

УДК 539.3

© 1999 г. В.В. Елисеев, С.Г. Орлов

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ ДЛЯ УДЛИНЕННЫХ ТЕЛ СО СТРУКТУРОЙ

Рассматривается равновесие линейно-упругих удлинённых тел (стержней) с весьма произвольной геометрией и структурой при силовых и тепловых воздействиях. Наличие малого параметра – относительной толщины – делает задачу сингулярно возмущённой. В процессе асимптотического анализа трёхмерная задача расщепляется на одномерную и двумерные. Одномерная задача оказывается в полном согласии с классической теорией даже при структурной неоднородности и анизотропии материала, когда традиционные гипотезы прикладных теорий теряют силу. Двумерные задачи позволяют не только определить параметры одномерной модели, но и достроить решение до трёхмерного. Алгоритм расщепления пространственной задачи реализован на ЭВМ. Для удлинённых тел он может быть эффективнее традиционных методов конечных элементов, граничных элементов и разностных.

Данная работа продолжает предыдущие исследования [1, 2]. В иной постановке асимптотический анализ пространственной задачи для стержня рассматривался ранее [3–7].

1. Постановка задачи и наводящие соображения. Геометрия рассматриваемых стержней определяется прежде всего осью – гладкой пространственной кривой с зависимостью радиус-вектора от дуговой координаты $\mathbf{r}(s)$. Нормальное к оси сечение стержня одинаково для всех s геометрически и физически. Материал неоднороден и ортотропен, каждое сечение лежит в плоскости материальной симметрии. Тело нагружено силами \mathbf{f} , произвольно распределёнными по объёму.

Равновесие линейно упругой среды описывается уравнениями [8]

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} = 0, \text{ inc } \mathbf{D} \equiv \nabla \times (\nabla \times \mathbf{D})^T = 0$$

$$\mathbf{D} = {}^4 \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \nabla \mathbf{u}^S \tag{1.1}$$

(\mathbf{T} и \mathbf{D} – тензоры напряжений и деформаций, \mathbf{u} – вектор перемещения). О тензоре четвертого ранга ${}^4 \mathbf{A}$ для рассматриваемого материала – позднее.

Боковая поверхность стержня считается свободной: $\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = 0$ (\mathbf{N} – нормаль к боковой поверхности). Это не снижает общности рассмотрения, поскольку объёмные силы произвольны. Условия на торцах $s = \text{const}$ требуют специального анализа.

Малость относительной толщины можно выразить следующим представлением радиус-вектора в трёхмерном теле:

$$\mathbf{R}(x_\alpha, s) = \lambda^{-1} \mathbf{r}(s) + \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = x_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \lambda \rightarrow 0$$

где $x_\alpha, \mathbf{e}_\alpha$ – декартовы координаты в сечении и соответствующие орты. Тройке координат $q^1 = x_1, q^2 = x_2, q^3 = s$ отвечает выражение оператора Гамильтона

$$\nabla = \nabla_\perp + v^{-1} \mathbf{t}(\partial_s - k_r L) \tag{1.2}$$

$$\nabla_{\perp} \equiv \mathbf{e}_{\alpha} \partial / \partial x_{\alpha}, \quad \mathbf{t} \equiv \partial_s \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}'$$

$$\nu \equiv \lambda^{-1} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{k}_{\perp} \times \mathbf{x}, \quad L \equiv \mathbf{t} \cdot \mathbf{x} \times \nabla_{\perp}$$

$\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\perp} + k_t \mathbf{t}$ – вектор кривизны и кручения ($\mathbf{e}'_i = \mathbf{k} \times \mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{t}$).

Через ∇ -оператор малый параметр λ попадает в уравнения (1.1), позволяя начать асимптотический анализ. Схема анализа хорошо иллюстрируется линейной алгебраической системой $Cu = f$, $C = C_0 + \lambda C_1$. Случай регулярного возмущения ($\det C_0 \neq 0$) малоинтересен: $u = u_0 + \lambda u_1 + \dots$, $C_0 u_0 = f$, $C_0 u_1 = -C_1 u_0$, ... – главный член асимптотики находится на первом же шаге, достаточно отбросить формально малые члены в постановке задачи.

Асимптотическое расщепление возникает, когда задача $C_0 u_0 = 0$ имеет нетривиальное решение ($\det C = 0$). При этом на первом шаге решение определяется лишь частично; необходимы последующие шаги, чтобы из некоторых условий разрешимости найти все детали главного члена асимптотики. Процесс может выглядеть так:

$$u = \lambda^{-1} u_0 + u_1 + \dots, \quad C_0 u_0 = 0 \Rightarrow \psi_n^T (f - C_1 \sum a_k \varphi_k) = 0$$

($\psi_k : C_0^T \psi_k = 0$, использовано конструктивное условие разрешимости линейной однородной задачи). Исходная задача разделилась на три – с неизвестными φ_k , ψ_k и a_k соответственно.

Вместо λ^{-1} главный член может содержать и иную степень: λ^0 , λ^{-2} и др. Число шагов также может быть разным, но не меньше двух. Рассматриваемые задачи о равновесии стержня оказались такими, что вектор перемещения $\mathbf{u} = \lambda^{-4} \mathbf{u}_0 + \lambda^{-3} \mathbf{u}_1 + \dots$. Поскольку объемные силы \mathbf{f} порядка единицы, то нетрудно предвидеть, что расщепление задачи в перемещениях потребует пяти шагов. Поэтому начнем с постановки в напряжениях – там число шагов сократится до трех.

2. Расщепление задачи в напряжениях. Тензоры напряжений и деформаций представим в виде

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\perp} + 2S\mathbf{t}^S + \sigma_t \mathbf{t}\mathbf{t}, \quad \mathbf{T}_{\perp} \equiv T_{\alpha\beta} \mathbf{e}_{\alpha} \mathbf{e}_{\beta}, \quad \mathbf{S} \equiv T_{3\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\perp} + d\mathbf{t}^S + \varepsilon_t \mathbf{t}\mathbf{t}, \quad \mathbf{D}_{\perp} \equiv D_{\alpha\beta} \mathbf{e}_{\alpha} \mathbf{e}_{\beta}, \quad \mathbf{d} \equiv 2D_{3\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} \quad (2.1)$$

Тензоры \mathbf{T}_{\perp} и \mathbf{D}_{\perp} описывают напряженно-деформированное состояние в плоскости сечения, \mathbf{S} и \mathbf{d} – векторы напряжения и деформации поперечного сдвига, σ_t и ε_t – напряжение и деформация растяжения. Заметим, что в прикладных расчетах напряжения \mathbf{T}_{\perp} обычно отбрасываются как второстепенные. Но для стержней со структурной неоднородностью это недопустимо, все компоненты \mathbf{T} могут быть одного порядка. Наличие же анизотропии требует расчета даже малых компонент \mathbf{T} , если они действуют на площадках со слабым сцеплением.

Подставив \mathbf{T} из (2.1) в уравнение баланса сил (1.1) и используя (1.2), придем к системе

$$\nabla_{\perp} \cdot (\nu \mathbf{T}_{\perp}) + \dot{\mathbf{S}} - k_t (L\mathbf{S} + \mathbf{S} \times \mathbf{t}) - \sigma_t \mathbf{t} \times \mathbf{k}_{\perp} + \nu \mathbf{f}_{\perp} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla_{\perp} \cdot (\nu \mathbf{S}) + \dot{\sigma}_t - k_t L\sigma_t + \mathbf{t} \cdot \mathbf{k}_{\perp} \times \mathbf{S} + \nu f_t = 0$$

Введено дифференцирование в подвижном базисе: для скаляра $\dot{\sigma}_t \equiv \partial_s \sigma_t$, для вектора $\dot{\mathbf{S}} \equiv \dot{S}_i \mathbf{e}_i = \partial_s \mathbf{S} - \mathbf{k} \times \mathbf{S}$ и т.д.

Граничное условие $\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = 0$ на свободной боковой поверхности можно представить в виде

$$\mathbf{n} \cdot (\nu \mathbf{T}_{\perp})|_{\partial F} = k_t \mathbf{x} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} \mathbf{S}, \quad \mathbf{n} \cdot (\nu \mathbf{S})|_{\partial F} = k_t \mathbf{x} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} \sigma_t \quad (2.3)$$

где \mathbf{n} – орт нормали к контуру ∂F сечения в его плоскости. Для вывода соотношений (2.3) достаточно задаться уравнением боковой поверхности $\varphi(x_\alpha) = 0$ и вычислить $\mathbf{N} = \nabla\varphi/|\nabla\varphi|$ с представлением (1.2) для ∇ .

Постановка задачи в напряжениях содержит также уравнение совместности деформаций (1.1). Используя представления (1.2) и (2.1), получим

$$\begin{aligned}\Delta_\perp \varepsilon_\perp &= \nabla_\perp \cdot \nabla_\perp \cdot \mathbf{D}_\perp + \dots, \quad (\varepsilon_\perp \equiv \text{tr } \mathbf{D}_\perp) \\ \Delta_\perp \mathbf{d} &= \nabla_\perp \nabla_\perp \cdot \mathbf{d} + \dots, \quad \nabla_\perp \nabla_\perp \varepsilon_r = \mathbf{E}_\perp \Delta_\perp \varepsilon_r + \dots \quad (\mathbf{E}_\perp \equiv \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha)\end{aligned}\quad (2.4)$$

Выписаны лишь главные при $\lambda \rightarrow 0$ члены.

Закон Гука для рассматриваемого ортотропного материала имеет вид

$$\mathbf{D}_\perp = {}^4\mathbf{A}_\perp \cdot \mathbf{T}_\perp + \mathbf{A}_1 \sigma_r, \quad \mathbf{d} = \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{S}, \quad \varepsilon_r = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{T}_\perp + \frac{1}{E_r} \sigma_r \quad (2.5)$$

(${}^4\mathbf{A}_\perp, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ – тензоры в плоскости сечения, четвертого и второго ранга соответственно).

Условия на торцах $s = \text{const}$ в общем случае требуют применения метода сращиваемых асимптотических разложений [9].

Решение задачи (2.2)–(2.5) будем искать в виде разложения по целым степеням λ

$$\mathbf{T} = \lambda^m (\mathbf{T}^{(0)} + \lambda \mathbf{T}^{(1)} + \dots)$$

Значения $m = 0$ и $m = -1$ приводят к противоречиям. Остается лишь вариант $m = -2$. Для главного члена $\mathbf{T}^{(0)}$ при этом будем иметь

$$\nabla_\perp \cdot \mathbf{T}_\perp^{(0)} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_\perp^{(0)}|_{\partial F} = 0 \quad (2.6)$$

$$\Delta_\perp \varepsilon_\perp^{(0)} = \nabla_\perp \cdot \nabla_\perp \cdot \mathbf{D}_\perp^{(0)}, \quad \nabla_\perp \nabla_\perp \varepsilon_r^{(0)} = 0$$

$$\nabla_\perp \cdot \mathbf{S}^{(0)} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}^{(0)}|_{\partial F} = 0, \quad \Delta_\perp \mathbf{d}^{(0)} = \nabla_\perp \nabla_\perp \cdot \mathbf{d}^{(0)} \quad (2.7)$$

Решение задачи (2.6) начнем с последнего уравнения:

$$\varepsilon_r^{(0)} = A(s) + \mathbf{B}(s) \cdot \mathbf{x} \quad (2.8)$$

Даже в неоднородном и анизотропном теле деформация ε_r линейно распределена по сечению (при $\lambda \rightarrow 0$). Из (2.5) тогда следует

$$\mathbf{D}_\perp = ({}^4\mathbf{A}_\perp - E_r \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1) \cdot \mathbf{T}_\perp + E_r \mathbf{A}_1 (A + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}) \quad (2.9)$$

Но так же выглядит закон Гука в плоской задаче с начальными деформациями. Уравнения и граничные условия (2.6) полностью определяют решение вида

$$\mathbf{T}_\perp^{(0)} = A \mathbf{T}_A + \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_\alpha \mathbf{T}_{B\alpha} \quad (2.10)$$

Здесь \mathbf{T}_A и $\mathbf{T}_{B\alpha}$ – решения трех задач в плоскости сечения с начальными деформациями $\mathbf{D}_\perp^0 = E_r \mathbf{A}_1$ и $E_r \mathbf{A}_1 x_\alpha$ соответственно. В случае неоднородного материала эти деформации несовместны, поэтому $\mathbf{T}_\perp^{(0)} \neq 0$.

Кроме этих плоских задач, необходимо решить задачу (2.7) для вектора касательного напряжения $\mathbf{S}^{(0)}$. Полагая $\nabla_\perp \times \mathbf{d}^{(0)} \cdot \mathbf{t} = 2C$, из последнего равенства (2.7) получим $C = C(s)$. Тогда из (2.7) с учетом (2.5) придем к следующему соотношению (сечение считается односвязным):

$$\mathbf{S}^{(0)} = C \nabla_\perp g \times \mathbf{t} \quad (2.11)$$

$$g : \nabla_\perp \cdot [-(\mathbf{t} \times \mathbf{A}_2 \times \mathbf{t}) \cdot \nabla_\perp g] = -2, \quad g|_{\partial F} = 0 \quad (2.12)$$

Последняя компонента $\mathbf{T}^{(0)}$:

$$\begin{aligned}\sigma_t^{(0)} &= A\sigma_A + B_\alpha\sigma_\alpha \quad (B_\alpha \equiv \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_\alpha) \\ \sigma_A &\equiv E_t(1 - \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{T}_A), \quad \sigma_\alpha \equiv E_t(x_\alpha - \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{T}_{B\alpha})\end{aligned}\quad (2.13)$$

Итак, двумерные задачи сформулированы полностью (для \mathbf{T}_A , $\mathbf{T}_{B\alpha}$ и g). Необходимо далее определить функции дуговой координаты A , \mathbf{B} и C , для чего следует выделить одномерную задачу. Она возникает из соответствующих условий разрешимости. Двумерные задачи

$$\begin{aligned}\nabla_\perp \cdot \mathbf{T}_\perp + \mathbf{f}_\perp &= 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_\perp |_{\partial F} = \mathbf{p}_\perp \\ \nabla_\perp \cdot \mathbf{S} + f &= 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} |_{\partial F} = p\end{aligned}\quad (2.14)$$

разрешимы лишь при условиях (всюду далее в этом и двух следующих разделах интегрирование ведется по объему F и поверхности ∂F)

$$\begin{aligned}\int \mathbf{f}_\perp dF + \oint \mathbf{p}_\perp dl &= 0 \\ \int \mathbf{x} \times \mathbf{f}_\perp \cdot \mathbf{t} dF + \oint \mathbf{x} \times \mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{t} dl &= 0 \\ \int f dF + \oint p dl = 0, \quad \int (f\mathbf{x} - \mathbf{S}) dF + \oint p\mathbf{x} dl &= 0\end{aligned}\quad (2.15)$$

(последнее – вспомогательное тождество). Соотношения (2.2) и (2.3) имеют вид (2.14); равенства (2.15) для них сводятся к следующим известным уравнениям баланса сил и моментов для стержня:

$$\mathbf{Q}' + \mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{M}' + \lambda^{-1} \mathbf{t} \times \mathbf{Q} + \mathbf{m} = 0 \quad (2.16)$$

$$\mathbf{Q} \equiv \int (\mathbf{S} + \sigma_t \mathbf{t}) dF, \quad \mathbf{M} \equiv \int \mathbf{x} \times (\mathbf{S} + \sigma_t \mathbf{t}) dF \quad (2.17)$$

$$\mathbf{q} \equiv \int \mathbf{f} \nu dF, \quad \mathbf{m} \equiv \int \mathbf{x} \times \mathbf{f} \nu dF$$

Векторы \mathbf{Q} и \mathbf{M} , как и \mathbf{T} , представляются рядами по степеням λ . Для главных членов из (2.16), (2.17) следует $\mathbf{Q}^{(0)'} = 0$, $\mathbf{t} \times \mathbf{Q}^{(0)} = 0 \Rightarrow \mathbf{Q}^{(0)} = 0$ для непрямого стержня. Но тогда можно исключить $A(s)$:

$$\begin{aligned}0 = Q_t^{(0)} &= \int \sigma_t^{(0)} dF \Rightarrow \\ A &= -B_\alpha \int \sigma_\alpha dF / \int \sigma_A dF\end{aligned}\quad (2.18)$$

3. Поле перемещений. Соотношения упругости. Для определения $\mathbf{u}(\mathbf{R})$ интегрируем уравнение $\nabla \mathbf{u}^S = \mathbf{D} =^4 \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_\perp &= (\nabla_\perp \mathbf{u}_\perp)^S, \quad \varepsilon_t = \nu^{-1} [\dot{u}_t - k_t L u_t + \mathbf{k}_\perp \times \mathbf{u}_\perp \cdot \mathbf{t}] \\ \mathbf{d} &= \nabla_\perp u_t + \nu^{-1} [\dot{\mathbf{u}}_\perp - k_t L \mathbf{u}_\perp + k_t \mathbf{t} \times \mathbf{u}_\perp + \mathbf{k}_\perp \times u_t \mathbf{t}] \\ (\mathbf{u} &= \mathbf{u}_\perp + u_t \mathbf{t})\end{aligned}\quad (3.1)$$

Разложение \mathbf{u} должно содержать λ^{-2} – таковы напряжения. Но без противоречий возможно лишь разложение вида

$$\mathbf{u} = \lambda^{-4} (\mathbf{u}^{(0)} + \lambda \mathbf{u}^{(1)} + \dots)$$

На первом шаге получим

$$\mathbf{u}_\perp^{(0)} = \mathbf{U}_\perp^{(0)}(s) + \vartheta_t^{(0)}(s) \mathbf{t} \times \mathbf{x}, \quad u_t^{(0)} = U_t^{(0)}(s)$$

На втором шаге

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\perp}^{(1)} &= \mathbf{U}_{\perp}^{(1)}(s) + \vartheta_t^{(1)}(s) \mathbf{t} \times \mathbf{x}, \quad \dot{U}_t^{(0)} + \mathbf{k}_{\perp} \times \mathbf{U}_{\perp}^{(0)} \cdot \mathbf{t} = 0 \\ \vartheta_t^{(0)} &= 0, \quad \dot{U}_{\perp}^{(0)} + k_t \mathbf{t} \times \mathbf{U}_{\perp}^{(0)} + \mathbf{k}_{\perp} \times \mathbf{U}_t^{(0)} \mathbf{t} \equiv \vartheta_{\perp}^{(1)}(s) \times \mathbf{t} \end{aligned}$$

Три последних равенства означают лишь, что

$$\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{U}^{(0)}(s), \quad \mathbf{U}^{(0)'} = \vartheta^{(1)} \times \mathbf{t} \quad (3.2)$$

Это полностью согласуется с классической теорией стержней Кирхгофа в ее линейном варианте.

Напряжения появляются лишь на третьем шаге. Опустим простые выкладки и приведем окончательный результат – соотношения упругости одномерной задачи

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\perp}^{(0)} &= \mathbf{a}_{\perp} \cdot \vartheta^{(1)'} \\ \mathbf{a}_{\perp} &\equiv -\mathbf{t} \times \int \mathbf{x} \left(\sigma_{\alpha} - \sigma_A \frac{\int \sigma_{\alpha} dF}{\int \sigma_A dF} \right) dF \mathbf{e}_{\alpha} \times \mathbf{t} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$M_t^{(0)} = a_t \vartheta^{(1)'} \cdot \mathbf{t}, \quad a_t \equiv 2 \int g dF$$

Тензор второго ранга \mathbf{a}_{\perp} представляет собой жесткость на изгиб, скаляр a_t – на кручение.

Результатом третьего шага является и равенство

$$\vartheta^{(1)'} = \mathbf{B} \times \mathbf{t} + C \mathbf{t} \quad (3.4)$$

связывающее одномерную задачу с двумерными. Найдя $\mathbf{B}(s)$ и $C(s)$ из одномерной задачи, можно определить трехмерное поле напряжений по формулам разд. 2. Это будет повторное обращение к двумерным решениям в сечении – сначала они нужны для расчета жесткостей \mathbf{a}_{\perp} , a_t .

4. Температурные деформации. Описанный алгоритм расщепления пространственной задачи переносится без проблем на случай температурных деформаций. Соотношения (2.5) заменяются следующими:

$$\mathbf{D}_{\perp} = {}^4 \mathbf{A}_{\perp} \cdot \mathbf{T}_{\perp} + \mathbf{A}_1 \sigma_t + \alpha_{\perp} \Theta, \quad \mathbf{d} = \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{S} \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_t = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{T}_{\perp} + \frac{1}{E_t} \sigma_t + \alpha_t \Theta$$

где $\alpha_{\perp} + \alpha_t \mathbf{t} \mathbf{t}$ – тензор коэффициентов теплового расширения, Θ – изменение температуры:

В разложении тензора напряжений не понадобятся отрицательные степени: $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{(0)} + \lambda \mathbf{T}^{(1)} + \dots$ (если $\mathbf{f} = 0$). Поскольку вместо (2.9) теперь будем иметь

$$\mathbf{D}_{\perp} = ({}^4 \mathbf{A}_{\perp} - E_t \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1) \cdot \mathbf{T}_{\perp} + E_t \mathbf{A}_1 (\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}) + \{(\alpha_{\perp} - E_t \alpha_t \mathbf{A}_1) \Theta\} \quad (4.2)$$

то к трем задачам для \mathbf{T}_A и $\mathbf{T}_{B\alpha}$ добавится четвертая – для \mathbf{T}_{Θ} с начальной деформацией в виде слагаемого, заключенного в фигурные скобки.

В одномерной задаче изменится лишь выражение изгибающего момента:

$$\mathbf{M}_{\perp}^{(0)} = \mathbf{a}_{\perp} \cdot \vartheta^{(1)'} + \mathbf{M}_{\Theta} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{M}_{\Theta} \equiv \int \mathbf{x} \left(\sigma_{\Theta} - \sigma_A \frac{\int \sigma_{\Theta} dF}{\int \sigma_A dF} \right) dF \times \mathbf{t}$$

$$\sigma_{\Theta} \equiv -E_t (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{T}_{\Theta} + \alpha_t \Theta)$$

5. Решение одномерной задачи. При произвольной геометрии и жесткости a_{\perp} стержня эффективное одномерное решение может быть построено лишь численно (для двумерных задач необходимость обращения к ЭВМ очевидна). Но расщепление привело к одномерной модели с нерастяжимой осью, при этом возникают вычислительные трудности, если стержень "недостаточно искривлен". Поэтому будем использовать следующую одномерную модель с растяжением:

$$\mathbf{Q}' + \mathbf{q} = 0, \mathbf{M}' + \mathbf{t} \times \mathbf{Q} + \mathbf{m} = 0, \mathbf{u}' - \mathfrak{D} \times \mathbf{t} = \gamma \mathbf{t} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{a} \cdot \mathfrak{D}' + \mathbf{M}_0, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{t} = b\gamma, \mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_{\perp} + a_{\parallel} \mathbf{t}\mathbf{t}$$

где $b > 0$ – жесткость на растяжение (это регуляризирующий параметр, его точное определение не так важно, как определение \mathbf{a}).

Уравнения (5.1) при заданных на концах \mathbf{u} и \mathfrak{D} допускают вариационную постановку: минимизируется функционал Лагранжа

$$J(\mathbf{u}, \mathfrak{D}) = \int_0^l \left[\frac{1}{2} (\mathfrak{D}' \cdot \mathbf{a} \cdot \mathfrak{D}' + b\gamma^2) + \mathbf{M}_0 \cdot \mathfrak{D}' - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{m} \cdot \mathfrak{D} \right] ds \quad (5.2)$$

при дополнительной связи $\mathfrak{D}_{\perp} = \mathbf{t} \times \mathbf{u}'$. Аппроксимируя решение линейной комбинацией с конечным числом варьируемых коэффициентов, построим вычислительный алгоритм типа метода конечных элементов. Наиболее эффективным представляется вариант с аппроксимацией в виде точного решения уравнений (5.1) при заданных на концах промежутка (конечного элемента) значениях \mathbf{u} и \mathfrak{D} и отсутствии распределенных воздействий \mathbf{q} , \mathbf{m} и \mathbf{M}_0 . Если воздействие сосредоточено в узлах (концах элементов), получим точное решение задачи в целом.

Найдем матрицу жесткости конечного элемента. Имеем:

$$\mathbf{Q} = \text{const}, \mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{Q} = \mathbf{M}_0 = \text{const} \quad (5.3)$$

$$\mathfrak{D}|_0^l \equiv \mathbf{h} = \mathbf{S}_{hM}(l) \cdot \mathbf{M}_0 + \mathbf{S}_{hQ}(l) \cdot \mathbf{Q} \quad (5.4)$$

$$(\mathbf{u} - \mathfrak{D} \times \mathbf{r})|_0^l \equiv \mathbf{v} = \mathbf{S}_{hQ}^T(l) \cdot \mathbf{M}_0 + \mathbf{S}_{vQ}(l) \cdot \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{S}_{hM}(x) \equiv \int_0^x \mathbf{a}_{\perp} ds, \quad \mathbf{S}_{hQ}(x) \equiv -\int_0^x \mathbf{a}^{-1} \times \mathbf{r} ds \quad (5.5)$$

$$\mathbf{S}_{vQ}(x) \equiv \int_0^x [b^{-1} \mathbf{t}\mathbf{t} - \mathbf{r} \times \mathbf{a}^{-1} \times \mathbf{r}] ds$$

Обращая (5.4), получим:

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{C}_{Mh} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{C}_{Mv} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{C}_{Mv}^T \cdot \mathbf{h} + \mathbf{C}_{Qv} \cdot \mathbf{v} \quad (5.6)$$

$$\mathbf{C}_{Qv} \equiv (\mathbf{S}_{vQ}(l) - \mathbf{S}_{hQ}^T(l) \cdot \mathbf{S}_{hM}^{-1}(l) \cdot \mathbf{S}_{hQ}(l))^{-1}$$

$$\mathbf{C}_{Mv} \equiv -\mathbf{S}_{hM}^{-1}(l) \cdot \mathbf{S}_{hQ}(l) \cdot \mathbf{C}_{Qv}$$

$$\mathbf{C}_{Mh} \equiv \mathbf{S}_{hM}^{-1}(l) \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{S}_{hQ}(l) \cdot \mathbf{C}_{Mv}^T)$$

Подставляя в выражение для энергии стержня

$$J = \frac{1}{2} \int_0^l [\mathbf{M} \cdot \mathfrak{D}' + \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{u}' - \mathfrak{D} \times \mathbf{t})] ds = \mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{h} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}$$

M_0 и Q из (5.6), получим J в виде квадратичной формы от h и u . Коэффициенты матрицы жесткости элемента можно найти, перейдя к узловым переменным $u(0)$, $\vartheta(0)$, $u(l)$, $\vartheta(l)$.

Вклад распределенных нагрузок в правую часть системы уравнений метода конечных элементов определяется линейными слагаемыми в функционале Лагранжа (5.2). Аппроксимации $u(s)$, $\vartheta(s)$, $\vartheta'(s)$ вычисляются по формулам

$$u = u(0) + \vartheta(0) \times (r - r(0)) + (S_{hQ}^T - r \times S_{hM}) \cdot$$

$$\cdot M_0 + (S_{vQ} - r \times S_{hQ}) \cdot Q$$

$$\vartheta = \vartheta(0) + S_{hM} \cdot M_0 + S_{hQ} \cdot Q$$

$$\vartheta' = a^{-1} \cdot (M_0 - t \times Q)$$

Векторы M_0 и Q выражаются через узловые перемещения и повороты согласно (5.6).

6. Пример: охлажденный соленоид. Представленный выше алгоритм решения пространственной задачи позволил рассчитать напряженное состояние тонкой замкнутой магнитной катушки термоядерного реактора. Этот соленоид охлажден до сверхпроводящего состояния. Ось катушки – плоская кривая D-образной формы, а сечение напоминает трапецию (фиг. 1). Катушка состоит из обмотки, помещенной внутрь стального бандажа и отделенной от него тонким слоем изоляции. Материал обмотки – композит периодической структуры (его свойства рассчитаны методом осреднения [10]).

Сначала рассмотрим одномерную стержневую задачу (5.1) для стержня с замкнутой осью. Имеем $q = 0$, $m = 0$, так что $Q = \text{const}$, $M + r \times Q = M_0 = \text{const}$. Проинтегрировав соотношения упругости, получим выражения векторов перемещения и поворота. Если в неохлажденном стержне перемещения, повороты, силы и моменты отсутствуют, то из этих выражений следуют условия замкнутости оси:

$$\oint a^{-1} \cdot [M_0 - M_\Theta - r \times Q] ds = 0 \quad (6.1)$$

$$\oint \{ r \times a^{-1} \cdot [M_0 - M_\Theta - r \times Q] + b^{-1} Q \cdot tt \} ds = 0$$

В рассматриваемом частном случае ось стержня – плоская кривая, стержень не закручен, упругие свойства стержня и температурное поле не зависят от дуговой координаты s . Тензор a^{-1} и температурный момент M_Θ могут быть представлены следующим образом (см. (3.3), (4.3)):

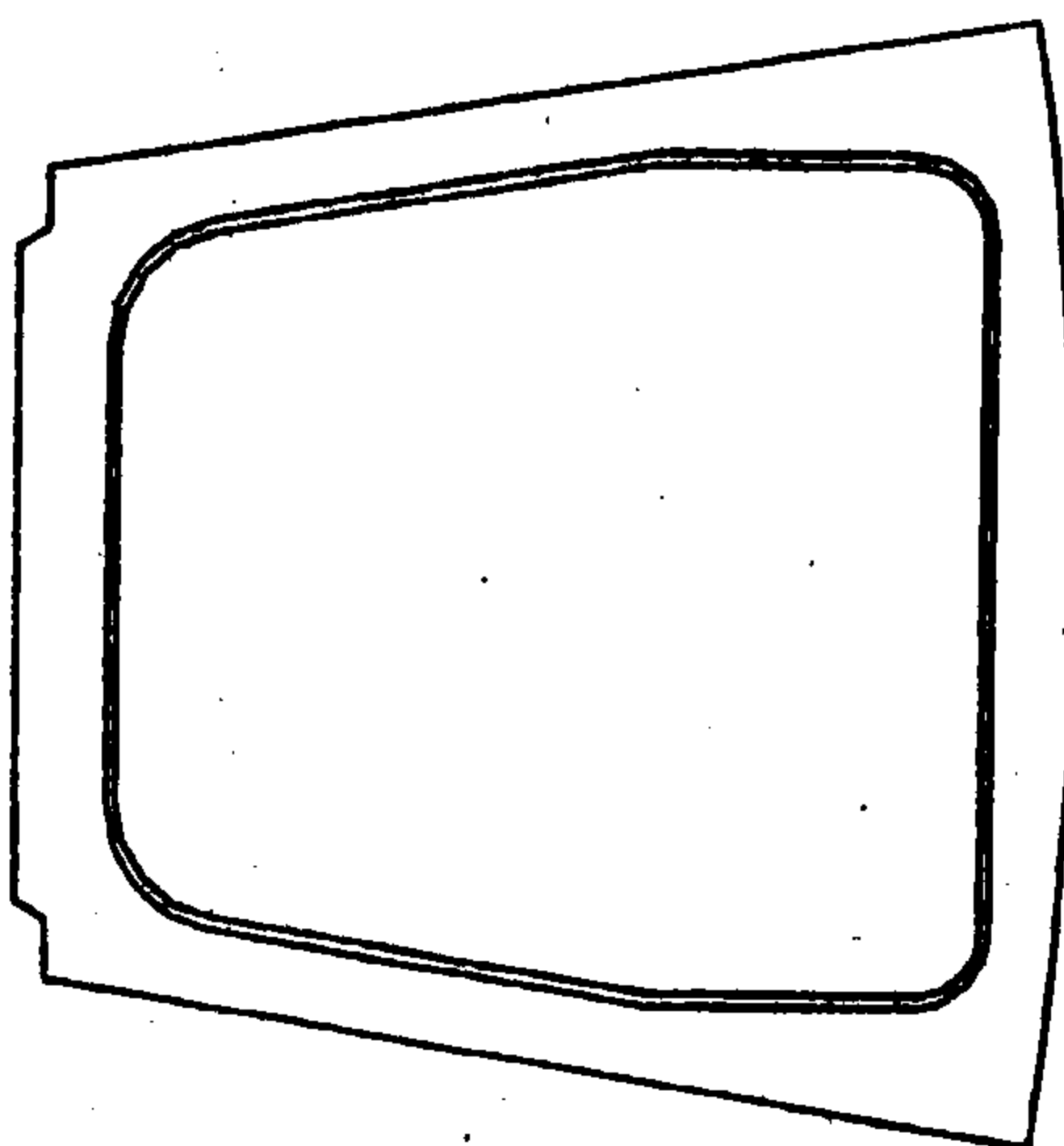
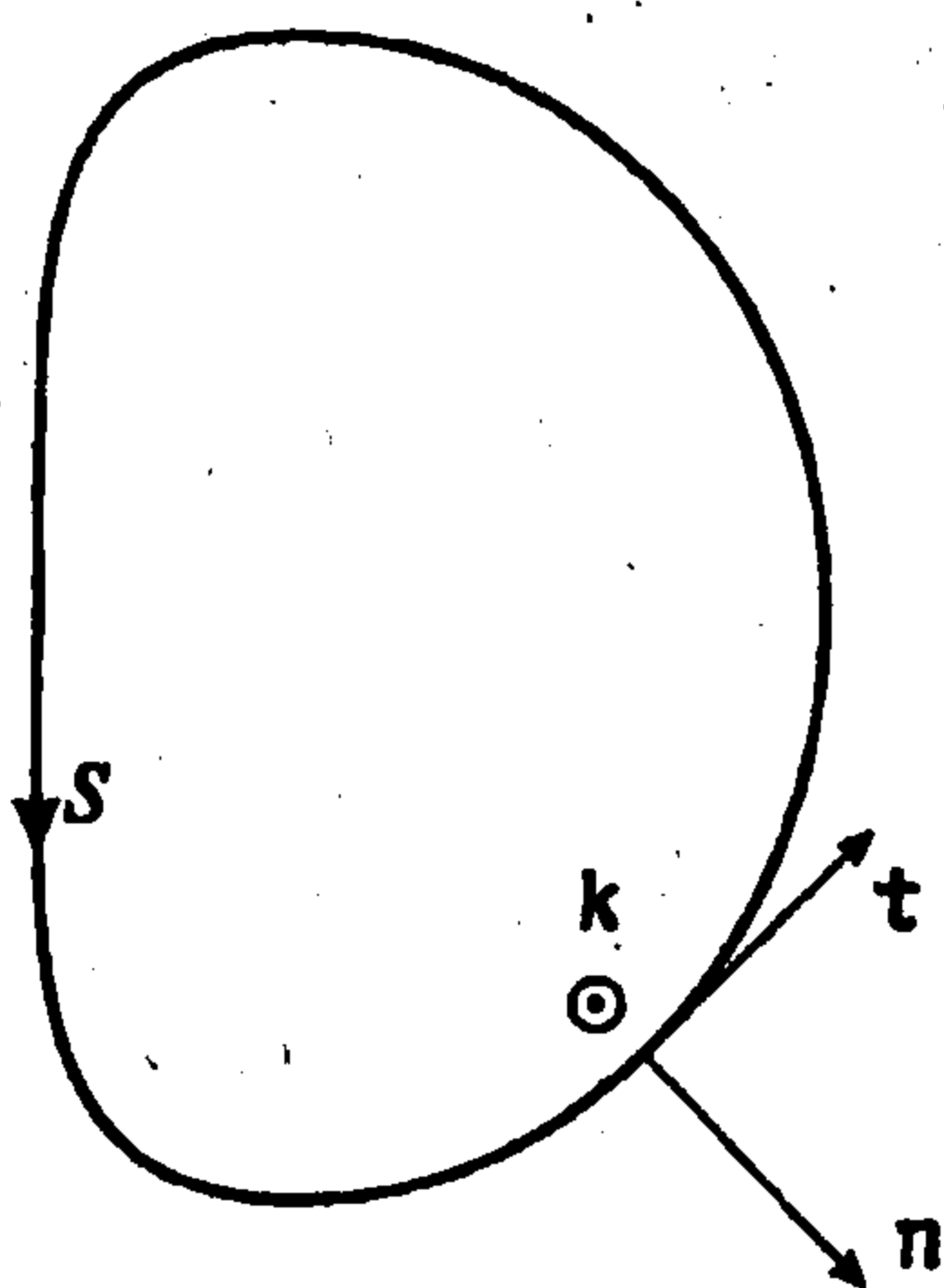
$$a^{-1} = A_1 nn + A_2 kk + A_{12}(kn + nk) + A_t tt$$

$$M_\Theta = M_1 n + M_2 k$$

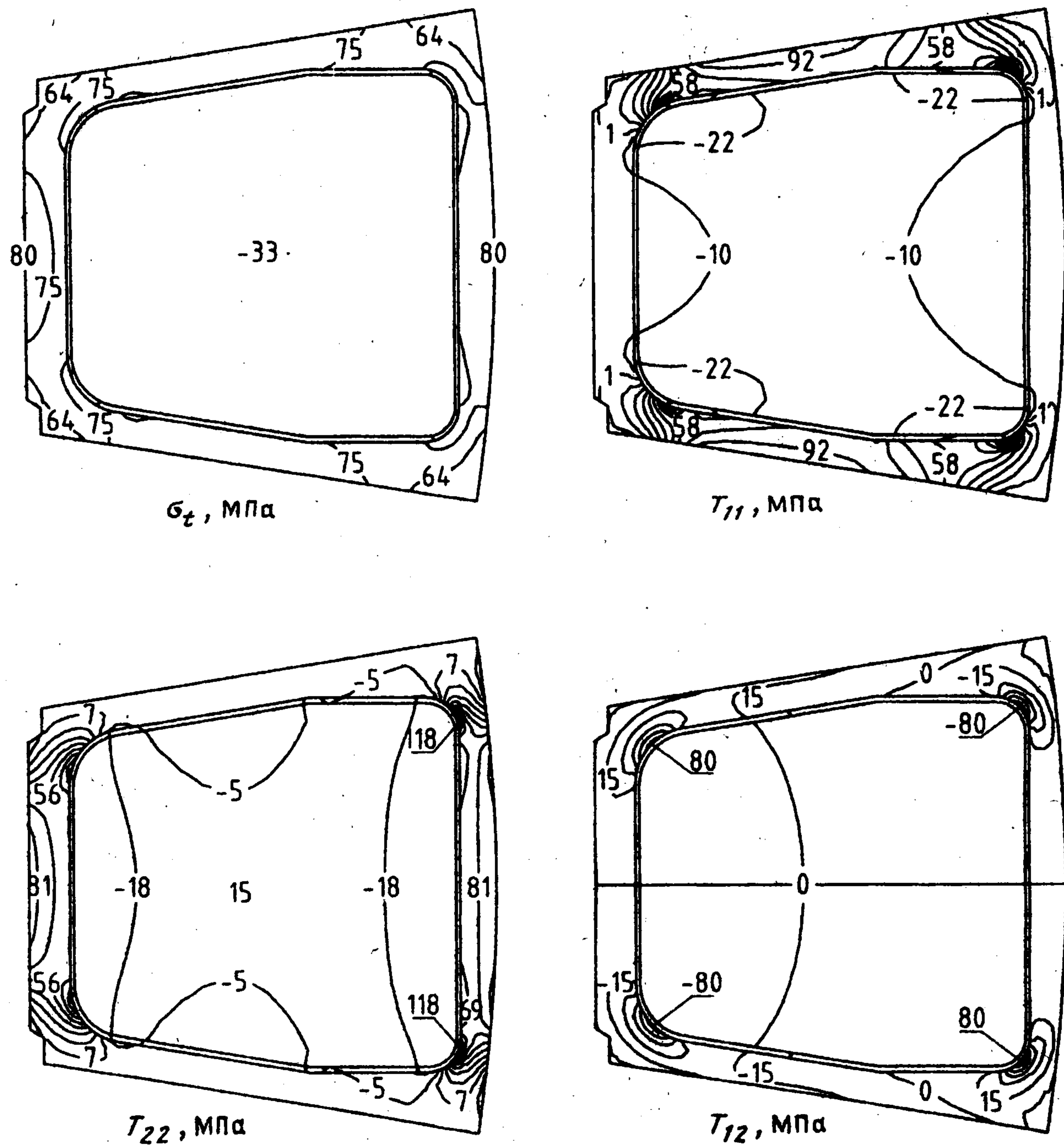
Здесь $A_1, A_2, A_{12}, A_t, M_1, M_2$ – постоянные, $n = e_1$ – орт главной нормали к оси, $k = e_2 \equiv n \times t$ – орт нормали к плоскости оси. В такой задаче условиям замкнутости (6.1) удовлетворяют следующие значения силы Q и момента M :

$$Q = 0, \quad M = \left(M_2 + \frac{A_{12}}{A_2} M_1 \right) k$$

Жесткости стержня для одномерной модели находятся из решения задач на сечении. Решения этих же задач позволяют восстановить тензор напряжений во всем объеме стержня по значению момента M .



Фиг. 1



Фиг. 2

Было рассмотрено сечение, состоящее из трех ортотропных материалов при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_r = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ для материала кожуха, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_r = 9,3 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ для материалов изоляции и обмотки; остальные свойства материалов приведены в таблице. Размеры сечения порядка одного метра. Необходимые задачи на сечении решены методом конечных элементов (использовались восьмиузловые квадратичные изопараметрические элементы). Найдены жесткости a (формулы (3.3)), $b \equiv \int_F E_r dF$, значение температурного момента M_Θ (4.3), решена одномерная задача, вычислены постоянные B (3.4), A (2.18).

В результате получено поле тензора напряжений на сечении (фиг. 2). Следует обратить внимание на то, что при охлаждении катушки все четыре отличные от нуля компоненты имеют один порядок, что не характерно для традиционных стержневых моделей.

№	E_1 10^9 Па	E_2 10^9 Па	E_r 10^9 Па	G_{12} 10^9 Па	G_{23} 10^9 Па	G_{31} 10^9 Па	ν_{12}	ν_{23}	ν_{31}
1	208	208	208	83,9	83,9	83,9	0,24	0,24	0,24
2	20,0	20,0	12,0	6,00	7,52	8,50	0,33	0,33	0,17
3	86,1	81,7	124	23,3	34,0	37,1	0,20	0,17	0,26

ЛИТЕРАТУРА

1. *Елисеев В.В.* Одномерные и трехмерные модели упругих стержней // Тр. СПбГТУ. 1993. № 446. С. 29–52.
2. *Елисеев В.В.* Механика упругих стержней. СПбГТУ, 1994. 84 с.
3. *Понятовский В.В.* Применение асимптотического метода интегрирования к задаче равновесия тонкого бруса, произвольно нагруженного по боковой поверхности // Инж. журн. МГТ. 1968. № 5. С. 139–143.
4. *Галактионов Е.В., Тропп Э.А.* Асимптотический метод расчета термоупругих напряжений в тонком стержне // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1976. Т. 40. № 7. С. 1399–1406.
5. *Бердичевский В.Л., Старосельский Л.А.* К теории криволинейных стержней типа Тимошенко // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 6. С. 1015–1024.
6. *Бутузов В.Ф., Уразгильдина Т.А.* Асимптотическое решение квазистатической задачи термоупругости для тонкого стержня // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 989–999.
7. *Илюхин А.А.* О построении соотношений теории упругих стержней // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1990. № 22. С. 81–92.
8. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
9. *Найфэ А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
10. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
11.III.1998