитудное уравнение

$$\int_0^{2\pi k} \mathbf{X}(0, \mathbf{x}^0, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^*, t), t)dt = \mathbf{0}$$

имеет простой корень $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^*$.

При выполнении этих условий система (3.1) имеет при достаточно малых $|\mu| \neq 0$ единственное $2\pi k$-периодическое решение

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \mu\int_0^t \mathbf{X}(0, \mathbf{x}^*, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, t), t)dt + o(\mu), \ \ \mathbf{y} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, t) + \mu\boldsymbol{\psi}_1(t) + o(\mu) \tag{3.6}$$

где $\boldsymbol{\psi}_1(t)$ – частное $2\pi k$-периодическое решение уравнения

$$d\mathbf{z}/dt = \partial\boldsymbol{\omega}/\partial\mathbf{y}\,|_* \,\mathbf{z} + \mathbf{Y}(0, \mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, t), t)$$

Такое решение существует и единственно в силу условия *а*.

2°. *Семейство от начального "угла"* $\mathbf{y}^0$. Предположим сначала, что

$$l \geq n, \ \mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^0(\alpha_1, ..., \alpha_{l-n}, \beta_1, ..., \beta_n)$$

и второе уравнение в (3.4) выполняется при $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^*$ тождественно по $\mathbf{y}^0$ и $\boldsymbol{\alpha}$. Тогда при этом значении $\boldsymbol{\beta}$ имеем

$$r = \mathrm{rank}(\partial\boldsymbol{\psi}/\partial\mathbf{x}^0)_* \leq n, \ (\partial\boldsymbol{\psi}/\partial\mathbf{y}^0 - \mathbf{I}_n)_* \equiv \mathbf{0}$$

Если в этом случае $r = n$, то каждому корню $(\boldsymbol{\alpha}^*, \mathbf{y}^*)$ амплитудного уравнения

$$\int_0^{2\pi k} \mathbf{X}(0, \mathbf{x}^0(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}^*), \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}^0(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}^*), \mathbf{y}^0, t), t)dt = \mathbf{0}$$

отвечает при малых $|\mu| \neq 0$ единственное $2\pi k$-периодическое движение вида (3.6). При этом в случае $\beta = (\overset{0}{x}_1, ..., \overset{0}{x}_n)^T$ (T – транспонирование) условие $r = n$ проверяется интегрированием n систем линейных неоднородных уравнений

$$\dot{z}_s = \sum_{j=1}^n p_{sj}(t)z_j + \left.\frac{\partial\omega_s}{\partial x_k}\right|_*, \ s, k = 1, ..., n; \ \mathbf{P} = \| p_{sj} \| = \left.\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\mathbf{y}}\right|_*$$

с нулевыми начальными условиями. При $\mathbf{P} \equiv \mathbf{0}$ имеем $r = n$, если

$$\det\left\| \int_0^{2\pi k} \left.\frac{\partial\omega_s}{\partial x_k}\right|_* dt \right\| \neq 0 \tag{3.7}$$

Пусть теперь $l < n$ и вторая группа уравнений в (3.4) выполняется при произвольных $\overset{0}{y}_1, ..., \overset{0}{y}_l$ и фиксированных $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^*, \overset{0}{y}_{l+1} = \overset{*}{y}_{l+1}, ..., \overset{0}{y}_n = \overset{*}{y}_n$. Тогда для определения $\overset{0}{y}_1, ..., \overset{0}{y}_l$ имеем систему l амплитудных уравнений

$$\int_0^{2\pi k} \mathbf{X}(0, \mathbf{x}^*, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}^*, \overset{0}{y}_1, ..., \overset{0}{y}_l, \overset{*}{y}_{l+1}, ..., \overset{*}{y}_n, t), t)dt = \mathbf{0}$$

Каждому простому корню $(\overset{*}{y}_1, ..., \overset{*}{y}_l)$ этой системы, удовлетворяющего условию

$$\mathrm{rank}\|(\partial\boldsymbol{\psi}/\partial\mathbf{x}^0)_*, (\partial\boldsymbol{\psi}/\partial\mathbf{y}^0)_* - \mathbf{I}_n\| = n$$

(звездочка означает вычисление при $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^0 = \mathbf{y}^*$, $t = 2\pi k$) отвечает при $\mu \neq 0$ единственное $2\pi k$-периодическое движение уравнения (3.1).

При $l = 0$ амплитудное уравнение отсутствует, и условие существования $2\pi k$-периодического движения при $\mu \neq 0$ заключается в неравенстве

$$\det\|\partial\psi/\partial \mathbf{y}^0 - \mathbf{I}_n\|_* \neq 0$$

если $\mathbf{y}^*$ – корень второго уравнения в (3.2).

3°. *Частота зависит только от "амплитуды"* $\mathbf{x}^0$. Рассмотрим важный частный случай, когда функция $\boldsymbol{\omega}$ зависит только от вектора $\mathbf{x}$. Здесь общее решение порождающей системы (3.3) имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0,\ \mathbf{y} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^0)t + \mathbf{y}^0 \tag{3.8}$$

Очевидно, формулы (3.8) описывают $2\pi k$-периодическое движение, если $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{m}/k$ ($\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$, $k \in \mathbb{N}$), причем при $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ имеем постоянное решение. При $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ движение является вращательным: "амплитуда" $\mathbf{x}$ постоянна, а "угол" $\mathbf{y}$ меняется на $2\pi\mathbf{m}$ при увеличении времени на $2\pi k$.

Рассматриваемый случай является частным случаем п. 2°. Поэтому достаточным условием существования при $\mu \neq 0$ единственного $2\pi k$-периодического движения является существование простого корня ($\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$) у системы функциональных уравнений

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^0) = \frac{\mathbf{m}}{k},\quad \int_0^{2\pi k} \mathbf{X}(0, \mathbf{x}^0, \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^0)t + \mathbf{y}^0, t)dt = \mathbf{0} \tag{3.9}$$

причем условие (3.7) примет вид

$$\operatorname{rank}\|\partial\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^0)/\partial\mathbf{x}^0\|_* = n \tag{3.10}$$

Пусть ($\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$) – простой корень системы (3.9). Тогда система (3.2) записывается в виде

$$\mathbf{x}_1(0, \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, 2\pi k) + o(\mu) = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^*)}{\partial\mathbf{x}^*}\Delta\mathbf{x} + \frac{\mu}{2\pi k}\int_0^{2\pi k} \mathbf{Y}(0, \mathbf{x}^*, \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^*)t + \mathbf{y}^*, t)dt + o(\mu) + o(\Delta x) = 0 \tag{3.11}$$

$$(\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*)$$

Положим $\Delta x = \mu\boldsymbol{\xi}$. Тогда при выполнении условия (3.10) из второго уравнения в (3.11) определяется вектор $\boldsymbol{\xi}$, причем он содержт l–n произвольных компонентов. Эти компоненты, а также $\Delta\mathbf{y} = \mathbf{y}^0 - \mathbf{y}^* = \mu\boldsymbol{\eta}$ определяются из первого уравнения в (3.11). В результате решение, описывающее $2\pi k$-периодическое движение, имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \mu[\boldsymbol{\xi} + \int_0^t \mathbf{X}(0, \mathbf{x}^*, \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^*)t + \mathbf{y}^*, t)dt] + o(\mu)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^* + (\mathbf{m}/k)t + \mu[\boldsymbol{\eta} + \frac{\partial\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^*)}{\partial\mathbf{x}^*}\boldsymbol{\xi}t + \int_0^t \mathbf{Y}(0, \mathbf{x}^*, \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^*)t + \mathbf{y}^*, t)dt] + o(\mu)$$

В вырожденном случае, когда при некотором $\mathbf{x}^*$ имеем $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{m}/k$, $r < n$, необходимо выполнить замену $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \mathbf{u}$, $\mathbf{y} = (\mathbf{m}/k)t + \mathbf{v}$. Тогда в переменных $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ получим задачу о колебательных движениях в системе стандартного вида. Эта задача рассмотрена ранее [7].

4°. *Автономная система.* При исследовании автономной системы возможны два подхода: 1) анализ системы вида (3.2), в которой период $2\pi k$ заменен на $2T$, и вывод условий разрешимости этой системы, 2) сведение к периодической системе.

Проиллюстрируем второй подход в случае, когда функция $\boldsymbol{\omega}$ зависит только от переменной $\mathbf{x}$. На вращательном движении порождающей системы имеем $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^0) \neq \mathbf{0}$.

Неравенство $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ имеет место на конечном интервале времени также при малых $|\mu| \neq 0$. Предположим, что последняя компонента $\omega_n(\mathbf{x})$ вектора $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ отлична от нуля. Тогда в задаче о периодических движениях можно ввести новую независимую переменную y_n. Определяя в полученной системе единственное $2\pi k$-периодическое движение

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(y_n),\ y_1 = y_1(y_n),\ \ldots,\ y_{n-1} = y_{n-1}(y_n)$$

получим для определения $y_n(t)$ одно автономное дифференциальное уравнение.

4. Периодические движения обратимых систем. Рассмотрим 2π-периодическую по t обратимую систему

$$\mathbf{u}^\cdot = \mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t),\ \mathbf{v}^\cdot = \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \tag{4.1}$$

инвариантную относительно преобразования: $(t, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \to (-t, \mathbf{u}, -\mathbf{v})$. Предположим, что система (4.1) является 2π-периодической по всем или части компонентов вектора $\mathbf{v}$ и задана на $\mathbb{R}^p \times \mathbb{T}^q$. Ниже для простоты излагается случай $p = l$, $q = n$ (l, n – размерности векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ соответственно); общий случай $p \geq l$, $q \leq n$ легко прочитывается из изложенного.

При указанных предположениях функции $\mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t)$, $\mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t)$ будут соответственно нечетной и четной по совокупности переменных $(t, \mathbf{v})$. Кроме того, эти функции являются 2π-периодическими по $(t, \mathbf{v})$ и представляются рядами Фурье соответственно по синусам и косинусам. Очевидно, такое представление сохраняется при замене $(t, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ на $(t + \pi\alpha, \mathbf{u}, \mathbf{v} + \pi\boldsymbol{\beta})$; $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{Z}^n$. Значит, преобразованная система также инвариантна относительно замены $(t, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \to (-t, \mathbf{u}, -\mathbf{v})$. Отсюда следует существование двух преобразований $(t, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \to (t + \pi\alpha, \mathbf{u}, \mathbf{v} + \pi\boldsymbol{\beta})$ и $(t, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \to (-t + \pi\alpha, \mathbf{u}, -\mathbf{v} + \pi\boldsymbol{\beta})$ исходной системы (4.1), которые приводят к одной и той же системе.

Преобразование $(t + \pi\alpha, \mathbf{u}, \mathbf{v} + \pi\boldsymbol{\beta}) \to (-t + \pi\alpha, \mathbf{u}, -\mathbf{v} + \pi\boldsymbol{\beta})$ имеет неподвижное множество

$$\mathbf{M} = \{t, \mathbf{u}, \mathbf{v}\colon \sin t = 0,\ \sin v_s = 0\ (s = 1, \ldots, n)\}$$

которое назовем неподвижным множеством обратимой системы (4.1), заданной на $\mathbb{R}^l \times \mathbb{T}^n$.

Пусть $\mathbf{u}(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0, t^0, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0, t^0, t)$ – решение системы (4.1) с начальной точкой $(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0)$ при $t = t^0$. Тогда в (4.1) имеем одновременно два решения

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{u}^0, \pm\mathbf{b} + \pi\boldsymbol{\beta}, \pm a + \pi\alpha, \pm a + \pi\alpha \pm t)$$

$$\mathbf{v} = \pm\mathbf{v}(\mathbf{u}^0, \pm\mathbf{b} + \pi\boldsymbol{\beta}, \pm a + \pi\alpha, \pm a + \pi\alpha \pm t) \mp \pi\boldsymbol{\beta}$$

$$a \in \mathbb{R},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$$

Эти решения симметричны относительно множества $\mathbf{M}$. Если $a = 0$, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, то указанные два решения совпадают и представляют симметричное относительно неподвижного множества $\mathbf{M}$ решение.

Для симметричного решения имеем

$$\mathbf{u}(\mathbf{u}^0, \pi\boldsymbol{\beta}, \pi\alpha, -t + \pi\alpha) = \mathbf{u}(\mathbf{u}^0, \pi\boldsymbol{\beta}, \pi\alpha, t + \pi\alpha) \tag{4.2}$$

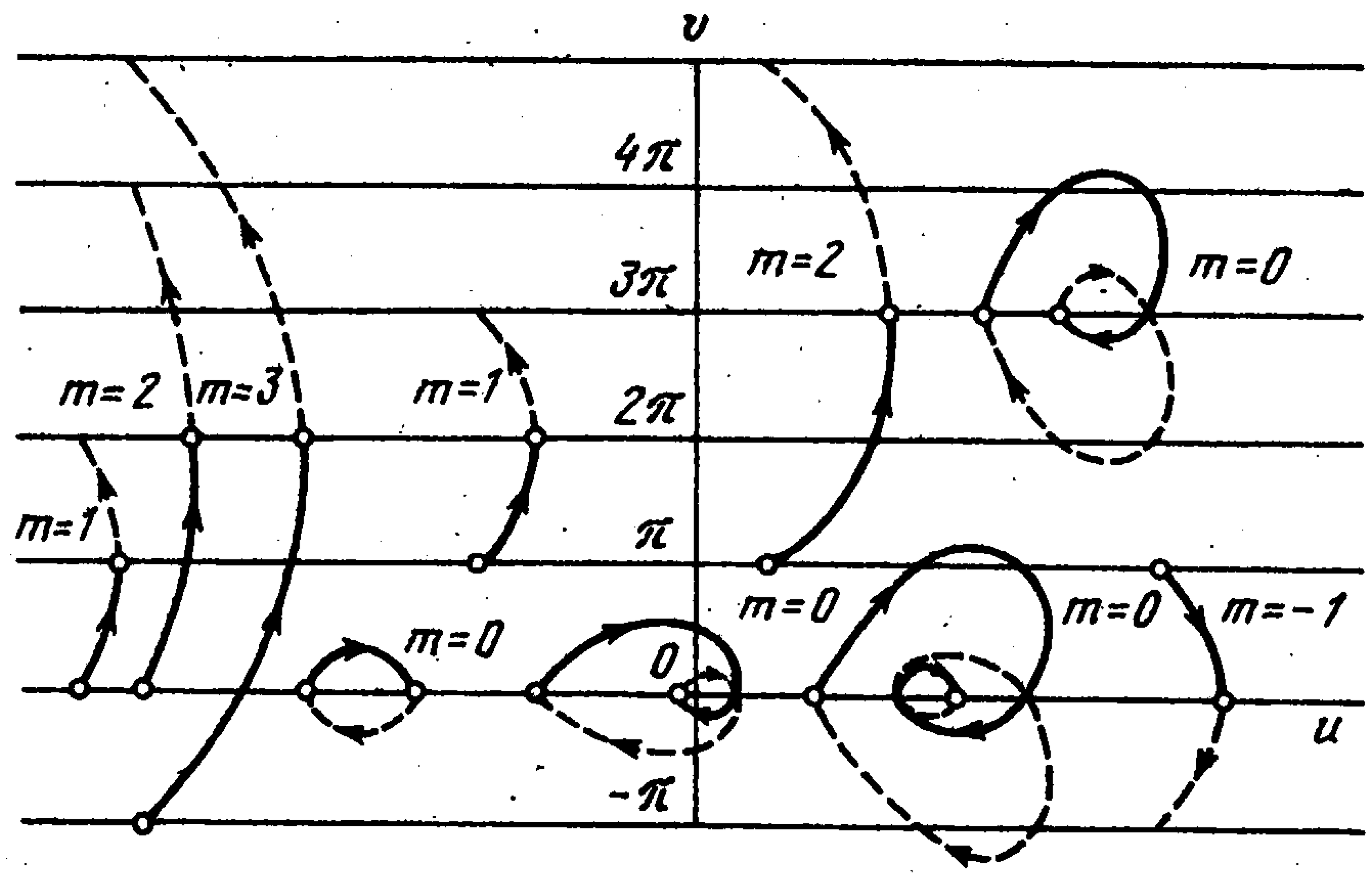
$$\mathbf{v}(\mathbf{u}^0, \pi\boldsymbol{\beta}, \pi\alpha, -t + \pi\alpha) = -\mathbf{v}(\mathbf{u}^0, \pi\boldsymbol{\beta}, \pi\alpha, t + \pi\alpha) + 2\pi\boldsymbol{\beta}$$

Это движение будет $2\pi k$-периодическим ($k \in \mathbb{N}$), если

$$\mathbf{u}(\mathbf{u}^0, \pi\boldsymbol{\beta}, \pi\alpha, \pi(2k + \alpha)) = \mathbf{u}(\mathbf{u}^0, \pi\boldsymbol{\beta}, \pi\alpha, \pi\alpha) = \mathbf{u}^0 \tag{4.3}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{u}^0, \pi\boldsymbol{\beta}, \pi\alpha, \pi(2k + \alpha)) = \mathbf{v}(\mathbf{u}^0, \pi\boldsymbol{\beta}, \pi\alpha, \pi\alpha) + 2\pi\mathbf{m},\ \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$$

Тогда на $\mathbb{R}^l \times \mathbb{T}^n$ симметричное, $2\pi k$-периодическое движение замыкается через k оборотов по t и m_s оборотов по $v_s (s = 1, \ldots, n)$; знак m_s указывает направление



Фиг. 1

движения по v_s. При $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ имеем колебательное движение, при $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ движение будет вращательным.

Основой для исследования симметричных периодических движений системы (4.1) является следующее предложение.

Теорема 3. Для того чтобы движение $\mathbf{u}(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0, t^0, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0, t^0, t)$ системы (4.1) было симметричным и $2\pi k$-периодическим, необходимо и достаточно выполнения условий

$$t^0 = \pi\alpha,\ \mathbf{v}^0 = \pi\boldsymbol{\beta},\ \mathbf{v}(\mathbf{u}^0, \pi\boldsymbol{\beta}, \pi\alpha, \pi(k+\alpha)) = \pi(\mathbf{m} + \boldsymbol{\beta}),\ \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \tag{4.4}$$

что означает пересечение неподвижного множества **M** в моменты времени $\pi\alpha$ и $\pi(k + \alpha)$.

Доказательство. Симметричность решения следует из условий: $t^0 = \pi\alpha$, $\mathbf{v}^0 = \pi\boldsymbol{\beta}$. Поэтому справедливы равенства (4.2). Обозначим

$$\mathbf{u}_\pm^* = \mathbf{u}(\mathbf{u}^0, \pi\boldsymbol{\beta}, \pi\alpha, \pi(\pm k + \alpha)),\ \ \mathbf{v}_\pm^* = \mathbf{v}(\mathbf{u}^0, \pi\boldsymbol{\beta}, \pi\alpha, \pi(\pm k + \alpha))$$

Подставив в (4.2) значение $t = -\pi k$, имеем

$$\mathbf{v}_+^* = -\mathbf{v}_-^* + 2\pi\boldsymbol{\beta} \tag{4.5}$$

Движение $2\pi k$-периодическое, поэтому из (4.3) получим

$$\mathbf{v}_+^* = \mathbf{v}_-^* + 2\pi\mathbf{m} \tag{4.6}$$

Равенства (4.5), (4.6) немедленно приводят к условию (4.4).

Докажем достаточность. Имеем

$$\mathbf{u}(\mathbf{u}^0, \pi\boldsymbol{\beta}, \pi\alpha, \pi(2k+\alpha)) = \mathbf{u}(\mathbf{u}_+^*, \pi(\mathbf{m}+\boldsymbol{\beta}), \pi(k+\alpha), \pi(2k+\alpha)) \overset{(4.2)}{=}$$
$$= \mathbf{u}(\mathbf{u}_+^*, \pi(\mathbf{m}+\boldsymbol{\beta}), \pi(k+\alpha), \pi\alpha) = \mathbf{u}(\mathbf{u}^0, \pi\boldsymbol{\beta}, \pi\alpha, \pi\alpha) = \mathbf{u}^0$$
$$\mathbf{v}(\mathbf{u}^0, \pi\boldsymbol{\beta}, \pi\alpha, \pi(2k+\alpha)) = \mathbf{v}(\mathbf{u}_+^*, \pi(\mathbf{m}+\boldsymbol{\beta}), \pi(k+\alpha), \pi(2k+\alpha)) \overset{(4.2)}{=}$$
$$= -\mathbf{v}(\mathbf{u}_+^*, \pi(\mathbf{m}+\boldsymbol{\beta}), \pi(k+\alpha), \pi\alpha) + 2\pi(\mathbf{m}+\boldsymbol{\beta}) = -\mathbf{v}(\mathbf{u}^0, \pi\boldsymbol{\beta}, \pi\alpha, \pi\alpha) + 2\pi(\mathbf{m}+\boldsymbol{\beta}) =$$
$$= \pi(2\mathbf{m}+\boldsymbol{\beta})$$

(номер формулы над знаком равенства означает переход с использованием формулы (4.2)).

Фиг. 1 иллюстрирует теорему 3. Сплошной линией изображен кусок траектории при изменении t от $\pi\alpha$ до $\pi(k + \alpha)$, штриховой – от $\pi(k + \alpha)$ до $\pi(2k + \alpha)$.

В автономной обратимой системе, заданной на $\mathbb{R}^l \times \mathbb{T}^n$, неподвижное множество имеет вид $\mathbf{M} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}: \sin v_s = 0\ (s = 1, ..., n)\}$.

Теорема 4. Для того чтобы движение $\mathbf{u}(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0, t^0, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0, t^0, t)$ с начальной точкой $(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0)$ при $t = t^0$ автономной обратимой системы

$$\mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}),\ \mathbf{v}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v});\ \mathbf{U}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}), = -\mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}),\ \mathbf{V}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \tag{4.7}$$

заданной на $\mathbb{R}^l \times \mathbb{T}^n$ ($l = \dim\mathbf{u}$, $\mathbf{n} = \dim\mathbf{v}$), было симметричным относительно множества $\mathbf{M}$ и $2T$-периодическим, необходимо и достаточно выполнения условий

$$\mathbf{v}^0 = \pi\boldsymbol{\beta},\ \mathbf{v}(\mathbf{u}^0, \pi\boldsymbol{\beta}, t^0, t^0 + T) = \pi(\mathbf{m} + \boldsymbol{\beta}),\ \boldsymbol{\beta}, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \tag{4.8}$$

или, что то же самое: существование по крайней мере двух общих точек у рассматриваемого решения и неподвижного множества $\mathbf{M}$.

Замечания. 1°. Для автономной или периодической системы, заданной на $\mathbb{R}^{l+n}$, в теоремах 3, 4 необходимо принять $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ (теорема Хейнбокела–Страбла [8]). При исследовании колебательных движений ($\mathbf{m} = \mathbf{0}$) теоремы 3, 4 применимы независимо от периодичности по $\mathbf{v}$ системы (4.1) или (4.7).

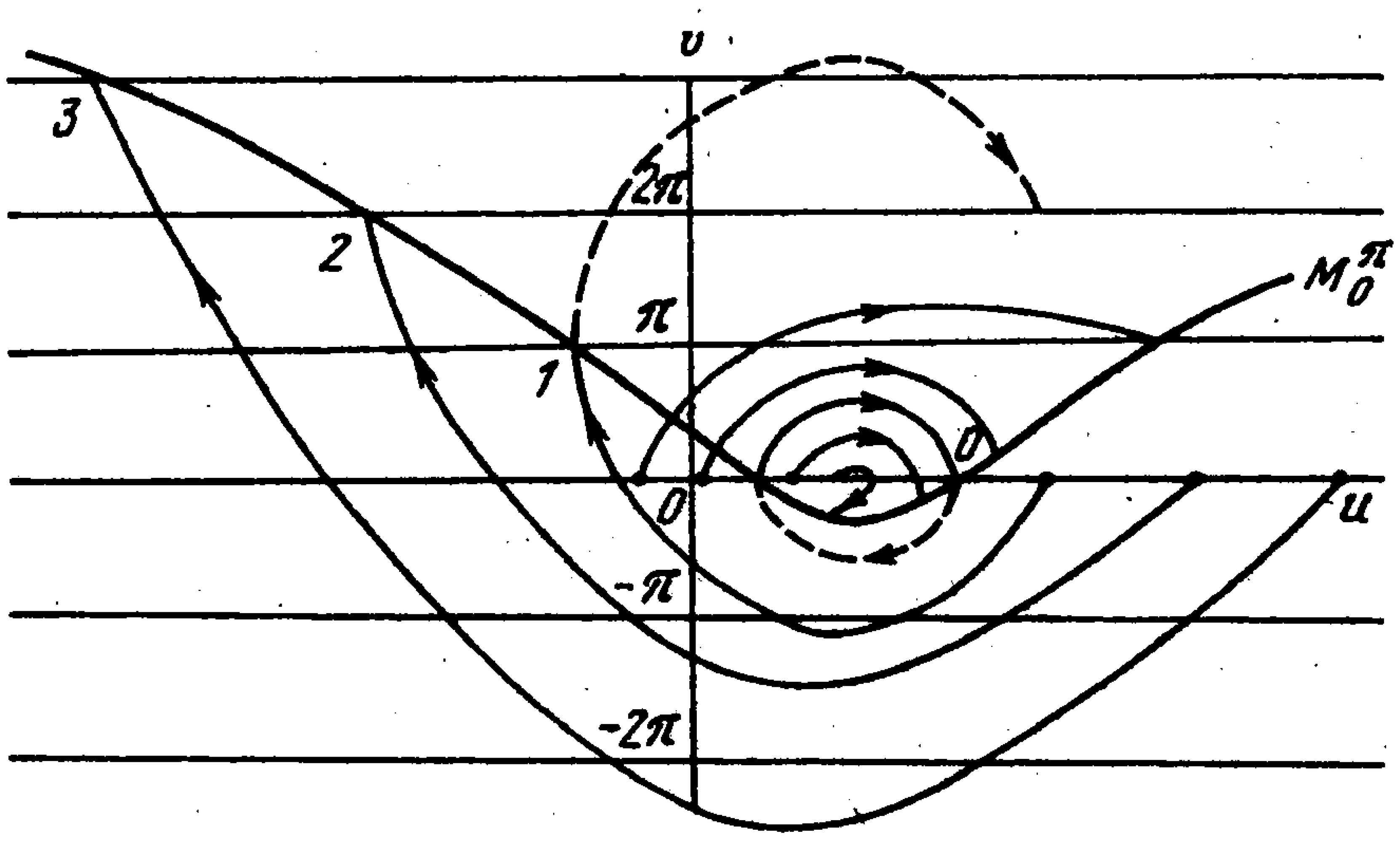
2°. Если система (4.1) или (4.7) является 2π-периодической только по компонентам $v_{s+1}, \ldots, v_n$ вектора $\mathbf{v}$, то при применении теорем 3, 4 необходимо принять $m_1 = 0, \ldots, m_s = 0$, а при определении неподвижного множества положить $v_1 = 0, \ldots, v_s = 0$.

Из теорем 3, 4 вытекает метод построения всех симметричных периодических движений обратимой системы на $\mathbb{R}^l \times \mathbb{T}^n$.

Теорема 5. Пусть $\mathbf{M}^\tau$ – образ неподвижного множества $\mathbf{M}$ обратимой системы (4.1) или (4.7), полученный при изменении t от t^0 до $t^0 + \tau$ ($t^0 = \pi\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, для 2π-периодической по t системы). Тогда множество $\mathbf{M} \cap \mathbf{M}^\tau$ содержит все точки, которые при $t = t^0 + \tau$ принадлежат симметричным, $(2\tau/\nu)$-периодическим на $\mathbb{R}^l \times \mathbb{T}^n$ движениям ($\nu = 1, 2, \ldots$), причем $\tau = \pi k (k \in \mathbb{N})$, $\nu = 1$ для 2π-периодической системы (4.1).

Замечание. Для случая колебательных движений теорема получена ранее [9].

Теорема 5 дает корректное решение задачи численного построения всех симметричных периодических движений обратимой системы при $n = 1$. Важно, что в результате численного исследования выводится точный качественный результат о существовании искомого движения. Начальную точку для такого движения можно вычислить с необходимой точностью. Ситуация здесь аналогична имеющей место для колебательных движений [9].



Фиг. 2

Рассмотрим 2π-периодическую систему (4.1) с $n = 1$, в которой $\mathbf{M}_0^\pi$ – образ множества $\mathbf{M}_0 = \{\mathbf{u}, v : v = 0\}$ при изменении t от $\pi\alpha$ до $\pi(k + \alpha)$ (фиг. 2). Тогда точки пересечения $\mathbf{M}_0^\pi$ и $\mathbf{M}^* = \{\mathbf{u}, v : \sin v = 0\}$ принадлежат симметричным периодическим движениям. При этом возможны как колебательные движения ($m = 0$), так и различные 2π-периодические вращательные движения ($m = 1, 2, 3$); соответствующие значения m указаны. Очевидно, в силу 2π-периодичности системы по t достаточно рассмотреть только два значения $t^0 = 0$, $t^0 = \pi$ и построить только два множества $\mathbf{M}_0^\pi$ и $\mathbf{M}_1^\pi$; $\mathbf{M}_1^\pi$ – образ множества $\mathbf{M}_1 = \{\mathbf{u}, v.: v = \pi\}$.

При исследовании конкретной механической задачи необходимо задать начальный момент времени $t^0 = 0$ или $t^0 = \pi$. Затем определить по приведенному методу все 2π-периодические движения, начиная с колебательных ($m = 0$) и увеличивая $m = 1,2,...$. Далее определяются все 4π-периодические движения, 6π-периодические движения и т.д. Из этой простой схемы видно, что уже среди только 2π-периодических движений содержатся такие качественно различные виды движений, как колебания ($m = 0$), медленные вращения ($|m| > 0$, $|m|$ – малая величина), быстрые вращения ($|m| \gg 1$).

5. Задача о продолжении по параметру симметричных периодических движений обратимой системы. Рассмотрим достаточно гладкую автономную или 2π-периодическую по t обратимую систему

$$\mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{U}(\mathbf{u},\mathbf{v},t) + \mu\mathbf{U}_1(\mu,\mathbf{u},\mathbf{v},t)$$

$$\mathbf{v}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{V}(\mathbf{u},\mathbf{v},t) + \mu\mathbf{V}_1(\mu,\mathbf{u},\mathbf{v},t); \quad \mathrm{u} \in \mathbb{R}^l \tag{5.1}$$

с малым параметром μ и неподвижным множеством соответственно $\mathbf{M} = \{\mathbf{u},\mathbf{v} : v_i = 0 (i = 1, ..., s \leq n), \sin v_j = 0 (j = s + 1, ..., n)\}$ и $\mathbf{M} = \{t, \mathbf{u}, \mathbf{v} : \sin t = 0, v_i = 0 \ (i = 1, ..., s \leq n), \sin v_j = 0 \ (j = s + 1, ..., n)\}$, причем предполагается, что система (5.1) является 2π-периодической по переменным v_j ($j = s + 1, ..., n$).

Пусть при $\mu = 0$ в системе (5.1) имеется $2T^*$-периодическое движение ($T^* = \pi k$, $k \in \mathbb{N}$, для периодической системы)

$$\mathrm{u} = \varphi(t), \ v = \psi(t); \ \varphi(-t) = \varphi(t), \ \psi(-t) = -\psi(t) + 2\pi\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{Z}^n, \ \beta_1 = ... = \beta_s = 0) \tag{5.2}$$

симметричное относительно неподвижного множества $\mathbf{M}$. Исследуем вопрос о существовании в системе (5.1) при $\mu \neq 0$ симметричных, $2T$-периодических движений ($T = \pi k$ для периодической системы), переходящих в движение (5.2) при $\mu = 0$.

Обозначим через $\mathbf{u}(\mu,\mathbf{u}^0,\mathbf{v}^0,t^0,t^0+t)$, $\mathbf{v}(\mu,\mathbf{u}^0,\mathbf{v}^0,t^0,t^0+t)$ решение системы (5.1) с начальной точкой ($\mathbf{u}^0$, $\mathbf{v}^0$) при $t = 0$. Тогда необходимые и достаточные условия существования симметричного, $2T$-периодического движения имеют вид (4.4) или (4.8) и представляют систему n функциональных уравнений относительно $u_1^0,...,u_l^0$ (и T – в случае автономной системы). Эта система при $\mu = 0$ имеет решение $\mathbf{u} = \varphi(0)$. Поэтому при достаточно малом $\mu \neq 0$ система имеет решение при выполнении условия:

для 2π-периодической системы

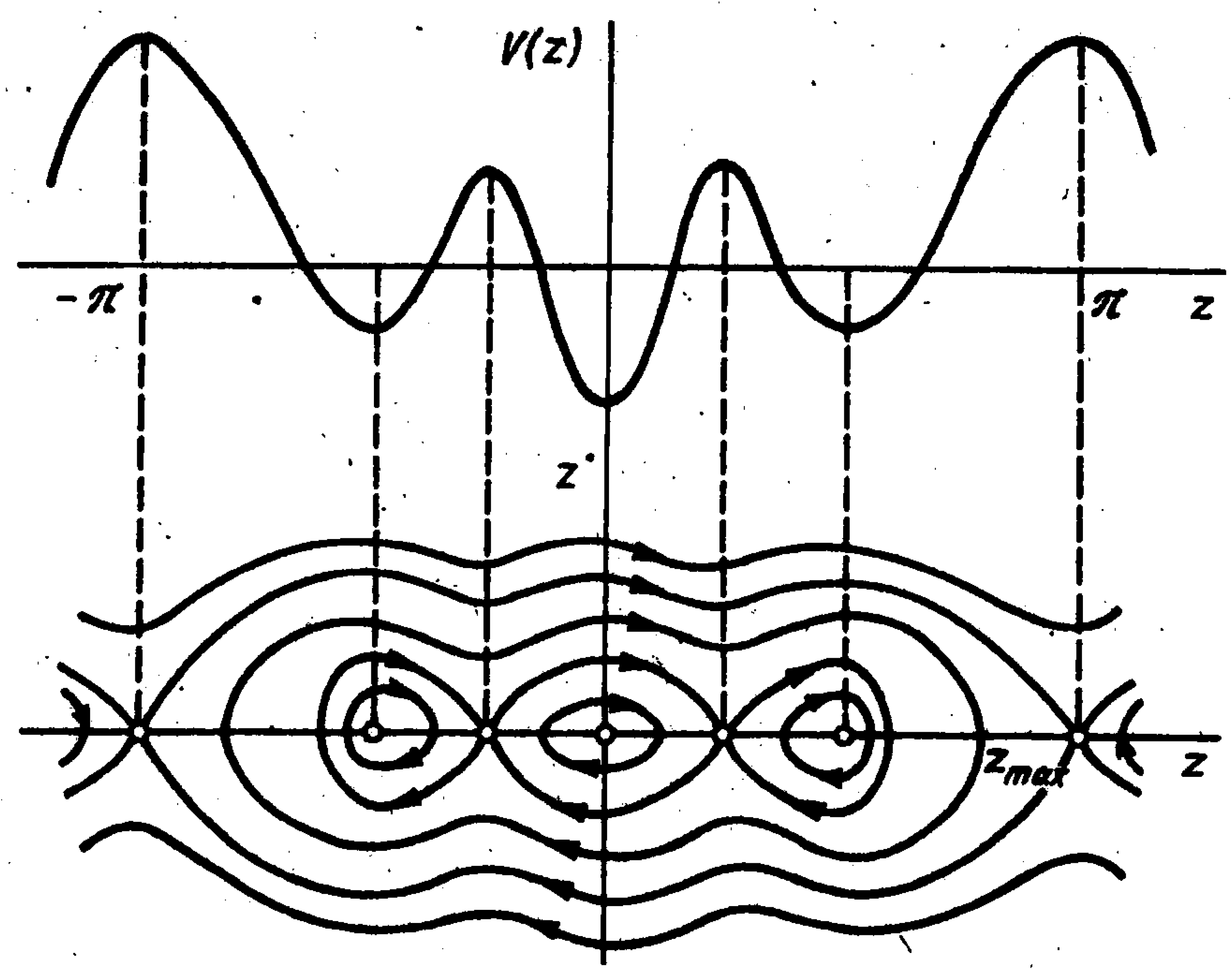
$$\operatorname{rank}\left\|\frac{\partial v_\varkappa(\mu,\mathbf{u}^0,\pi\boldsymbol{\beta},\pi\alpha,\pi(\alpha+k))}{\partial u_\nu^0}\right\|_* = n \tag{5.3}$$

для автономной системы

$$\operatorname{rank}\left\|\frac{\partial v_\varkappa(\mu,\mathbf{u}^0,\pi\boldsymbol{\beta},t^0,t^0+T)}{\partial u_\nu^0}, \ \frac{\partial v_\varkappa(\mu,\mathbf{u}^0,\pi\boldsymbol{\beta},t^0,t^0+T)}{\partial T}\right\| = n \tag{5.4}$$

Вычисления в (5.3) и (5.4) проводятся при $\mu = 0$, $\mathbf{u}^0 = \varphi(0)$. Следовательно, при выполнении условия (5.3) или (5.4) вопрос о существовании при $\mu \neq 0$ в автономной или периодической системе (5.1) решается только порождающей системой, полученной из (5.1) при $\mu = 0$. Этот случай является грубым.

Теорема 6. В грубом случае (5.3) или (5.4) периодической или автономной системы



Фиг. 3

(5.1) при $\mu = 0$ имеем $(l-n)$- или $(l-n+1)$-параметрическое семейство симметричных периодических движений, содержащих движение (5.2), и это семейство единственным образом продолжается по параметру μ.

Условие (5.3) выполняется только при $l \geq n$. Если $l = n$, то порождающая система имеет единственное симметричное, $2\pi k$-периодическое движение, которое единственным образом продолжается по μ. В автономной системе (5.1) при $l = n - 1$ и выполнении условия (5.4) как при $\mu = 0$, так и в случае $\mu \neq 0$ имеется единственное симметричное, $2T(\mu)$-периодическое движение ($T(0) = T^*$). При $l \geq n$ в автономной системе возможны два случая. В первом из них среди первых l столбцов матрицы в (5.4) имеется n линейно независимых. Тогда порождающая система имеет $(l-n+1)$-семейство от $l-n$ величин из $u_1^0, ..., u_l^0$ и T симметричных, $2T$-периодических движений; это семейство продолжается по параметру μ. Во втором случае l первых столбцов в (5.4) содержат только $n-1$ линейно независимых столбцов. Тогда порождающая система имеет $(l-n+1)$-семейство от $l-n+1$ величин из u_1^0, ..., u_l^0, а период $2T$ также зависит от этих величин; это семейство при выполнении (5.4) продолжается по параметру μ. Здесь при $\mu \neq 0$ уже нельзя гарантировать существование симметричного периодического движения того же периода, что и в порождающей системе.

Из изложенного следует, что задача о продолжении по параметру симметричного периодического вращательного движения в грубых случаях решается также, как и в частном случае колебательного движения [10, 11]. Такая же ситуация имеет место в негрубых случаях. Фактически теория для этих случаев изложена ранее [12, 13]. Рассмотрена [7] система стандартного вида.

6. Система, близкая к консервативной системе с одной степенью свободы. Рассмотрим уравнение

$$z^{\cdot\cdot} + f(z) = \mu F(\mu, z, z^{\cdot}, t), \quad \int_0^{2\pi} f(z)dz = 0 \tag{6.1}$$

где функции $f(z), F(\mu, z, z^{\cdot}, t)$ являются 2π-периодическими по z и t. При $\mu = 0$ уравнение (6.1) имеет интеграл энергии

$$z^{\cdot 2} + V(z) = x(\text{const}), \quad V(z) = 2\int f(z)dz$$

причем можно считать, что 2π-периодическая функция $V(z)$ не содержит постоянного слагаемого. Тогда при $x > \max V(z)$ имеем вращательные движения (фиг. 3), которые замкнуты на цилиндре $(z, z^{\cdot})$. На фазовой плоскости $(z, z^{\cdot})$ эти решения не замкнуты, а скорость $z^{\cdot}$ сохраняет знак. Период вращательных движений определяется по формуле

$$2T(x) = \int_0^{2\pi} \frac{dz}{g(x,z)}, \quad g(x,z) = \sqrt{x - V(z)}$$

Поэтому движения будут $(2\pi k/|m|)$-периодическими по времени $t (k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z})$, если постоянная энергии x удовлетворяет условию $T(x) = \pi k/|m|$.

Задача о существовании в (6.1) колебательных движений, переходящих при $\mu = 0$ в одно из колебаний (фиг. 3) порождающей системы, исследована [14]. Ниже исследуем вопрос о существовании $2\pi k$-периодических вращательных движений уравнения (6.1) при $\mu \neq 0$. При этом, не ограничивая общности, рассмотрим вращения с положительной скоростью $z^{\cdot}$.

Введем новые переменные задачи: $x, y (y = z)$. Тогда уравнение (6.1) запишется в виде системы

$$x^{\cdot} = 2\mu g(x,y) F(\mu, y, g(x,y), t), \quad y^{\cdot} = g(x,y) \tag{6.2}$$

которая является 2π-периодической по y и t. При $\mu = 0$ система (6.2) имеет $2T(x^0)$-периодическое вращательное движение при любом y^0 и $x^0 > \max V(z)$; x^0, y^0 – начальные значения x, y при $t = t^0 = 0$. Следовательно, имеем случай, рассмотренный в разд. 3, п. 2°.

Пусть $T(x^*) = \pi k/|m|$, а функция $\psi(x^*, y^0, t)$ удовлетворяет второму уравнению в (6.2) при $x = x^*$. Тогда вычислим

$$t = \int_{y^0}^{\psi(x^*, y^0, t)} \frac{d\xi}{g(x^*, \xi)}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x^*} = \frac{g(x^*, \psi)}{2} \int_{y^0}^{\psi(x^*, y^0, t)} \frac{d\xi}{[g(x^*, \xi)]^3} > 0$$

Поэтому условие $\partial\psi/\partial x^* \neq 0$ (при $t = 2\pi k$) выполнено, и вопрос о существовании при $\mu \neq 0$ $2\pi k$-периодического вращательного движения решается амплитудным уравнением

$$I(y^0) = \int_0^{2\pi k} F(0, \psi(x^*, y^0, t), g(x^*, \psi(x^*, y^0, t)), t) g(x^*, \psi(x^*, y^0, t)) dt = 0 \tag{6.3}$$

Теорема 7. Каждому простому корню $y^0 = y^*$ амплитудного уравнения (6.3) отвечает единственное $2\pi k$-периодическое вращательное движение

$$z = \psi(x^*, y^*, t) + O(\mu)$$

$$T(x^*) = \pi k / |m|, \quad \psi(x^*, y^*, t + 2\pi k) = \psi(x^*, y^*, t) + 2\pi m; \quad m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$$

Замечание. В условиях теоремы 7 переменная x в системе (6.2) определяетя выражением

$$x = x^* + 2\mu \int_0^{\psi(x^*, y^*, t)} F(0, y, g(x^*, y)) dy + o(\mu)$$

В автономном уравнении (6.1) интеграл $I(y^0) \equiv 0$, и теорема 7 неприменима. Запишем уравнение (6.1) в виде

$$dx / dy = 2\mu F(\mu, y, g(x,y)) \tag{6.4}$$

Тогда каждому простому корню $x = x^*$ амплитудного уравнения

$$\int_0^{2\pi} F(0, y, g(x, y))dy = 0$$

отвечает [7] единственное 2π-периодическое по y решение уравнения (6.4). Теперь, зная из (6.4) зависимость $x(y)$ для 2π-периодического решения, функцию $z(t)$ определим из второго уравнения системы (6.2). В результате исходное уравнение (6.1) допускает однопараметрическое семейство периодических вращательных движений.

Отметим, что из полученных результатов, в частности, следует, что стационарные решения усредненной системы при исследовании вращательных движений методом В.М. Волосова [15] отвечают точным периодическим вращательным движениям.

Обратимое уравнение. Предположим, что функции f и F в (6.1) удовлетворяют дополнительным условиям

$$f(-z) = -f(z), \quad F(\mu, -z, z^{\cdot}, -t) = -F(\mu, z, z^{\cdot}, t) \tag{6.5}$$

Тогда уравнение (6.1), (6.5) обратимо с неподвижным множеством $\mathbf{M} = \{t, z, z^{\cdot} : \sin t = 0, \sin z = 0\}$. Очевидно, при этом порождающее уравнение также обратимо с неподвижным множеством $\mathrm{M}^* = \{z, z^{\cdot} : \sin z = 0\}$, и все симметричные относительно $\mathbf{M}^*$ вращательные движения описываются нечетными функциями $t - t^0$ (t^0 – начальный момент времени). Множество $\{t, x, y{:}\sin t = 0, \sin y = 0\}$ является неподвижным для обратимой системы (6.2), (6.5). Поэтому симметричное, $2\pi k$-периодическое вращательное движение $\psi(x^*, \pi\beta, t)$, $\beta \in \mathbb{Z}$, $T(x^*) = \pi k/|m|$ ($k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$) порождающей для (6.2) системы продолжается по параметру μ, если (теорема 6)

$$\partial\psi(x^*, \pi\beta, \pi(\alpha + k))/\partial x^* \neq 0$$

($\pi\alpha$ – начальное значение t, при этом $z = \pi\beta$). Выше показано, что это условие всегда выполнено.

Теорема 8. Для обратимого уравнения (6.1), (6.5) все $2\pi k$-периодические вращательные движения

$$T(x^*) = \pi k/|m|, \ \psi(x^*, \pi\beta, t + 2\pi k) = \psi(x^*, \pi\beta, t) + 2\pi m; \ k \in \mathbb{N}, m, \beta \in \mathbb{Z}$$

продолжаются по параметру μ.

В автономном случае уравнение (6.4) при выполнении условий (6.5) описывает движение на неподвижном множестве. Следовательно [5], все решения уравнения (6.1), (6.5) являются 2π-периодическими по z. В частности, это могут быть постоянные решения.

В силу четности функции $V(z)$ нуль будет положением равновесия для порождающего уравнения (фиг. 3). Из 2π-периодичности $V(z)$ следует, что равновесиями являются также точки $z = \pi\beta (\beta \in \mathbb{Z})$. Рассмотрим колебательные движения около одного из этих равновесий (например, точки $z = 0$) и исследуем вопрос о продолжении $2\pi k$-периодических колебаний по параметру μ. Отметим, что рассматриваемое колебательное движение может содержать внутри себя нечетное число положений равновесия (фиг. 3).

Пусть $z(z_0^{\cdot}, t)$ – колебательное решение уравнения (6.1), (6.5) при $\mu = 0$ с начальной точкой $z = 0, z^{\cdot} = z_0^{\cdot}$ при $t = 0$. Вычислим $\partial z / \partial z_0^{\cdot}$ при $T = \pi k$. При $t > T/2$ имеем (фиг. 3)

$$\int_0^z \frac{d\xi}{g(x^*, \xi)} = T - t, \quad T(x^*) = 2\int_0^{z_{\max}} \frac{d\xi}{g(x^*, \xi)}$$

Теперь, учитывая, что $x^* = z_0^{\cdot 2}$, имеем

$$\frac{1}{g(x^*,z)}\frac{\partial z}{\partial \dot{z}_0}-\dot{z}_0\int_0^z\frac{d\xi}{[g(x^*,\xi)]^3}=\frac{\partial T(x^*)}{\partial \dot{z}_0}$$

Так как при $t=T$ имеем $z=0$, то получим

$$\partial z/\partial z_0\,|_{t=T}=\dot{z}_0\partial T(x^*)/\partial z_0$$

причем $\dot{z}_0\neq 0$.

Теорема 9. Симметричное, $2\pi k$-периодическое ($k\in\mathbb{N}$) колебательное движение уравнения (6.1), (6.5) продолжается по параметру μ, если

$$T(x^*)=\pi k/|m|,\ m\in\mathbb{Z},\ \partial T(x^*)/\partial x^*\neq 0$$

7. Спутник в плоскости эллиптической орбиты. Движение спутника в этой задаче описывается уравнением [16]

$$\alpha''-\frac{2e\sin v}{1+e\cos v}(\alpha'+1)+\frac{\mu\sin\alpha\cos\alpha}{1+e\cos v}=\varepsilon F(\varepsilon,\alpha,\alpha',v),\varepsilon\ll 1 \qquad (7.1)$$

Здесь e – эксцентриситет эллиптической орбиты ($0\leq e<1$), μ – инерциальный параметр ($|\mu|\leq 3$), α – угол между радиус-вектором центра масс и главной центральной осью инерции в плоскости орбиты, v – истинная аномалия, выбранная в качестве независимой переменной, ε – малый параметр.

При $\varepsilon=0$ имеем уравнение В.В. Белецкого [17], описывающее движение спутника под действием только гравитационных сил. Возмущения εF обусловлены действием атмосферы, светового давления, магнитного поля и других неучтенных в модели факторов. Предположим, что функция F является 2π-периодической по α и v.

Исследованию уравнения (7.1) посвящены многочисленные работы (см. [16]). При этом наиболее полные результаты получены для $\varepsilon=0$. Здесь построены всевозможные нечетные колебательные и вращательные движения и исследована их устойчивость [2, 16]. Отдельно рассматривались задача о движении спутника под действием гравитационных сил и сопротивления атмосферы [16] и задача о движении под действием гравитационных сил и светового давления [18, 19]. В последней задаче начато [19] систематическое изучение периодических вращательных движений.

При $\varepsilon=0$ уравнение (7.1) обратимо с неподвижным множеством $\mathbf{M}=\{v,\alpha,\alpha'\colon \sin v=0,\ \sin\alpha=0\}$. Это немедленно следует из инвариантности уравнения (7.1) при $\varepsilon=0$ относительно замены $(v,\alpha,\alpha')\to(-v,-\alpha,\alpha')$ и 2π-периодичности относительно v и α. Кроме того, при замене α на $\alpha+\pi/2$ уравнение В.В. Белецкого сохраняет свой вид с заменой μ на $-\mu$ и остается обратимым.

1°. *Спутник на слабоэллиптической орбите* ($e\ll 1$). При $e=0$, $\varepsilon=0$ уравнение (7.1) описывает движение математического маятника и имеет интеграл энергии

$$\alpha'^2+\mu\sin^2\alpha=h(h=\text{const})$$

При $\mu>0$ нулевое положение равновесия устойчиво, и около него есть колебательные движения. Период этих колебаний равен

$$2T=\frac{2}{\sqrt{\mu}}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\varkappa^2u^2)}},\quad \mu\varkappa^2=\alpha_0'^2$$

(α_0' – начальная скорость при $\alpha=\alpha_0=0$). Поэтому $dT/d\varkappa\neq 0$, и все $2\pi k$-периодические колебания, для которых $T=\pi k/m$ ($k,m\in\mathbb{N}$), продолжаются по параметрам e и ε, если возмущения относятся к классу обратимых.

Случай $\mu < 0$ заменой α на $\alpha + \pi/2$ сводится к случаю $\mu > 0$.

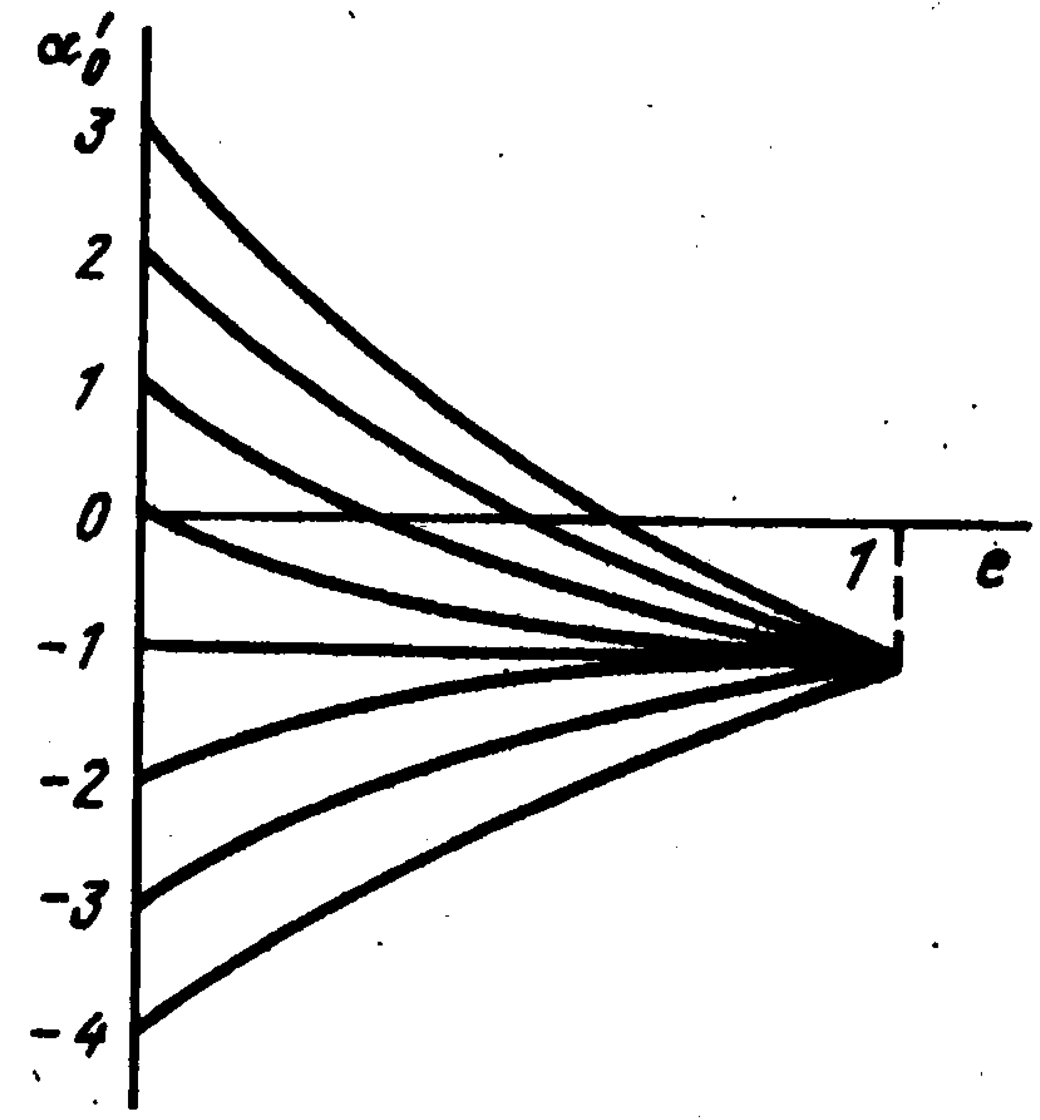
Теорема 10. Если $\mu > 0$, то все $2\pi k$-периодические колебательные движения спутника продолжаются по параметрам e и ε, если возмущения удовлетворяют условию

$$F(\varepsilon, -\alpha, \alpha', -\nu) = -F(\varepsilon, \alpha, \alpha', \nu) \qquad (7.2)$$

При $\mu < 0$ аналогичное условие принимает вид

$$F(\varepsilon, -\alpha + \pi/2, \alpha', -\nu) = -F(\varepsilon, \alpha + \pi/2, \alpha', \nu) \qquad (7.3)$$

Из теоремы 8 вытекает следующее утверждение.



Фиг. 4

Теорема 11. При достаточно малом $\varepsilon \neq 0$ на слабоэллиптической орбите ($e \ll 1$) существуют $2\pi k$-периодические ($k \in \mathbb{N}$) вращательные движения спутника, рождающиеся из вращательных движений спутника на круговой орбите с периодом

$$2T = \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{\sqrt{h - \mu \sin^2 \xi}} = \frac{2\pi k}{|m|}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

если только возмущения удовлетворяют условию (7.2) или (7.3).

Вращательные движения реализуются при $\mu < 0$ ($\mu > 0$), если энергия $h > 0$ ($h > \mu$). В этих движениях спутник поворачивается в относительном движении на $|m|$ оборотов за k оборотов центра масс по эллиптической орбите. При $m > 0$ спутник вращается в том же направлении, что и центр масс (прямое вращение), при $m < 0$ имеем обратное вращение. Если $m = -1$, то в абсолютной системе координат имеем "почти равновесную" ориентацию спутника.

2°. *Спутник, близкий к динамически симметричному телу.* При $\mu = 0$, $\varepsilon = 0$ (динамически симметричный спутник в задаче В.В. Белецкого) имеем

$$\alpha'' - \frac{2e \sin \nu}{1 + e\cos \nu}(\alpha' + 1) = 0 \qquad (7.4)$$

Общее решение этого уравнения задается формулой

$$\alpha = -\nu + (\alpha'_0 + 1)\int_0^{\nu} \frac{(1+e)^2 d\nu}{(1 + e\cos\nu)^2} + \alpha_0$$

(α_0 и α'_0 – значения угла и угловой скорости в перигее орбиты) и представляет равномерное вращение с угловой скоростью $\alpha'_0 + 1$ в абсолютной системе координат. Это решение будет $2\pi k$-периодическим вращением, если

$$\alpha'_0 = -1 + (m/k + 1)(1-e)^{3/2}(1+e)^{-1/2}, \quad m \in \mathbb{Z} \qquad (7.5)$$

При $k = 1$ эти кривые приведены на фиг. 4.

Если $\alpha_0 = 0, \pm\pi/2, \pm\pi, \ldots$, то эти решения симметричны относительно неподвижного множества **M**. Поэтому достаточным условием продолжения этих вращательных движений по параметрам μ и ε является неравенство (теорема 6)

$$\left.\frac{d\alpha}{\partial\alpha'_0}\right|_{\nu=\pi k} = \int_0^{\pi k} \frac{(1+e)^2 d\nu}{(1+e\cos\nu)^2} \neq 0$$

Теорема 12. В задаче (7.1) с возмущениями (7.2) или (7.3) спутник, близкий к динамически симметричному телу, совершает $2\pi k$-периодические вращения, близкие к равномерным вращениям с угловой скоростью (7.5) как в прямом направлении ($m > 0$), так и в обратном направлении ($m < 0$). При этом за k оборотов центра масс по эллиптической орбите спутник поворачивается на $|m|$ оборотов вокруг центра масс.

Отсюда следует, что установленные [20] асимптотическим методом резонансные вращения спутника в задаче В.В. Белецкого отвечают точным периодическим вращениям.

3°. *Возмущенная задача В.В. Белецкого.* При $\varepsilon = 0$ в цикле работ (см. [16]) построены нечетные $2\pi k$-колебательные движения спутника и исследована их устойчивость в линейном приближении. Из этих результатов следует, что граница области устойчивости образует множество меры нуль на плоскости (α_0', e). Отсюда выводим (теорема 2), что почти все указанные колебательные движения продолжаются по параметру ε. В классе возмущений (7.2) или (7.3) уравнение (7.1) остается обратимым. Поэтому чисто мнимые характеристические показатели для колебательных движений при $\varepsilon = 0$ остаются чисто мнимыми при достаточно малых $|\varepsilon| \neq 0$, если только нет резонансов второго порядка [21]. При дополнительном условии отсутствия резонансов до четвертого порядка включительно условие устойчивости по Ляпунову задается [22] отличием от нуля одного коэффициента $C(\alpha_0', \mu, e)$ в формах четвертого порядка уравнений возмущенного движения. Этот коэффициент зависит от α_0', μ, e, и условие $C(\alpha_0', \mu, e) = 0$ выделяет множество меры нуль в области устойчивости в первом приближении на плоскости (α_0', e).

Отметим, что в задаче В.В. Белецкого исследование устойчивости колебательных движений в строгой нелинейной постановке на основе теоремы Арнольда–Мозера [23, 24] и теорем об устойчивости периодической гамильтоновой системы с одной степенью свободы [25] проведено [26].

Все начальные скорости α_0' для вращательных $2\pi k$-периодических движений при $\varepsilon = 0$ строятся численно методом, основанном на теореме 5. Эти результаты получены ранее [2,19]. Определение характеристических показателей проводится построением [27] только одного частного решения системы в вариациях. Далее, из изложенного в разд. 2,5, а также выше в этом пункте выводится справедливость утверждений о продолжении вращательных движений по параметру ε и их устойчивости по Ляпунову.

Теорема 13. Почти все $2\pi k$-периодические колебательные и вращательные движения в задаче В.В. Белецкого продолжаются по малому параметру ε. Почти все устойчивые в линейном приближении $2\pi k$-периодические колебательные и вращательные движения в задаче В.В. Белецкого устойчивы по Ляпунову и почти все такие движения приводят при $\varepsilon \neq 0$ в классе обратимых возмущений (7.2) или (7.3) к устойчивым по Ляпунову колебательным и вращательным движениям периода $2\pi k$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-15-96051, 97-01-00538).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Садов Ю.А.* Периодические движения спутника с магнитным демпфером в плоскости круговой орбиты // Космич. исслед. 1969. Т. 7. Вып. 1. С. 51–60.
2. *Сарычев В.А., Сазонов В.В., Златоустов В.А.* Периодические вращения спутника в плоскости эллиптической орбиты // Космич. исслед. 1979. Т. 17. № 2. С. 190–207.
3. *Пуанкаре А.* Избр. тр. Новые методы небесной механики. Т. 1. М.: Наука, 1971. 771 с.
4. *Андронов А.А., Витт А.А.* Об устойчивости по Ляпунову // ЖЭТФ. 1933. Т. 2. Вып. 5. С. 373–374.
5. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
6. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.

7. *Тхай В.Н.* О методе Ляпунова–Пуанкаре в теории периодических движений // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 355–371.
8. *Heinbockel J.H., Struble R.A.* Periodic solutions for differential systems with symmetries // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1965. V. 13. № 2. P. 425–440.
9. *Тхай В.Н.* Неподвижные множества и симметричные периодические движения обратимых механических систем // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 6. С. 959–971.
10. *Тхай В.Н.* Нелинейные колебания обратимых систем // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 1. С. 38–50.
11. *Тхай В.Н.* Симметричные периодические орбиты задачи многих тел. Резонансность и парад планет // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 3. С. 355–364.
12. *Тхай В.Н.* Симметричные периодические орбиты в ограниченной задаче трех тел // Космич. исслед. 1997. Т. 35. № 2. С. 164–171.
13. *Тхай В.Н.* О продолжении периодических движений обратимой системы в негрубых случаях. Приложение к *N*-планетной задаче // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 1. С. 56–72.
14. *Кац А.М.* Вынужденные колебания нелинейных систем с одной степенью свободы, близких к консервативным // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 1. С. 13–32.
15. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
16. *Сарычев В.А.* Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники. Сер. Исследования космического пространства. Т. 11. М.: ВИНИТИ, 1978. 223 с.
17. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс // Искусственные спутники Земли. М.: Изд-во АН СССР, 1958. № 1. С. 25–43.
18. *Flanagan R.C., Modi V.J.* Attitude dynamics of a gravity orientated satellite under the influence of solar radiation pressure // Aeronaut. J. 1970. V. 74. № 718. P. 835–841.
19. *Гродман Д.Л., Тхай В.Н.* Численное исследование периодических движений спутника на эллиптической орбите под действием гравитационных сил и светового давления // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 1998. С. 107–116.
20. *Черноусько Ф.Л.* Резонансные явления при движении спутника относительно центра масс // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1963. Т. 3. № 3. С. 528–538.
21. *Тхай В.Н.* Некоторые задачи об устойчивости обратимой системы с малым параметром // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 1. С. 3–12.
22. *Бибиков Ю.Н.* Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. Л.: Изд-во ЛГУ, 1991. 143 с.
23. *Арнольд В.И.* Об устойчивости положений равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. № 2. С. 255–257.
24. *Moser J.* On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus // Nachr. Akad. Wiss. Gottingen. Math. Phys. 1962. V. 11a. № 1. P. 1–20.
25. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
26. *Zlatoustov V.A., Markeev A.P.* Stability of planar oscillations of a satellite in an elliptic orbit // Celest. Mech. 1973. V. 7. № 1. P. 31–45.
27. *Зимовщиков А.С., Тхай В.Н.* Об устойчивости треугольных решений неограниченной задачи трех тел // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 1998. С. 117–130.

Москва

Поступила в редакцию
10.IV.1998