ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 63. Вып. 2, 1999

УДК 532.5

© 1999 г. П.Я. Кочина, Н.Н. Кочина

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Отмечается семь свойств дробно-линейной аналитической функции, многие из которых сохраняются и в области действительных переменных. И в том и в другом случаях эти свойства важны для приложений к задачам подземной гидромеханики.[1]

Исследования линейных обыкновенных уравнений класса Фукса [1, 2] проводились еще в 19-м веке. Обширный библиографический материал по этим вопросам имеется в книге В.В. Голубева [3], а также В.И. Смирнова [4].

В течение многих лет такими исследованиями занимались П.Я. Кочина (часть ее результатов, связанных с ними, изложена в книгах [5, 6]), А.Р. Цицкишвили (см., например, [7]), Э.Н. Береславский (см., например, [8, 9]), Н.Н. Кочина (см., например, [10, 11]).

Отметим, что с помощью дробно-линейного преобразования круговые многоугольники, играющие основополагающую роль в теории аналитических уравнений класса Фукса, можно иногда преобразовать в более простые.

Дробно-линейное преобразование – это отображение вида

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \Delta \equiv ad - bc \neq 0 \tag{1}$$

где a, b, c, d – комплексные числа. Часто применяется унимодулярное преобразование, т.е. такое, для которого $\Delta = 1$; чтобы его получить, достаточно каждое из чисел a, b, c, d разделить на $\pm\sqrt{\Delta}$. Формула (1) показывает, что

$$dw/dz = \Delta/(cz+d)^2 \tag{2}$$

Из (1) видно также, что всякое дробно-линейное отображение можно доопределить до взаимно-однозначного отображения расширенной плоскости $\overline{C}$ (т.е. плоскости C, пополненной точкой $z = \infty$) на себя.

Отметим некоторые свойства дробно-линейного преобразования [1, 3].

1°. Дробно-линейное преобразование (1) отображает расширенную плоскость $\overline{C}$ на себя взаимно-однозначно и конформно. При этом любая окружность на $\overline{C}$ (т.е. окружность на C или прямая, пополненная точкой $z = \infty$, как окружность бесконечно большого радиуса), переходит в окружность на $\overline{C}$.

Из (2) следует, что дробно-линейное преобразование конформно на всей плоскости z, кроме точки $z = -d/c$, где оно имеет простой полюс. В бесконечно удаленной точке $z = \infty$ углы также сохраняются, если преобразование (1) не является линейным, т.е. при $c \neq 0$ (если под углом между линиями при $z = \infty$ понимать угол между линиями, полученными при отображении $z = 1/z_1$ в точке $z_1 = 0$). Действительно, выполнив подстановку $z_1 = 1/z$, найдем, что функция $w(z_1)$ в точке $z_1 = 0$ при $c \neq 0$ регулярна и имеет производную, отличную от нуля.

[1] В кратком виде эти результаты изложены ранее, см. *Кочина П.Я., Береславский Э.Н., Кочина Н.Н.* Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений класса Фукса и некоторые задачи подземной гидромеханики. Ч. 1.: Препринт № 567. М.: Ин-т проблем механики РАН, 1996. 124 с., гл. II, § 4 (этот параграф написан *П.Я. Кочиной* и *Н.Н. Кочиной*).

2°. Пара точек z, z^*, симметричных относительно какой-либо окружности Q на $\overline{C}$, переходит в пару точек w, w^*, симметричных относительно образа этой окружности.

3°. Двойное (ангармоническое) отношение четырех точек на $\overline{C}$ инвариантно относительно дробно-линейного преобразования, если точки z_i переходят соответственно в точки w_i ($i = 1, 2, 3, 4$)

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} = \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} : \frac{w_4 - w_1}{w_4 - w_2} \tag{3}$$

Для любых заданных троек z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3, попарно различных на $\overline{C}$, существует, и притом только одно, дробно-линейное отображение, переводящее z_k в w_k ($k = 1,2,3$); это отображение можно найти из (3), подставляя в него z вместо z_4 и w вместо w_4

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_2)(w_1 - w_3)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_2)(z_1 - z_3)} \tag{4}$$

Если одна из точек бесконечно удаленная, достаточно заменить в (4) ту часть отношения (4), в которую входила бесконечность, предельным значением этой части. Если $z_1 = \infty$, или $z_2 = \infty$, или $z_3 = \infty$, заменяем правую часть равенства (4) на

$$-\frac{z_2 - z_3}{z - z_2}, \quad -\frac{z - z_1}{z_1 - z_3}, \quad -\frac{z - z_1}{z - z_2}$$

соответственно. Аналогичные изменения обязательны в левой части, если одна из величин w_1, w_2, w_3 бесконечно велика.

4°. Преобразование, обратное преобразованию (1), имеет вид

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a} \tag{5}$$

т.е. снова является дробно-линейным преобразованием. Это преобразование, выполненное вслед за преобразованием (1), возвращает каждую фигуру в ее первоначальное положение.

Тождественное преобразование

$$w = z \tag{6}$$

есть, таким образом, единичное преобразование.

Применяя к дробно-линейному унимодулярному преобразованию (1) повторно преобразование (1), получим снова дробно-линейное унимодулярное преобразование. Отсюда следует, что все дробно-линейные преобразования образуют группу; имеет место свойство ассоциативности; вообще говоря, коммутативность не имеет места.

Среди подгрупп общей группы всех дробно-линейных преобразований, с точки зрения их применения к аналитической теории дифференциальных уравнений, особенно важны дискретные группы Г дробно-линейного преобразования. Дискретные группы Г дробно-линейных преобразований, имеющие инвариантную окружность γ на $\overline{C}$, общую для всех преобразований Г, причем внутренность γ при всех преобразованиях Г переходит в себя, называются фуксовыми группами.

Примером фуксовой группы является модулярная группа. Она состоит из всех унимодулярных дробно-линейных преобразований (или отображений) (1), у которых коэффициенты a, b, c, d – целые действительные числа; действительная ось инвариантна относительно модулярных дробно-линейных отображений [1].

5°. Если исключить тождественное дробно-линейное преобразование, можно заключить, что преобразование (1) имеет не больше двух неподвижных точек ξ_1, ξ_2 на $\overline{C}$ (таких, что $w = z = \zeta$). В случае двух различных неподвижных точек $\xi_1 \neq \xi_2$

семейство окружностей Σ, проходящих через ξ_1 и ξ_2, переводится преобразованием (1) в себя. Семейство Σ' всех окружностей, ортогональных к окружностям Σ, также переходит в себя.

Если две неподвижные точки сливаются в одну, то семейство Σ состоит из всех окружностей, имеющих в ξ_1 общую касательную; каждая окружность Σ переходит сама в себя. При этом $a + d = \pm 2$..

6°. Функция (1) удовлетворяет нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка

$$\frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2 = 0 \tag{7}$$

7°. Уравнение (7) инвариантно относительно дробно-линейного преобразования

$$z_1 = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$

и его общее решение содержит три независимые постоянные (в выражение (1) входят три постоянные – отношения величин a, b, c и d к одной из этих величин).

Другие интересные свойства отображения (1) приведены в [11].

Рассмотрим теперь дробно-линейную функцию в области действительных переменных (x, y)

$$y = f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \Delta = ad - bc \neq 0 \tag{8}$$

(теперь считаем x, y, a, b, c, d действительными числами).

Уравнение (8) может быть записано в виде

$$y = y_a - \frac{\Delta}{c^2(x - x_a)}; \quad y_a = \frac{a}{c}, \quad x_a = -\frac{d}{c} \tag{9}$$

Уравнения (8) и (9) представляют равнобочную гиперболу с асимптотами $x = x_a$, $y = y_a$, параллельными осям координат.

Перейдем теперь от переменных (x, y) к переменным (ξ, η) согласно формулам [10, 11][2]

$$\xi = \frac{x - x_0}{X - x}, \quad \eta = \frac{y - y_0}{Y - y} \tag{10}$$

Здесь x_0, y_0, X, Y – некоторые заданные постоянные.

Преобразования (10) были предложены О.И. Шишориной [12], при этом оказывается, что формулы (10) переводят дробно-линейную функцию (8) в линейную, а именно

$$\eta = B\xi, \quad B = \frac{X - x_a}{x_0 - x_a}$$

Каждая из двух формул (10) представляет также дробно-линейную функцию – это так называемые "простые отношения".

Использование преобразований (10) в частности, при $x_0 = y_0 = 0$ в областях $x_0 \leqslant x \leqslant X$, $y_0 \leqslant y \leqslant Y$ дает возможность решения многих практических задач [12–14]. В

---

[2] См. также: *Кочина П.Я., Шишорина О.И.* Дробно-линейные преобразования и их применения. Препринт № 307. М.: Ин-т проблем механики, 1987. 57 с.

частности, некоторые расчетные кривые, полученные при решении задачи о фильтрации воды через прямоугольную земляную перемычку [5,6], могут быть аппроксимированы эмпирическими формулами – равнобочными гиперболами – с использованием формул (10) [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Форд Л.Р.* Автоморфные функции. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 340 с.
2. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: Науч.-техн. изд-во Украины, 1939. 71 с.
3. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
4. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. М.: Наука, 1969. 672 с.
5. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1942. 144 с.
6. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1952. 676 с.; 2 изд., 1977. 664 с.
7. *Цицкишвили А.Р.* О конформном отображении полуплоскости на круговые многоугольники // Докл. АН СССР. 1973. Т. 211. № 2. С. 300–303.
8. *Береславский Э.Н.* Об интегрировании в замкнутой форме одного класса фуксовых уравнений и их приложения // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 6. С. 1048–1050.
9. *Береславский Э.Н., Кочина П.Я.* О дифференциальных уравнениях класса Фукса, встречающихся в некоторых задачах механики жидкостей и газов // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 5. С. 9–17.
10. *Кочина П.Я., Кочина Н.Н.* Гидромеханика подземных вод и вопросы орошения. М.: Физматлит, 1994. 240 с.
11. *Кочина П.Я., Кочина Н.Н.* Задачи о движениях со свободной поверхностью в подземной гидродинамике. М.: Редакция ж-ла "Успехи физических наук", 1996. 176 с.
12. *Шишорина О.И.* Концентрация напряжений около двух круговых близко расположенных отверстий // Проблемы прочности в машиностроении. М.: Изд-во АН СССР, 1962. Вып. 9. С. 27–34.
13. *Кочина П.Я., Шишорина О.И.* Дробно-линейные преобразования и уравнения эмпирических кривых // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57. № 1. С. 215–219.
14. *Кочина П.Я., Саввинов Д.Д., Шишорина О.И., Ларионов В.П., Бунин И.Ж., Саввинов А.С.* Простые отношения в природе. Пропорциональность, инвариантность, подобие. М.: Наука, 1996. 208 с.

Москва

Поступила в редакцию
1.X.1998