

УДК 531.01

© 1999 г. В.В. Румянцев

О ФОРМАХ ПРИНЦИПА ГАМИЛЬТОНА В КВАЗИКООРДИНАТАХ

Для общего случая нелинейных неголономных связей были проанализированы [1] условия вывода в обобщенных координатах и скоростях трех форм принципа Гамильтона, принадлежащих, соответственно, Гёльдеру, Воронцу и Сулову, и было показано, что эти три формы равносильны и преобразуются одна в другую. В продолжение этого анализа аналогичные вопросы исследуются для случая нелинейных квазиординат и квазискоростей и, кроме того, дается вид этих форм принципа Гамильтона при преобразовании Лежандра, приводящего уравнения движения к каноническому виду в квазиординатах.

1. Сначала рассмотрим голономную систему с лагранжевыми координатами q_i и скоростями \dot{q}_i , находящуюся под действием сил с силовой функцией $U(t, q_1, \dots, q_n)$, и произвольные независимые гладкие функции

$$\eta_i \equiv f_i(t, q, \dot{q}) \quad (1.1)$$

в общем случае нелинейные по обобщенным скоростям, такие, что $\det(\partial f_i / \partial \dot{q}_j) \neq 0$. Здесь и всюду далее в разд. 1 индексы i, j, r, s принимают значения $1, \dots, n$.

Разрешая соотношения (1.1), находим выражения

$$\dot{q}_i = F_i(t, q, \eta) \quad (1.2)$$

подстановка которых обращает равенства (1.1) в тождества.

Очевидно, справедливы соотношения

$$f_{si} F_{ir} = \delta_{sr}, \quad f_{ir} F_{si} = \delta_{rs} \quad (1.3)$$

где и далее по повторяющимся индексам производится суммирование, причем $f_{si} \equiv \partial f_s / \partial \dot{q}_i$, $F_{ir} \equiv \partial F_i / \partial \eta_r$; δ_{sr} – символ Кронекера.

Следуя Гамелю [2], примем условные обозначения $\dot{\pi}_s = \eta_s$, где π_s и η_s – нелинейные квазиординаты и квазискорости, а также

$$\frac{\partial}{\partial \pi_s} \equiv F_{is} \frac{\partial}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial}{\partial q_i} = f_{si} \frac{\partial}{\partial \pi_s} \quad (1.4)$$

причем виртуальные перемещения в лагранжевых координатах и квазиординатах связаны соотношениями

$$\delta q_i \equiv F_{is} \delta \pi_s, \quad \delta \pi_s \equiv f_{si} \delta q_i \quad (1.5)$$

Подставив в функцию Лагранжа $L(t, q, \dot{q}) = T(t, q, \dot{q}) + U(t, q)$, где $T(t, q, \dot{q})$ – кинетическая энергия системы, выражения (1.2), получим функцию $L^*(t, q, \eta)$, с помощью которой принцип Даламбера–Лагранжа принимает в квазиординатах вид

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} + \frac{\partial L^*}{\partial \eta_r} W_s^r - \frac{\partial L^*}{\partial \pi_s} \right) \delta \pi_s = 0 \quad (1.6)$$

или вид

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} - \frac{\partial L^*}{\partial \eta_r} f_{ri} T_s^i - \frac{\partial L^*}{\partial \pi_s} \right) \delta \pi_s = 0 \quad (1.7)$$

где использованы обозначения [3]

$$W_s^r \equiv F_{is} \left(\frac{df_{ri}}{dt} - \frac{\partial f_r}{\partial q_i} \right), \quad T_s^i \equiv \frac{dF_{is}}{dt} - \frac{\partial F_i}{\partial \pi_s} \quad (1.8)$$

Вследствие произвольности $\delta \pi_s$ из (1.6) или (1.7) следуют уравнения движения под действием потенциальных сил голономной системы в квазикоординатах в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} + \frac{\partial L^*}{\partial \eta_r} W_s^r - \frac{\partial L^*}{\partial \pi_s} = 0 \quad (1.9)$$

или в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} - \frac{\partial L^*}{\partial \eta_r} f_{ri} T_s^i - \frac{\partial L^*}{\partial \pi_s} = 0 \quad (1.10)$$

Уравнения вида (1.9) и (1.10) были выведены впервые Гамелем [2] из центрального уравнения Лагранжа с помощью установленных им в предположении $d\delta q_i = \delta dq_i$ уравнений транзитивности

$$\frac{d\delta \pi_s}{dt} - \delta \eta_s = W_r^{ss} \delta \pi_r \quad \text{и} \quad \frac{d\delta \pi_s}{dt} - \delta \eta_s = - \frac{\partial \eta_s}{\partial \dot{q}_i} T_r^i \delta \pi_r \quad (1.11)$$

и названы первой и второй формами уравнений движения, соответственно. При этом Гамель отметил, что уравнения (1.9) имеют тот недостаток, что при вычислении коэффициентов W_s^r появляются \dot{q}_i и \ddot{q}_i ; в уравнениях (1.10) фигурируют функции f_{ri} , зависящие от \dot{q}_j , которые можно выразить через функции, зависящие от q_i и η_s . Уравнения (1.10) явились естественным обобщением ранее выведенных Гамелем уравнений Лагранжа–Эйлера в линейных квазикоординатах [2].

В.С. Новоселов [3] вывел уравнения (1.9) и (1.10) (с заменой в последних множителей $(\partial L^* / \partial \eta_r) f_{ri}$ на $\partial L / \partial \dot{q}_i$) также с помощью уравнений транзитивности (1.11) из принципа Гамильтона

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L^* dt = 0, \quad \delta \pi_s \Big|_{t_0} = \delta \pi_s \Big|_{t_1} = 0 \quad (1.12)$$

и назвал их уравнениями типа Воронца–Гамеля и типа Чаплыгина, соответственно.

Эти же уравнения были выведены [4] из уравнений Маджи без использования уравнений (1.11).

Отметим, что уравнения (1.9) или (1.10) приводят, в свою очередь, к принципу Гамильтона (1.12): для этого надо умножить их на $\delta \pi_s$, просуммировать по s , результат проинтегрировать по t от t_0 до t_1 и с учетом (1.11) получить (1.12).

Уравнения (1.9) и (1.10) с помощью преобразования Лежандра [5]

$$y_s = \frac{\partial L^*}{\partial \eta_s}, \quad H^*(t, q, y) = y_s \eta_s - L^*(t, q, \eta) \quad (1.13)$$

были приведены [4] к виду канонических уравнений в квазикоординатах

$$\frac{dy_s}{dt} + y_r W_s^r + \frac{\partial H^*}{\partial \pi_s} = 0, \quad \eta_s = \frac{\partial H^*}{\partial y_s} \quad (1.14)$$

или

$$\frac{dy_s}{dt} - y_r f_{ri} T_s^i + \frac{\partial H^*}{\partial \pi_s} = 0, \quad \eta_s = \frac{\partial H^*}{\partial y_s} \quad (1.15)$$

Коэффициенты W_s^r и T_s^r этих уравнений следует выразить через y_r с помощью соотношений (1.1), (1.2) и (1.13).

Уравнения (1.14) или (1.15) позволяют получить вторую форму принципа Гамильтона. В самом деле, умножим первую группу уравнений (1.14) или (1.15) на $\delta \pi_s$, вторую группу на $-\delta y_s$, просуммируем по всем s , результат проинтегрируем по t , учитывая (1.11), и, полагая $\delta \pi_s = 0$ при $t = t_0, t_1$, получим

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\left(\frac{dy_s}{dt} + y_r W_s^r + \frac{\partial H^*}{\partial \pi_s} \right) \delta \pi_s - \left(\eta_s - \frac{\partial H^*}{\partial y_s} \right) \delta y_s \right) dt = \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} \left(y_s \left(\frac{d\delta \pi_s}{dt} - W_r^s \delta \pi_r \right) + \eta_s \delta y_s - \delta H^* \right) dt = - \delta \int_{t_0}^{t_1} (y_s \eta_s - H^*) dt \end{aligned}$$

Таким образом, доказана справедливость для голономной системы второй формы принципа Гамильтона в квазикоординатах

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (y_s \eta_s - H^*) dt = 0, \quad \delta \pi_s \Big|_{t_0} = \delta \pi_s \Big|_{t_1} = 0 \quad (1.16)$$

В свою очередь уравнения (1.14) и (1.15) можно вывести из принципа (1.16). Следует отметить, что принцип (1.16) имеет самостоятельное значение из-за предположения о произвольности и независимости вариаций δy_s от виртуальных перемещений $\delta \pi_s$ внутри интервала (t_0, t_1) [5].

2. Обратимся теперь к неголономной системе с k степенями свободы, стесненной нелинейными связями вида

$$\eta_\alpha \equiv f_\alpha(t, q, \dot{q}) = 0, \quad \text{rank}(f_{\alpha i}) = n - k \quad (2.1)$$

$$i = 1, \dots, n; \quad \alpha = k + 1, \dots, n$$

Введем в рассмотрение произвольные квазискорости

$$\eta_s = \frac{d\pi_s}{dt} \equiv f_s(t, q, \dot{q}), \quad s = 1, \dots, k \quad (2.2)$$

такие, что $\det(f_{si}) \neq 0$ ($i, s = 1, \dots, n$), так что равенства (2.1), (2.2) позволяют получить выражения вида (1.2). Виртуальные перемещения неголономной системы определим условиями Четаева

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = 0, \quad \alpha = k + 1, \dots, n \quad (2.3)$$

Для виртуальных перемещений по-прежнему будем иметь соотношения (1.5), но лишь для $s = 1, \dots, k$, так как при связях (2.1) согласно (2.3) имеем $\delta \pi_\alpha = 0$ ($\alpha = k + 1, \dots, n$), тогда как величины $\delta \pi_s$ ($s = 1, \dots, k$) будут произвольными. Из принципа Даламбера-Лагранжа (1.6) или (1.7) следуют при этом уравнения движения неголономной системы в квазикоординатах вида (1.9) и (1.10), но лишь для $s = 1, \dots, k$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} + \frac{\partial L^*}{\partial \eta_r} W_s^r - \frac{\partial L^*}{\partial \pi_s} = 0, \quad \eta_\alpha = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} - \frac{\partial L^*}{\partial \eta_r} f_{ri} T_s^i - \frac{\partial L^*}{\partial \pi_s} = 0, \quad \eta_\alpha = 0 \quad (2.5)$$

$$s = 1, \dots, k; \alpha = k + 1, \dots, n; i, r = 1, \dots, n$$

Полагать $\eta_\alpha = 0$ в этих уравнениях можно лишь после их составления в явном виде, так как в них фигурируют, вообще говоря, все $\partial L^* / \partial \eta_r$ ($r = 1, \dots, n$).¹

Первые k обеих групп уравнений транзитивности (1.11) сохраняют свой вид при условии, что в их правых частях $\delta \pi_r = 0$ для $r = k + 1, \dots, n$, а остальные уравнения принимают вид [3]

$$\delta \eta_\alpha = -W_r^\alpha \delta \pi_r \text{ и } \delta \eta_\alpha = \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \dot{q}_i} T_r^i \delta \pi_r \quad (2.6)$$

$$r = 1, \dots, k; \alpha = k + 1, \dots, n; i = 1, \dots, n$$

Аналогично канонические уравнения движения имеют вид первых k пар уравнений (1.14) и (1.15), т.е. для $s = 1, \dots, k$, к которым должны быть присоединены уравнения связей (2.1), переписанные в виде

$$\partial H^* / \partial y_\alpha = 0, \quad \alpha = k + 1, \dots, n \quad (2.7)$$

Для неголономной системы принцип Гамильтона в виде (1.12) или (1.16) в общем случае места не имеет, так как окольные пути не удовлетворяют уравнениям связей (2.1) [1,6], однако он справедлив в форме Гельдера

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L^* dt = 0, \quad \delta \pi_s \Big|_{t_0} = \delta \pi_s \Big|_{t_1} = 0, \quad s = 1, \dots, k \quad (2.8)$$

а также в соответствующей ему второй форме

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta (y_s \eta_s - H^*) dt = 0, \quad \delta \pi_s \Big|_{t_0} = \delta \pi_s \Big|_{t_1} = 0, \quad s = 1, \dots, k \quad (2.9)$$

Перейдем к выводу уравнений Воронца в квазикоординатах, в которых фигурируют члены, зависящие от кинетической энергии неголономной системы [7]. С этой целью заменим входящую в функцию $L^*(t, q, \eta)$ в уравнениях (2.4) и (2.5) кинетическую энергию $T^*(t, q, \eta)$ голономной системы на кинетическую энергию $\Theta^*(t, q, \eta_1, \dots, \eta_k)$ неголономной системы со связями (2.1). Так как при $\eta_\alpha = 0$ ($\alpha = k + 1, \dots, n$) справедливы соотношения [8]

$$\frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} = \frac{\partial \Theta^*}{\partial \eta_s}, \quad \frac{\partial L^*}{\partial \pi_s} = \frac{\partial (\Theta^* + U)}{\partial \pi_s}, \quad \frac{\partial L^*}{\partial \eta_\alpha} = \left(\frac{\partial T^*}{\partial \eta_\alpha} \right)_0; \quad s = 1, \dots, k; \alpha = k + 1, \dots, n \quad (2.10)$$

где

$$\left(\frac{\partial T^*}{\partial \eta_\alpha} \right)_0 = \frac{\partial T^*}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{\eta_\beta = 0}, \quad \beta = k + 1, \dots, n$$

то первые k уравнений (2.4) и (2.5) можно представить в виде уравнений Воронца в квазикоординатах

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta^*}{\partial \eta_s} - \frac{\partial (\Theta^* + U)}{\partial \pi_s} + \left(\frac{\partial T^*}{\partial \eta_i} \right)_0 W_s^i = 0, \quad s = 1, \dots, k; i = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

¹ Пользуясь случаем, исправляю опечатки в работе [4]: на с. 538 в 11 строке сверху вместо $r, s = 1, \dots, k$ должны быть $s = 1, \dots, k$; в 13 строке сверху вместо (I) и (II) должны быть (I) и (II).

и

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta^*}{\partial \eta_s} - \frac{\partial(\Theta^* + U)}{\partial \pi_s} - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)^* T_s^i = 0, \quad s = 1, \dots, k; \quad i = 1, \dots, n \quad (2.12)$$

причем $(\partial T / \partial \dot{q}_i)^*$ означает результат замены \dot{q}_i соотношениями (1.2) в выражении $\partial T / \partial \dot{q}_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Уравнения (2.11) и (2.12) приводят к форме Вронца принципа Гамильтона для неголономной системы в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta(\Theta^* + U) - \left(\frac{\partial T}{\partial \eta_\alpha} \right)_0 W_s^\alpha \delta \pi_s \right) dt = 0, \quad \delta \pi_s|_{t_0} = \delta \pi_s|_{t_1} = 0 \quad (2.13)$$

или в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta(\Theta^* + U) + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)^* T_s^i \delta \pi_s \right) dt = 0, \quad \delta \pi_s|_{t_0} = \delta \pi_s|_{t_1} = 0 \quad (2.14)$$

В свою очередь уравнения (2.11) или (2.12) можно получить из (2.13) или (2.14) [6], соответственно.

С помощью преобразования Лежандра

$$y_s = \frac{\partial \Theta^*}{\partial \eta_s}, \quad H^*(t, q, y) = y_s \eta_s - \Theta^*(t, q, \eta) - U(t, q), \quad s = 1, \dots, k \quad (2.15)$$

при условии $\|\partial^2 \Theta^* / \partial \eta_r \partial \eta_s\| \neq 0$ ($r, s = 1, \dots, k$) уравнения (2.11) и (2.12) приводятся к виду канонических уравнений в квазикоординатах

$$\frac{dy_s}{dt} + \frac{\partial H^*}{\partial \pi_s} + \left(\frac{\partial T}{\partial \eta_i} \right)_0 W_s^i = 0, \quad \eta_s = \frac{\partial H^*}{\partial y_s} \quad (2.16)$$

и

$$\frac{dy_s}{dt} + \frac{\partial H^*}{\partial \pi_s} - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)^* T_s^i = 0, \quad \eta_s = \frac{\partial H^*}{\partial y_s} \quad (2.17)$$

Уравнения (2.16) или (2.17) позволяют получить вторую форму Вронца принципа Гамильтона в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta(y_s \eta_s - H^*) - \left(\frac{\partial T}{\partial \eta_\alpha} \right)_0 W_s^\alpha \delta \pi_s \right) dt = 0, \quad \delta \pi_s|_{t_0} = \delta \pi_s|_{t_1} = 0 \quad (2.18)$$

или в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta(y_s \eta_s - H^*) + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)^* T_s^i \delta \pi_s \right) dt = 0, \quad \delta \pi_s|_{t_0} = \delta \pi_s|_{t_1} = 0 \quad (2.19)$$

$s = 1, \dots, k; \quad i = 1, \dots, n; \quad \alpha = k + 1, \dots, n.$

Используя соотношения (2.10), нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$\delta L^* = \delta(\Theta^* + U) - \left(\frac{\partial T}{\partial \eta_\alpha} \right)_0 W_s^\alpha \delta \pi_s = \delta(\Theta^* + U) + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)^* T_s^i \delta \pi_s \quad (2.20)$$

доказывающих эквивалентность форм Воронца формам Гёльдера принципа Гамильтона в квазикоординатах для неголономной системы.

В заключение рассмотрим важный частный случай неголономных связей (2.1), разрешенных относительно некоторых обобщенных скоростей. Пусть связи (2.1) заданы в виде [1]

$$\eta_\alpha \equiv f_\alpha(t, q, \dot{q}) = \dot{q}_\alpha - \Phi_\alpha(t, q, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k) = 0 \quad (2.21)$$

За параметры η_s примем независимые скорости \dot{q}_s

$$\eta_s = \dot{q}_s \quad (2.22)$$

Здесь и далее $\alpha = k + 1, \dots, n$; $s = 1, \dots, k$.

В этом случае уравнения (2.6) превращаются в уравнения [1]

$$\delta\eta_\alpha = \delta\dot{q}_\alpha - \delta\Phi_\alpha = A_s^\alpha \delta q_s \quad (2.23)$$

а первые k уравнений транзитивности (1.11) становятся тождествами, так как

$$W_r^s = -\frac{\partial \eta_s}{\partial \dot{q}_i} T_r^i = 0, \quad r = 1, \dots, k$$

причем

$$A_s^\alpha = \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_s} - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_\beta} \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \dot{q}_s}, \quad \beta = k + 1, \dots, n \quad (2.24)$$

Уравнения Воронца (2.11) принимают вид [7,1]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial q_s} - \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} A_s^\alpha = 0 \quad (2.25)$$

Здесь $\Theta(t, q, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k)$ – кинетическая энергия неголономной системы в обобщенных скоростях, в которую переходит кинетическая энергия голономной системы $T(t, q, \dot{q})$ при учете связей (2.21). Уравнения (2.25) выведены Воронцом [7] из принципа Гамильтона в форме Воронца²

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta(\Theta + U) + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} (\delta\dot{q}_\alpha - \delta\Phi_\alpha) \right) dt = 0, \quad \delta q_s|_{t_0} = \delta q_s|_{t_1} = 0 \quad (2.26)$$

эквивалентного форме Гёльдера в силу равенства (2.20), принимающего в обобщенных координатах и скоростях вид [1]

$$\delta T = \delta \Theta + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} (\delta\dot{q}_\alpha - \delta\Phi_\alpha) \quad (2.27)$$

С помощью преобразования Лежандра

$$p_s = \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_s}, \quad H(t, q, p) = p_s \dot{q}_s - \Theta(t, q, \dot{q}_s) - U(t, q)$$

уравнения (2.25) приводятся к виду канонических уравнений

$$\frac{dp_s}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_s} + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \left(\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \dot{q}_s} \right)^* - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} A_s^\alpha \right)^* = 0, \quad \frac{\partial q_s}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_s} \quad (2.28)$$

где $(\psi)^*$ означает выражение ψ через p_s .

² Отметим, что эквивалентная (2.26) формула (51) и разд. 6 [6] неправильно названы принципом Сулова: последний имеет вид (2.31) (см. ниже).

Уравнения (2.28) приводят ко второй форме Воронца принципа Гамильтона в обобщенных координатах и импульсах

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta(p_s \dot{q}_s - H) + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} A_s^\alpha \right)^* \delta q_s \right) dt = 0, \quad \delta q_s \Big|_{t_0} = \delta q_s \Big|_{t_1} = 0 \quad (2.29)$$

Гельдер и Воронец принимали $\delta dq_i = d\delta q_i$ ($i = 1, \dots, n$). Согласно другой точке зрения, принадлежащей Аппелю и Суслову [9], такие соотношения имеют место лишь для $i = 1, \dots, k$, а для $\alpha = k + 1, \dots, n$ имеют место соотношения

$$\frac{d}{dt} \delta q_\alpha - \bar{\delta} \dot{q}_\alpha = A_s^\alpha \delta q_s \quad (2.30)$$

где $\bar{\delta}$ означает вариацию в смысле Аппеля – Суслова, что приводит к форме Суслова принципа Гамильтона [9, 1]

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\bar{\delta} L + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} A_s^\alpha \delta q_s \right) dt = 0, \quad \delta q_s \Big|_{t_0} = \delta q_s \Big|_{t_1} = 0 \quad (2.31)$$

Так как при условиях (2.30) равенство (2.27) принимает вид $\bar{\delta} T = \delta \Theta$, то очевидно, что (2.31) приводится к виду (2.26) формы Воронца принципа Гамильтона.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00261) и Федеральной целевой программы "Интеграция".

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В.В. О принципе Гамильтона для неголономных систем // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 387–399.
2. Hamel G. Theoretische Mechanik. Berlin: Springer, 1949. 796 p.
3. Новоселов В.С. Вариационные методы в механике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1966. 71 с.
4. Румянцев В.В. К уравнениям Пуанкаре и Четаева // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 4. С. 531–538.
5. Четаев Н.Г. Уравнения Пуанкаре // Теоретическая механика. М.: Наука, 1987. С. 287–322.
6. Papastavridis J.G. Time-integral variational principles for nonlinear nonholonomic systems // Journal of Applied Mechanics. December 1997. V. 64. P. 985–991.
7. Воронец П.В. Об уравнениях движения для неголономных систем // Матем. сб. 1901. Т. 22. Вып. 4. С. 659–686.
8. Румянцев В.В. Об уравнениях Пуанкаре – Четаева // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 3–16.
9. Сулов Г.К. Об одном видоизменении начала Даламбера // Матем. сб. 1901. Т. 32. Вып. 4. С. 687–691.

Москва

Поступила в редакцию
3.IX.1998