УДК 539.3

© 1999 г. Р.В. Гольдштейн, А.В. Марченко

О ВЫБОРЕ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

Исследуются реологические соотношения между внутренними напряжениями и деформационными параметрами морского ледяного покрова, принятые в упругопластической модели AIDJEX и нелинейно вязкой модели Хиблера. Показано, что следствиями используемого в этих моделях ассоциированного закона является структурная неустойчивость ледяного покрова по отношению к деформациям пластического сдвига. Предлагается использовать реологические уравнения, нарушающие ассоциированный закон, но хорошо согласующиеся с физическими свойствами гранулированных сред. Вводится в рассмотрение параметр поврежденности ледяного покрова и эмпирическое уравнение, описывающее изменение этого параметра. Исследуются энергетические соотношения.

1. Условия пластичности в моделях дрейфующих льдов. Наиболее известными и используемыми математическими моделями морских дрейфующих льдов являются модель, разработанная в ходе крупномасштабного эксперимента AIDJEX [1], и модель Хиблера [2]. В модели AIDJEX ледяной покров (ЛП) моделируется двумерной упругопластической средой, а в модели Хиблера – средой с нелинейно вязкой реологией. В обоих подходах предполагается, что допустимые внутренние напряжения в ЛП находятся внутри замкнутой кривой текучести, описываемой уравнением

$$F(\sigma_{\rm I},\sigma_{\rm II},p_*)=0;\quad \sigma_{\rm I}=(\sigma_1+\sigma_2)/2,\quad \sigma_{\rm II}=(\sigma_1-\sigma_2)/2 \tag{1.1}$$

где $\sigma_{1,2}$ – главные значения тензора внутренних напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$, p_* – параметр, характеризующий максимально возможное давление сжатия и функционально зависящий от тензора деформаций.

Полагается, что кривая (1.1) симметрична относительно оси $\sigma_{\rm I}$ и целиком находится в области $\sigma_{\rm I} < 0$. Последнее условие вытекает из предположения, что ЛП не сопротивляется деформациям растяжения.

Тензор скоростей деформаций связан с тензором напряжений ассоциированным законом

$$e_{\rm I}=\lambda\frac{\partial F}{\partial\sigma_{\rm I}},\quad e_{\rm II}=\lambda\frac{\partial F}{\partial\sigma_{\rm II}},\quad \lambda\geqslant 0;\quad e_{\rm I}=e_1+e_2,\quad e_{\rm II}=e_1-e_2 \tag{1.2}$$

где $e_{1,2}$ – главные значения тензора скоростей деформаций $e_{\alpha\beta}$.

Уравнения (1.2) выполняются, когда напряжения лежат на кривой (1.1) и $\lambda \geqslant 0$. Если напряжения $\sigma_{\rm I,II}$ лежат внутри кривой текучести, то в модели AIDJEX тензор напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ связывается с тензором деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}$ законом Гука, а в модели Хиблера $\sigma_{\alpha\beta}$ связан с тензором скоростей деформаций $e_{\alpha\beta}$ обобщенным законом Ньютона. Геометрический смысл соотношений (1.2) состоит в последнем случае в равенстве истинных напряжений проекциям вязких напряжений на кривую текучести в случае, когда напряжения $\sigma_{\rm I,II}$, вычисляемые по формулам обобщенного закона Ньютона, оказываются вне кривой текучести [3].

Ассоциированный закон в теории идеальной пластичности и теориях упрочняющихся материалов вытекает из постулата Друкера и условия неизменности упругих модулей среды при пластических деформациях [4, 5]. В этом случае работа напряжений на упругих деформациях по замкнутому контуру в пространстве напряжений всегда равна нулю.

Условия пластичности (1.1) устроены таким образом, что при увеличении параметра p_* кривая текучести "расширяется", т.е. происходит упрочнение. При уменьщении p_* кривая текучести сжимается, что соответствует размягчению. Обычно p_* определяется в виде функционала от функции плотности распределения ЛП по толщинам.

Функция плотности распределения удовлетворяет кинетическому уравнению [1], заменяющему в рассматриваемом случае закон сохранения массы,

$$dg/dt + ge_{\mathrm{I}} = \partial(fg)/\partial h + \psi,\ \psi = D(\alpha_0(\theta) + \alpha_r(\theta)w(g))$$
$$D = \sqrt{e_{\mathrm{I}}^2 + e_{\mathrm{II}}^2},\ \theta = \mathrm{arctg}(e_{\mathrm{II}}/e_{\mathrm{I}}) \qquad (1.3)$$

Функция описывает перераспределение льда по толщинам при торошении и формирование чистой воды. Коэффициенты α_0 и α_r определяют доли пластической деформации, соответствующие продукции чистой воды и торошению. Функция $f(h)$ равна скорости таяния или намерзания ЛП. Функция перераспределения удовлетворяет условиям нормировки, вытекающим из закона сохранения массы ЛП при торошении и изменения площади, занимаемой ЛП на поверхности океана, при пластическом деформировании. Подробнее, изменение площади открытой воды и площади, занятой торосящимся льдом, происходит за счет дивергенции или конвергенции ЛП, не принимающего участие в торошении. Из условий нормировки вытекает, что $\alpha_0 - \alpha_r = e_{\mathrm{I}}/D$. Коэффициенты α_0 и α_r выбираются таким образом, что $\alpha_0(0) = 1$, $\alpha_r(\pi) = 1$ и $\alpha_0 = 0$ при $\theta \in (3/4\pi, \pi)$, $\alpha_r = 0$ при $\theta \in (0, \pi/4)$.

Точка $\theta = \pi/2$ соответствует $e_{\mathrm{I}} = 0$. Из (1.2) следует, что в этой точке $\partial F/\partial\sigma_{\mathrm{I}} = 0$, и деформация сводится к чистому сдвигу. Так как при $\theta = \pi/2$ выполняется условие $\alpha_0 \neq 0$, то даже при чистом сдвиге часть поверхности океана освобождается ото льда. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока сплоченность ЛП не достигнет критического значения, при котором p_* обратится в нуль, и ЛП превратится в дисперсную среду без внутренних напряжений. Таким образом, в рамках рассматриваемого подхода ЛП – структурно неустойчивый материал по отношению к сдвиговым деформациям. Это следствие ассоциированного закона (1.2) и уравнения (1.3) представляется не вполне обоснованным с физической точки зрения.

При $\theta \in (0, \pi/2)$ из (1.2) вытекает, что любая деформация сдвига сопровождается объемным расширением. Это следствие ассоциированного закона давно известно [6, 7]. Эксперименты показывают, что для многих типов гранулированных сред применение ассоциированного закона приводит к избыточным объемным деформациям. Как правило, объемное расширение сопровождает сдвиг только в начальные моменты движения, а затем прекращается. Такое расширение связано с микроскопической структурой сдвига гранулированной среды, при которой отдельные гранулы перекатываются друг через друга.

Другая причина критики ассоциированного закона в применении к гранулированным средам связана с примером, когда кривая текучести (1.1) содержит прямолинейные отрезки, исходящие из начала координат на плоскости напряжений $(\sigma_{\mathrm{I}}, \sigma_{\mathrm{II}})$. На этих отрезках условие текучести сводится к закону сухого трения Кулона – Мора, при котором необходимые для сдвига напряжения пропорциональны сжатию:

$$\sigma_{\mathrm{II}} = -k_f\sigma_{\mathrm{I}} \qquad (1.4)$$

Из (1.2), (1.4) вытекает равенство нулю мощности внутренних напряжений $\sigma_{\mathrm{I}}e_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{II}}e_{\mathrm{II}} = 0$. Это следствие ассоциированного закона также не соответствует физическим представлениям о сдвигах сыпучей гранулированной среды. В то же время закон трения Кулона – Мора находит хорошее экспериментальное подтверждение.

2. Реологические уравнения. В связи с отмеченными выше недостатками существующих моделей было предложено построение теорий гранулированных сред, не использующих ассоциированный закон. Реологические уравнения в плоском случае выводятся из кинематических гипотез, физический смысл которых сводится к представлению любой сдвиговой деформации в виде суммы простых сдвигов вдоль линий скольжения, являющихся характеристиками уравнений равновесия [7].

Далее приведем две системы реологических уравнений, использование которых представляется целесообразным при моделировании движения ЛП. Первая система состоит из уравнения состояния и уравнений Прандтля – Рейса, записанных для девиаторов тензоров напряжений и скоростей деформаций [8]. Уравнение состояния имеет вид

$$\sigma_{\text{I}} = -\pi(g) \tag{2.1}$$

где $\pi(g)$ определяет функциональную зависимость давления в ЛП от функции плотности распределения ЛП по толщинам $g(h)$, при котором начинаются необратимые объемные деформации. Уравнение (2.1) определяет давления, необходимые для торошения льда при сжатии, и растягивающие напряжения, при которых происходит разрушение ЛП.

Уравнения Прандтля – Рейса имеют вид

$$\frac{Ds}{Dt} + \lambda s = \mu(\sigma_{\text{I}})\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y}\right), \quad \frac{D\tau}{Dt} + \lambda\tau = \mu(\sigma_{\text{I}})\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$$
$$s = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})/2, \quad \tau = \sigma_{xy} \tag{2.2}$$

Здесь D/Dt – производная по Яуманну, x, y, t – горизонтальные координаты и время, u_x, u_y – проекции скорости дрейфа ЛП по осям x и y. Зависимость модуля сдвига μ от σ_{I} выбирается таким образом, чтобы линии скольжения совпадали с характеристиками уравнений (2.2) на плоскости u_x, u_y.

Из (2.1), (2.2) вытекает, что объемные деформации и сдвиг связаны только условием пластичности и протекают фактически независимо. Поэтому ЛП является структурно устойчивой средой по отношению к сдвиговым деформациям. Некоторые недостатки реологических соотношений (2.1), (2.2) могут быть связаны с предположением о независимости давления от сдвиговых деформаций.

Второй тип реологических уравнений имеет вид [9]

$$e_{\alpha\beta} = \lambda\frac{\partial H}{\partial\sigma_{\alpha\beta}} + M\frac{Dt_{\alpha\beta}}{Dt}, \quad \lambda \geqslant 0; \quad s_{\alpha\beta} = \sqrt{2}\sigma_{\text{II}}t_{\alpha\beta} \tag{2.3}$$

где $s_{xx} = -s_{yy} = s$, $s_{xy} = \tau$ – компоненты девиатора напряжений, $H(\sigma_{\text{I}}, \sigma_{\text{II}})$ – пластический потенциал, который может не совпадать с функцией F из условия пластичности (2.1). Уравнения (2.3) описывают связь напряжений со скоростями деформаций только при выполнении условия пластичности (1.1) и при $\lambda \geqslant 0$.

Уравнения (2.3) являются гиперболическими, если выполняются неравенства

$$-1 < \frac{\partial H}{\partial\sigma_{\text{I}}}\left(\frac{\partial H}{\partial\sigma_{\text{II}}}\right)^{-1}, \quad -1 < 2M < 1 \tag{2.4}$$

Скоростные характеристики совпадают с линиями скольжения при выполнении следующих соотношений:

$$\sin\Gamma = \frac{\sin\phi - \sin\nu}{1 - \sin\phi\sin\nu}, \quad \sin\Gamma = \frac{\cos\phi\cos\nu}{1 - \sin\phi\sin\nu}$$
$$\sin\Gamma = -2M, \quad \sin\nu = \frac{\partial g}{\partial\sigma_{\text{I}}}\left(\frac{\partial g}{\partial\sigma_{\text{II}}}\right)^{-1}, \quad \sin\phi = \frac{\partial F}{\partial\sigma_{\text{I}}} \tag{2.5}$$

Из уравнений (2.3) следует, что при выполнении условия пластичности (1.1) давление в ЛП зависит от скоростей объемных и сдвиговых деформаций и не зависит от тензора деформаций.

3. Поврежденность ледяного покрова. Выше отмечалось, что при моделировании ЛП обычно принимается гипотеза о несопротивляемости льда растягивающим усилиям. По мнению авторов, способность ЛП сопротивляться растяжениям зависит от его поврежденности.

Типичный пример – припайный лед вблизи берега. Припай выдерживает значительные растягивающие нагрузки, когда ветер направлен с суши на море. Если скорость ветра превышает некоторое критическое значение, припай может взламываться и превращаться в битый лед.

Определим параметр поврежденности ЛП Σ как отношение суммарной площади льдин, находящихся на участке единичной площади поверхности океана, к части площади этой поверхности, находящейся под ЛП. Например, для неограниченной однородной ледяной пластины $\Sigma = 2$, так как площадь поверхности льда равна сумме единичных площадей нижней и верхней поверхностей ЛП. Если в ЛП имеются трещины или он состоит из отдельных льдин или кусков льда, то $\Sigma > 2$. Наряду с Σ определим параметр $\Sigma_d = A\Sigma$, равный суммарной площади льдин, находящихся на участке единичной площади поверхности океана.

Предполагается, что ЛП не сопротивляется растяжениям, если его поврежденность достаточно велика. При малых значениях поврежденности ЛП сопротивляется растяжениям, и при $\Sigma = 2$ предельное растягивающее напряжение равно прочности на разрыв, т.е. равно $h\sigma_{cr}$, где $\sigma_{cr} \approx 10^6 H/м^2$ [10]. Увеличение поврежденности связано в основном с процессами необратимых пластических деформаций ЛП под влиянием внешних нагрузок, действующих со стороны атмосферы и океана [11].

Предполагается, что ЛП обладает способностью к залечиванию внутренних дефектов, когда их образование происходит не достаточно интенсивно. Залечивание поврежденности связано со смерзанием берегов трещин и поверхностей льдин при их соприкосновении.

Способность природных льдов к залечиванию внутренних дефектов исследовалась во многих экспериментальных работах (например, [12]) и связана с высокой гомологической температурой льда в естественных условиях. Высокая интенсивность залечивания дефектов пресного льда обусловлена наличием квазижидкого слоя на его поверхности. В соленых морских льдах интенсивность залечивания еще выше, так как морская вода, проникающая в трещины сквозь многочисленные поры, быстро их заполняет и затем замерзает.

Будем описывать процесс изменения поврежденности лагранжевого элемента ЛП эмпирическим уравнением

$$\gamma\left(\frac{d\Sigma_d}{dt} + \Sigma_d e_1\right) = R_1(T, A, h, \Sigma, e_{\alpha\beta}, \mu_j) + R_2(T, A, h, \Sigma, \mu_j) \qquad (3.1)$$
$$R_1 \geqslant 0, \quad R_2 \leqslant 0$$

Величина $\gamma\Sigma_d$ называется поверхностной энергией ЛП [13]. Постоянная γ равна силе сцепления между двумя слоями молекул материала, расположенных на единичной площади, T – температура ЛП.

Функция R_1 определяет скорость увеличения поврежденности при деформировании ЛП. Полагается, что наибольший рост поврежденности вследствие разлома льдин происходит при пластическом деформировании ЛП, состоящем в смещении льдин относительно друг друга. При этом скорость накопления поврежденности зависит от скорости пластических деформаций, текущего значения поврежденности, температуры, толщины и сплоченности ЛП.

Функция R_1 может также зависеть и от других параметров, характеризующих состояние ЛП и внешнее воздействие на него и обозначенных буквами μ_j.

Типичный пример – влияние поверхностного волнения на разлом крупных ледяных полей, наиболее сильно проявляющееся в прикромочной зоне. В этом случае параметры μ_j характеризуют амплитуду и длину волн, распространяющихся подо льдом. Если амплитуда волн достаточно велика, то происходит разламывание крупных ледяных полей на льдины, размер которых сравним с длиной волны.

Функция R_2 определяет скорость залечивания поврежденности. Для выяснения ее вида необходим дополнительный анализ экспериментальных данных о термодинамических свойствах ЛП. Заметим, что неизвестной является не только функция R_2, но также зависимости реологических постоянных модели от Σ. Влияние этих зависимостей можно учитывать с помощью написания эмпирических уравнений типа (3.1). Например, изменение полевого усилия в моделях Хиблера и AIDJEX можно описывать эмпирическим уравнением

$$\frac{dp_*}{dt} = R_1^p(T, A, h, \Sigma, e_{\alpha\beta}, \mu_j) + R_2^p(T, A, h, \Sigma, \mu_j), \quad R_1^p \geqslant 0, \quad R_2^p \leqslant 0 \tag{3.2}$$

Функции R_1^p и R_2^p выбираются эмпирически на основе интуитивных предположений о свойствах ЛП и сопоставлений результатов численных расчетов с натурными наблюдениями. В этом состоит настройка модели для рассматриваемого географического района.

4. Энергетические соотношения. Рассмотрим энергетические соотношения для ЛП, внутренняя структура которого характеризуется толщиной h, сплоченностью A, поврежденностью Σ и температурой T. Примем следующее выражение для поверхностной плотности внутренней энергии:

$$U = \rho A(hu + \Delta g h^2), \Delta = (\rho_w - \rho)/\rho \tag{4.1}$$

где ρ_w и ρ – плотности воды и льда, u – объемная плотность внутренней энергии. Второе слагаемое – потенциальная энергия ЛП как тела в положении гидростатического равновесия [14].

Запишем первый и второй законы термодинамики для ЛП, находящегося на единичной площади поверхности океана

$$\begin{gathered} dU = \sigma^{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta} + dQ^e + d_m U + d_T U \\ T dS = dQ^e + \tau_d^{\alpha\beta} d\varepsilon^p_{\alpha\beta} + dQ' + T(d_m S + d_T S) \end{gathered} \tag{4.2}$$

$$(d_m U = -d\varepsilon^\alpha_\alpha U, \ d_m S = -d\varepsilon^\alpha_\alpha S, \ d_T U = \rho A u f dt, \ d_T S = \rho A s f dt)$$

Здесь $S = \rho A h s$ и s – поверхностная и объемная плотности энтропии, aQ^e – приток тепла, dQ' – некомпенсированное тепло. Тензор полной деформации $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^e_{\alpha\beta} + \varepsilon^p_{\alpha\beta}$ равен сумме тензоров упругих и пластических деформаций, $d_m U$ и $d_m S$ – изменения внутренней энергии и энтропии за счет деформаций сжатия или растяжения, $d_T U$ и $d_T S$ – изменения внутренней энергии и энтропии за счет таяния или намерзания льда, f – скорость таяния или намерзания льда.

Определим затраты работы внутренних напряжений при пластическом деформировании ЛП

$$\sigma^{\alpha\beta} d\varepsilon^p_{\alpha\beta} = (\tau^{\alpha\beta}_\Sigma + \tau^{\alpha\beta}_\psi + \tau^{\alpha\beta}_d) d\varepsilon^p_{\alpha\beta} \geqslant 0 \tag{4.3}$$

Здесь $\tau^{\alpha\beta}_\Sigma d\varepsilon^p_{\alpha\beta} \geqslant 0$ – часть работы внутренних напряжений, затрачиваемая на увеличение поврежденности; $\tau^{\alpha\beta}_\psi d\varepsilon^p_{\alpha\beta} \geqslant 0$ – часть работы напряжений, затрачиваемая на перераспределение кусков льда при торошении или при деформациях, приводящих к изменению сплоченности; $\tau_d^{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta}^p \geqslant 0$ – часть работы напряжений, переходящая в тепло.

Рассмотрим функцию плотности свободной энергии $F = u - Ts$ и предположим, что F зависит от температуры T, тензора упругих деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}^e$ и средней по толщине поврежденности льда Σ/h. Используя формулы (4.2), учитывая уравнение для изменения поврежденности (3.1) и закон сохранения массы

$$d(\rho A h) = -d\varepsilon_\alpha^\alpha \rho A h + \rho A f dt \tag{4.4}$$

находим

$$\frac{\partial F}{\partial T} = -s, \quad \rho A h \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}^e} = \sigma^{\alpha\beta}, \quad \rho A h \frac{\partial F}{\partial \Sigma} R_1 = \tau_\Sigma^{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta}^p$$

$$\rho A h \frac{\partial F}{\partial \Sigma} R_2 = dQ', \quad \rho \Delta g h A dh = \tau_\psi^{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta}^p \tag{4.5}$$

Видно, что задание функции плотности свободной энергии $F(T, \varepsilon_{\alpha\beta}^e, \Sigma/h)$ и функций R_1, R_2 полностью определяет диссипацию в среде. Единственное условие, накладываемое на эти функции, состоит в том, что выражение для диссипации $\tau_d^{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta}^p$ и некомпенсированного тепла dQ' должны быть положительными.

Простейшее выражение для свободной энергии имеет вид

$$F = \frac{\varkappa_1}{2}(\varepsilon_{\rm I}^e)^2 + \frac{\varkappa_2}{2}((\varepsilon_{\rm I}^e)^2 + (\varepsilon_{\rm I}^e)^2) - \alpha(T - T_0)\varepsilon_{\rm I}^e + \frac{\gamma}{h}\Sigma \tag{4.6}$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ – упругие модули, α – коэффициент температурного расширения.

5. Модель битого льда. Битым льдом будем называть ЛП, состоящий из небольших льдин, которые при сжатии заползают одна на другую и практически не разрушаются. Процессы таяния и намерзания льда не рассматриваются. Полагается, что битый ЛП деформируется без внутренних напряжений до тех пор, пока его сплоченность $A < 1$. Таким образом, реология битого льда описывается соотношениями $\sigma_{\alpha\beta} = 0$ при $A < 1$.

Поврежденность битого льда достаточно велика и ее изменение описывается уравнением

$$d\Sigma_d + \Sigma_d d\varepsilon_\alpha^\alpha = 0 \tag{5.1}$$

Предположим, что торошение имеет место только при сжатии льда, сплоченность которого достигла значения $A = 1$. При этом изменение толщины льда описывается уравнением

$$dh + h d\varepsilon_\alpha^{\rho,\alpha} = 0 \tag{5.2}$$

Отметим, что сценарий торошения, описываемый уравнением (5.2), не совпадает со сценариями, описанными в моделях AIDJEX, где предполагается, что толщина льда в торосе в 4–5 раз больше толщины льда, из которого образован торос, при этом в торошении участвует только малая часть ЛП [1]. Формула (5.1) подразумевает, что ЛП, формирующий торос, обладает свойствами гранулированного материала [15].

Из (4.5) вытекает

$$\rho \Delta g h dh = \tau_\psi^{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta}^p \tag{5.3}$$

Из (5.2), (5.3) следует

$$\tau_\psi^{\alpha\beta} = -\delta^{\alpha\beta}\pi_\psi, \quad \pi_\psi = \rho \Delta g h^2/2 \tag{5.4}$$

Предположим, что диссипация является частью работы, необходимой для увеличения потенциальной энергии при торошении

$$\tau_d^{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta}^p = k_r \tau_\psi^{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta}^p \qquad (5.5)$$

Было показано [15], что диссипация может превышать возрастание потенциальной энергии при торошении в 5–15 раз в зависимости от температуры воздуха. Поэтому $k_r \in (5,15)$ [14].

Из (5.4), (5.5) следует, что условие торошения имеет вид

$$\sigma_1 = -\pi_r, \quad \pi_r = (1 + k_r)\rho\Delta g h^2/2$$

Условие реализации пластического сдвига примем в виде закона Кулона – Мора (1.4). Коэффициент $k_f \in (0.1, 0.4)$ [14]. В качестве реологических уравнений, описывающие сдвиговые деформации, могут быть выбраны уравнения Прандтля – Рейса (2.2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00690, 97-05-62926) и Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (95-0435).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Coon M.D., Maykut G.A., Pritchard R.S., Rothrock D.A., Thorndike A.S.* Modeling the pack ice as an elastic-plastic material // AIDJEX Bull. № 24. 1975. P. 1–105.
2. *Hibler W.D., III.* A dynamic thermodynamic sea ice model // J. Phys. Oceanogr. 1979. V. 9. № 44. P. 815–846.
3. *Kleine E., Sklyar S.* Mathematical features of Hibler's model of largescale sea-ice dynamics // German J. Hydrography. 1995. V. 47. № 3. P. 179–230.
4. *Ильюшин А.А.* О росте приращения пластической деформации и поверхности текучести // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 4. С. 663–666.
5. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
6. *Mandl G., Luque R.F.* Fully developed plastic shear flow of granular materials // Geotechnique. 1970. V. 20. № 3. P. 277–307.
7. *Spencer A.J.* Deformation of ideal granular materials // Mechanics of Solids: the Rodney Hill Anniversary Volume Eds H.G. Hopkins and M.J. Sewell. Oxford: Pergamon Press, 1981. P. 607–652.
8. *Марченко А.В.* Модель дрейфующего ледяного покрова // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 1. С. 40–54.
9. *Harris D.* Constitutive equations for planar deformations of rigid plastic materials // J. Mech. Phys. Solids. 1993. V. 41. № 9. P. 1515–1531.
10. *Богородский В.В., Гаврило В.П.* Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии. Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 384 с.
11. *Сухоруков К.К.* О механизме формирования напряженного состояния морского льда при макроразрывах // Докл. РАН. 1996. Т. 350. № 2. С. 253–255.
12. *Маэно Н.* Наука о льде. М.: Мир, 1988. 231 с.
13. *Mellor M.* Mechanics behavior of sea ice // The geophysics of sea ice // Ed. by N. Untersteiner. N.Y.; L.: Plenum Press, 1986. P. 165–281.
14. *Rothrock D.A.* The energetic of the plastic deformation of pack ice by ridging // J. Geophys. Res. 1975. V. 80. № 33. P. 4514–4519.
15. *Hopkins M.A., Hibler W.D.III., Flato G.M.* On the numerical simulation of the sea ice ridging process // J. Geophys. Res. 1991. V. 96. № C3. P. 4809–4820.

Москва

Поступила в редакцию 16.II.1998