УДК 539.3

© 1999 г. И.И. Ворович, Л.П. Лебедев

К ЗАДАЧЕ РАВНОВЕСИЯ ПЛАСТИНЫ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

Рассматривается задача равновесия нелинейной пластины, подкрепленной ребрами жесткости. Вводится понятие обобщенного решения задачи как критической точки функционала энергии упругой системы и доказывается существование обобщенного решения задачи. Обосновывается сходимость метода Ритца в рамках данной задачи, а также конформных вариантов метода конечных элементов, строящихся на базе метода Ритца.

Близкие вопросы обсуждались в [1–3].

Рассматривается постановка задачи равновесия нагруженной пластины, подкрепленной ребрами жесткости. Пластина описывается следующими нелинейными определяющими соотношениями:

$$\begin{aligned}
&N_{11}=\frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_{11}+\mu\varepsilon_{22}),\quad N_{22}=\frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_{22}+\mu\varepsilon_{11}),\quad N_{12}=\frac{Eh}{1+\mu}\varepsilon_{12}\\
&M_{11}=D(\varkappa_{11}+\mu\varkappa_{22}),\quad M_{22}=D(\varkappa_{22}+\mu\varkappa_{11}),\quad M_{12}=D(1-\mu)\varkappa_{12}\\
&\varepsilon_{11}=u_{1x}+\frac{1}{2}u_{3x}^2,\quad \varepsilon_{22}=u_{2y}+\frac{1}{2}u_{3y}^2,\quad \varepsilon_{12}=u_{1y}+u_{2x}+u_{3x}u_{3y}\\
&\varkappa_{11}=-u_{3xx},\quad \varkappa_{22}=-u_{3yy},\quad \varkappa_{12}=-u_{3xy}
\end{aligned}\tag{1}$$

где E, μ, D – упругие постоянные, а индексы x и y означают дифференцирование по соответствующей переменной. Уравнения равновесия пластины имеют вид

$$D\nabla^4 u_3 - N_{11}u_{3xx} - N_{22}u_{3yy} - 2N_{12}u_{3xy} - F_3 = 0$$

$$\nabla^2 u_1 + \frac{1+\mu}{1-\mu}(u_{1y}+u_{2x})_x + \frac{2}{1-\mu}(u_{3x}u_{3xx}+\mu u_{3y}u_{3xy}) + u_{3y}u_{3xy} + u_{3x}u_{3yy} + F_1 = 0$$

$$\nabla^2 u_2 + \frac{1+\mu}{1-\mu}(u_{1y}+u_{2x})_y + \frac{2}{1-\mu}(u_{3y}u_{3yy}+\mu u_{3x}u_{3xy}) + u_{3x}u_{3xy} + u_{3y}u_{3xx} + F_2 = 0$$

где F_i – компоненты вектора внешней нагрузки.

Предполагается, что замкнутая область Ω, занимаемая пластиной, ограниченна и имеет кусочно-гладкую границу (все углы в точках излома границы ненулевые). Пластина подкреплена конечным числом n прямолинейных ребер жесткости. Ребра описываются по классической теории стержней.

В зависимости от соотношения жесткости ребер и самой пластины можно рассматривать разные варианты уравнений, описывающих ребра жесткости. Если жесткость ребер сравнительно велика, то для описания ребер имеет смысл выбрать линейные уравнения. В случае не слишком жестких ребер следует взять нелинейные соотношения. Часто боковым изгибом ребер можно пренебречь, но здесь это не делается.

Рассматривается линейный стержневой вариант модели ребра жесткости. Для описания стержня выбирается прямоугольная система координат (s, ξ^1, ξ^2), причем координатные линии ξ^1, ξ^2 идут вдоль главных центральных осей сечения стержня, а s – естественный параметр длины нейтральной оси стержня.

Перемещение точки нейтральной оси стержня в проекциях на координатные линии (s, ξ^1, ξ^2) обозначается (u, w_1, w_2). Основные характеристики деформации ребра задаются следующим образом. Угол поворота поперечного сечения стержня вокруг оси ξ^i есть $\varphi_i = dw_i/ds$. Пусть φ – угол поворота поперечного сечения вокруг оси s, угол относительного закручивания сечения есть $\chi = d\varphi/ds$. Также вводятся осевая деформация $\varepsilon = du/ds$ и кривизны $\varkappa_i = -d\varphi_i/ds = -d^2w_i/ds^2$ $(i = 1, 2)$. Данные характеристики деформации связаны с продольной силой N, крутящим моментом M и изгибающими моментами M_{Γ}, M_2 соотношениями

$$T = B\varepsilon, \quad M = D_\chi\chi, \quad M_1 = D_1\varkappa_1, \quad M_2 = D_2\varkappa_2$$

где B, D_χ, D_1, D_2 – жесткостные коэффициенты стержня, выражаемые через физические константы материала и геометрические параметры стержня. Уравнения равновесия такого стержня хорошо известны и здесь не приводятся (см., например, [4]).

Для полной постановки задачи надо сформулировать условия совместности деформации пластины и ребер жесткости. Эти уравнения здесь не конкретизируются. Следует отметить, что набор величин (u, w_1, w_2, φ) для стержня выражается через вектор перемещений соответствующей точки пластины (u_1, u_2, u_3) и его производные линейными соотношениями (см. [4])

$$u = u(u_1, u_2, u_3), \quad w_1 = w_1(u_1, u_2, u_3), \quad w_2 = w_2(u_1, u_2, u_3)$$
$$\varphi = \varphi(u_1, u_2, u_3) \tag{2}$$

В дальнейшем все деформационные характеристики ребра жесткости считаются выраженными через соответствующие компоненты вектора перемещений пластины соотношениями (2).

Каждое из n ребер жесткости, обозначаемых $R\nu$ $(\nu = 1, ..., n)$, может иметь различные физические характеристики. В обозначениях для параметров ν-го ребра индекс ν не ставится.

Для формулировки задачи равновесия необходимо задание краевых условий. Требуется, чтобы в нормальном к срединной плоскости направлении пластина была закреплена в трех точках (x_i, y_i), не лежащих на одной прямой:

$$u_3(x_i, y_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \tag{3}$$

Можно также предположить наличие части границы области Γ_1, где выполнено условие

$$u_3 |_{\Gamma_1} = 0 \tag{4}$$

и части Γ_2, где

$$\partial u_3 / \partial n |_{\Gamma_2} = 0 \tag{5}$$

Множество функций, принадлежащих $C^{(4)}(\Omega)$ и удовлетворяющих условиям (3)–(5), обозначается C_4.

Для тангенциальных перемещений $\mathrm{v} = (u_1, u_2)$ требуется выполнение таких краевых условий, чтобы было справедливо неравенство Корна для плоской теории упругости:

$$\int_\Omega (u_1^2 + u_2^2 + u_{1x}^2 + u_{1y}^2 + u_{2x}^2 + u_{2y}^2)dxdy \le m\int_\Omega \{u_{1x}^2 + (u_{1y} + u_{2x})^2 + u_{2x}^2\}dxdy$$

Одним из возможных вариантов, когда это неравенство выполнено с константой m, не зависящей от $\mathbf{v}$, может служить условие

$$u_1|_{\Gamma_3}=0, \quad u_2|_{\Gamma_3}=0 \tag{6}$$

где Γ_3 – некоторая часть граничного контура $\partial\Omega$ области.

Вводится множество C_2 вектор-функций $\mathbf{v}=(u_1, u_2)$, каждая компонента которых принадлежит пространству $C^{(2)}(\Omega)$, и таких, что выполнено условие (6).

Можно также предположить наличие жесткого закрепления других частей границы области (тогда соответствующие условия следует включить в определение множеств C_4 или C_2), упругого опирания (соответствующую энергию упругого опирания следует включить в функционал полной энергии), либо заданных внешних нагрузок. В последнем случае в функционал энергии включается интегральный член (интеграл вдоль границы области), равный работе внешних сил на границе. Эти условия в дифференциальной форме выписываться не будут, так как они хорошо известны и получаются стандартным путем из вариационной постановки задачи. Для определенности считаются выполненными условия (3)–(6).

Рассматривается пластина под действием нормальной нагрузки ($F_1 = F_2 = 0$). Как известно из общей теории, решение задачи о деформации пластины, подкрепленной ребрами жесткости, на множестве вектор-функций, удовлетворяющих геометрическим условиям закрепления края, получается как вектор-функция $\mathbf{u}$, удовлетворяющая условиям закрепления края пластины и минимизирующая функционал полной энергии, в котором все члены выражены в терминах вектора перемещений срединной плоскости пластины

$$I(\mathbf{u})=\|u_3\|_4^2+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(N_{11}\varepsilon_{11}+N_{22}\varepsilon_{22}+N_{12}\varepsilon_{12})dxdy+\Sigma-\int\limits_{\Omega}F_3u_3dxdy-\int\limits_{\partial\Omega}f_3u_3ds \tag{7}$$

$$\|u_3\|_4^2=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(M_{11}\varkappa_{11}+M_{22}\varkappa_{22}+M_{12}\varkappa_{12})d\Omega$$

$$\Sigma=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{2}\int\limits_{R_\nu}(T\varepsilon+M\chi+M_1\varkappa_1+M_2\varkappa_2)ds$$

где f_3 – нормальная нагрузка, заданная на границе пластины. Последние два интеграла в правой части первого равенства (7) описывают работу внешних сил на перемещении u_3. Выражения, стоящие под знаком суммы, описывают вклад в потенциальную энергию системы ν-го ребра жесткости. Функционал $I(\mathbf{u})$ отличается от соответствующего функционала энергии $I_1(\mathbf{u})$ для пластины без подкрепляющих элементов только на величину Σ. Следует отметить, что подынтегральное выражение в интегралах под знаком суммы есть положительно определенная квадратичная форма переменных $\varepsilon, \chi, \varkappa_1, \varkappa_2$ (при этом считается, что переменные перемещений точек стержня выражены через координаты вектора перемещений пластины посредством формул (2)).

Полные уравнения равновесия в перемещениях для пластины с подкрепляющими ребрами и естественные краевые условия получаются обычным для вариационной техники путем обработки уравнения $\delta I(\mathbf{u})=0$, где $\delta I(\mathbf{u})$ – первая вариация функционала $I(\mathbf{u})$.

При классической постановке данной задачи условия, формулируемые вдоль линий крепления ребер жесткости на плоскости Ω, становятся частью краевых условий. Они являются естественными краевыми условиями, описывающими совместную деформацию ребра и пластины. Любопытной особенностью этих "граничных" условий служит то, что наибольший порядок дифференцирования в граничных условиях равен четырем, что равно порядку высшей производной u_3. Это неклассическое сочетание порядков производных в уравнениях и граничных условиях, тем не менее, при исследовании обобщенной разрешимости задачи не влечет за собой неприятностей математического плана.

Для математической формулировки задачи вводится функциональное энергетическое пространство, в котором будет разыскиваться решение. Энергетическая норма в этом пространстве включает в себя все положительные квадратичные члены функционала полной энергии. Предварительно вводятся вспомогательные функциональные пространства. Пространство E_4 является замыканием функций $u(x, y) \in C_4$ в энергетической норме $\| \cdot \|_4$, которая ассоциирована со скалярным произведением

$$(u,v)_4 = \frac{1}{2}\int_\Omega [M_{11}(u)\varkappa_{11}(v) + M_{22}(u)\varkappa_{22}(v) + M_{12}(u)\varkappa_{12}(v)]d\Omega, \quad \| u \|_4 = (u,u)_4^{1/2}$$

Пространство E_2 является замыканием вектор-функций $\mathbf{v}(x, y) \in C_2$ в энергетической норме $\| \cdot \|_2$, индуцированной скалярным произведением

$$(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)_2 = \frac{1}{2}\int_\Omega [N_{e11}(\mathbf{v}_1)e_{11}(\mathbf{v}_2) + N_{e22}(\mathbf{v}_1)e_{22}(\mathbf{v}_2) + N_{e12}(\mathbf{v}_1)e_{12}(\mathbf{v}_2)]d\Omega$$

где

$$N_{e11} = \frac{Eh}{1-\mu^2}(e_{11} + \mu e_{22}), \quad N_{e22} = \frac{Eh}{1-\mu^2}(e_{22} + \mu e_{11}), \quad N_{e12} = \frac{Eh}{1+\mu}e_{12}$$

$$e_{11} = u_{1x}, \quad e_{22} = u_{2y}, \quad e_{12} = u_{1y} + u_{2x}$$

При переменных $M_{11}, ..., \varepsilon_{12}$ в скобках указываются аргументы u, v или $\mathbf{v}$, которые следует подставить в соотношения (1).

На множестве $C_2 \times C_4$ вводятся две нормы равенствами

$$\| \mathbf{u} \|_0^2 = \| \mathbf{v} \|_2^2 + \| u_3 \|_4^2, \quad \mathbf{v} = (u_1, u_2); \quad \| \mathbf{u} \|_1^2 = \| \mathbf{u} \|_0^2 + \Sigma$$

Соответствующие этим нормам скалярные произведения получаются стандартным для гильбертовых пространств способом. Замыкания множества $C_2 \times C_4$ в данных нормах являются гильбертовыми пространствами, они обозначаются соответственно E_0 и E_1.

Очевидно, что элементы пространства E_1 будут элементами пространства E_0. Известно [1, 2], что пространство E_0 является подпространством декартова произведения соболевских пространств $W = W_1^{(1)}(\Omega) \times W_1^{(1)}(\Omega) \times W_2^{(2)}(\Omega)$ [5], норма которого эквивалентна введенной выше норме $\| \cdot \|_0$. Далее используются соответствующие теоремы вложения Соболева [5] в пространстве W (а следовательно, и в E_0). Пространство E_1 имеет в каком-то смысле "более гладкие" элементы, чем пространство E_0, так как на отрезках прямых R_ν вектор-функции из E_1 имеют большую степень гладкости, чем это вытекает из теорем вложения в E_0. Следует отметить, что компонента $u_3(x, y)$ произвольного элемента из E_0 в силу теоремы вложения Соболева является непрерывной функцией, а потому условие закрепления (3) имеет смысл и в пространствах E_0 и E_1.

Определение. Обобщенным решением $\mathbf{u}$ задачи равновесия пластины называется стационарная точка функционала энергии $I(\mathbf{u})$ на пространстве E_1.

Итак, обобщенное решение удовлетворяет уравнению $\delta I(\mathbf{u}) = 0$. Как известно, данное уравнение положено в основу решения данной задачи методом Бубнова–Галеркина, а следовательно, и методом конечных элементов.

Для корректности обобщенной постановки задачи необходимо наложить ограничения на внешние нагрузки. Члены функционала $I(\mathbf{u})$, соответствующие работе внешних сил, должны иметь смысл для любых вектор-функций $\mathbf{u} \in E_1$. Класс таких нагрузок F_3, f_3 обозначается E^*. В силу теорем вложения достаточными условиями для принадлежности нагрузки классу E^* являются $F_3 \in L(\Omega), f_3 \in L(\partial\Omega)$.

Функционал энергии $I(\mathbf{u})$ имеет такую же структуру, как и функционал энергии для пластины:

$$I(\mathbf{u}) = \| \mathbf{u} \|_1^2 + \Psi(\mathbf{u})$$

где $\Psi(\mathbf{u})$ – слабо непрерывный функционал в пространстве E_1. Более того, функционал $\Psi(\mathbf{u})$ совпадает с соответствующим функционалом для пластины. Из общей теории (см. также [1, 2]) следует, что для доказательства обобщенной разрешимости задачи достаточно показать, что функционал $I(\mathbf{u})$ растущий, т.е. что $I(\mathbf{u}) \to \infty$, если $\|\mathbf{u}\|_1 \to \infty$.

Лемма. Пусть нагрузка принадлежит классу E^*. Тогда функционал $I(\mathbf{u})$ является растущим.

Доказательство проводится по той же схеме, что и для пластины. А именно показывается, что из неравенства $I(\mathbf{u}) \le m$ вытекает существование постоянной $M < \infty$, такой, что $\|\mathbf{u}\|_1 \le M$.

Итак, пусть $I(\mathbf{u}) \le m$. Так как неравенство

$$\left| \int\limits_{\Omega} F_3 u_3 dx dy + \int\limits_{\partial\Omega} f_3 u_3 ds \right| \le c \| u_3 \|_4$$

выполняется с некоторой постоянной c, не зависящей от u_3, то из неравенства $I(\mathbf{u}) \le m$ непосредственно следует, что $\|u_3\|_4 \le m_1$. Далее из неравенства $I(\mathbf{u}) \le m$ непосредственно вытекает, что $\Sigma \le m_2$, а затем, что и $\|\mathbf{v}\|_2 \le m_3$, $\mathbf{v} = (u_1, u_2)$, где m_i – некоторые постоянные.

Из общей теории, а также методики, изложенной ранее [1–3], из доказанной леммы непосредственно следует теорема.

Теорема. Пусть пластина находится под действием нормальной нагрузки класса E^*. В этом случае

1) существует по меньшей мере одно обобщенное решение задачи равновесия оболочки, принадлежащее пространству E_4, которое доставляет минимум функционалу энергии $I(\mathbf{u})$;

2) любая минимизирующая функционал $I(\mathbf{u})$ последовательность $\mathbf{u}_n$ содержит подпоследовательность, которая сильно сходится в пространстве E_4 к обобщенному решению задачи;

3) система уравнений приближенного решения задачи методом Ритца (а тем самым и методом Бубнова–Галеркина, и, следовательно, любым конформным вариантом метода конечного элемента) разрешима на каждом шаге и содержит подпоследовательность, сильно сходящуюся к обобщенному решению задачи в E_4; более того, любая слабо сходящаяся подпоследовательность приближений сходится сильно к некоторому обобщенному решению задачи.

Решение данной нелинейной задачи в общем случае неединственно.

Для исследования данной задачи можно применить топологический подход, использованный ранее [1–3] в теории пологих оболочек. В рамках такого подхода в условие задачи можно ввести нагрузки, действующие параллельно срединной плоскости пластины. При этом по ходу доказательств появляются дополнительные ограничения на способ закрепления края пластины в направлениях, параллельных срединной плоскости (более подробно см. [2]).

Наконец, можно отметить, что при решении задачи методом конечных элементов получается алгебраическая система уравнений, в которой уравнения, содержащие узлы на ребрах жесткости, имеют вид, отличный от вида уравнений для узлов вне ребер жесткости, однако структура самих уравнений при этом существенно не меняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И.И.* Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука, 1989. 373 с.
2. *Ворович И.И., Лебедев Л.П.* О методе конечных элементов в нелинейной теории оболочек // Русский журн. вычислит. механики. 1993. Т. 1. № 1. С. 1–21.
3. *Ворович И.И., Лебедев Л.П.* О разрешимости нелинейной задачи равновесия пологой оболочки // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 5. С. 814–820.
4. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справочник / Под ред. В.И. Мяченкова. М.: Машиностроение, 1989. 520 с.
5. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 334 с.

Поступила в редакцию 21.I.1998

Ростов-на-Дону