УДК 539.375

© 1999 г. Г.Я. Попов

ОБ ОДНОМ СПЕКТРАЛЬНОМ СООТНОШЕНИИ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕБЫШЕВА–ЛАГЕРРА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИИ К ДИНАМИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

Выводится новое спектральное соотношение для многочленов Чебышева–Лагерра и дается его применение к построению точного решения антиплоской задачи теории упругости о дифракции ударной SH-волны на полубесконечной трещине, причем указанная волна падает на трещину под произвольным углом. Методом разрывных решений задача сводится к интегродифференциальному уравнению. Дается точное решение этого уравнения с помощью полученного спектрального соотношения. Получена формула для рассеянной волны и для коэффициента интенсивности напряжений.

1. Вывод спектрального соотношения. Вычислим преобразование Фурье от выражения

$$J_n^{(\mu)}(\xi)=\left(1-\frac{d^2}{d\xi^2}\right)\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{K_0(|\xi-\sigma|)}{e^\sigma\sigma^{1/2-\mu}}L_n^{\mu-1/2}(2\sigma)d\sigma,\quad \mu\geqslant 1 \tag{1.1}$$

Здесь $K_0(z)$ – функция Макдональда, $L_n^\lambda(z)$ – многочлен Чебышева–Лагерра. Если воспользоваться теоремой о свертке [1] и учесть, что ([2], формулы 7.414(8) и 8.4332(5))

$$\int\limits_0^\infty \frac{L_n^{\mu-1/2}(2t)}{e^t t^{1/2-\mu}}e^{i\alpha t}dt=\frac{\Gamma(1/2+\mu+n)(\alpha-i)^n}{(-i)^{\mu+1/2}(\alpha+i)^{\mu+n+1/2}n!}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty K_0(t)e^{i\alpha t}dt=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}}$$

то можем записать

$$J_n^{(\mu)}(\xi)=\frac{\Gamma(1/2+\mu+n)I(\xi)}{i^{\mu+1/2}n!},\quad I(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{(\alpha-i)^{n+1/2}e^{-i\alpha\xi}d\alpha}{(\alpha+i)^{\mu+n}} \tag{1.2}$$

Можно убедиться, что условия леммы Жордана здесь выполнены, и поэтому

$$I(\xi)=-i\operatorname{Res}\left.\frac{(\alpha-i)^{n+1/2}e^{-i\alpha\xi}}{(\alpha+i)^{n+\mu}}\right|_{\alpha=-i}=-i\frac{2^{3/2-\mu}(-i)^{3/2+\mu}(-1)^\mu}{\Gamma(-n-1/2)\Gamma(n+3/2)}L_{n+\mu-1}^{3/2-\mu}(2\xi)$$

(при получении последнего равенства использована формула 8.974(1) из [1]). Таким образом, согласно (1.2)

$$J_n^{(\mu)}(\xi)=(-1)^{2\mu}2^{3/2-\mu}\Gamma(1/2+\mu+n)L_{n+\mu-1}^{3/2-\mu}(2\xi)/n! \tag{1.3}$$

Полагая в (1.1) и (1.3) $\mu = 1$, получаем спектральное соотношение

$$\left(1-\frac{d^2}{d\xi^2}\right)\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty K_0(|\xi-\sigma|)e^{-\sigma}\sqrt{\sigma}L_n^{1/2}(2\sigma)d\sigma = \frac{\sqrt{2}\Gamma(n+3/2)L_n^{1/2}(2\xi)}{n!e^{\xi}} \tag{1.4}$$

$0 \leqslant \xi < \infty,\ n = 0, 1, 2,...$

Ниже понадобится значение функции (1.1) на отрицательной части вещественной оси, и поэтому вычисление интеграла из (1.2) необходимо изменить: продеформировать вещественную ось в линию вдоль берегов разреза по мнимой оси от i до $i\infty$ и взять ту ветвь функции $\sqrt{\alpha-i}$, которая принимает на правом берегу значения $\left|\sqrt{\alpha-i}\right|e^{i1/4\pi}$, а на левом берегу $\left|\sqrt{\alpha-i}\right|e^{-i3/4\pi}$. При этом если $\xi < 0$, то лемма Жордана выполнится.

В результате интеграл из (1.2) после очевидной замены переменной интегрирования примет вид

$$I(\xi) = \frac{e^{\xi}I_\mu^-(\xi)}{i^{\mu-3/2}\pi},\quad I_\mu^-(\xi) = \int\limits_0^\infty \frac{t^{n+1/2}e^{t\xi}}{(t+2)^{n+\mu}}dt,\quad \xi<0 \tag{1.5}$$

причем согласно формуле 9.211(4) из [2]

$$I_\mu^-(\xi) = 2^{3/2-\mu}\Gamma(n+3/2)\Psi(n+3/2;5/2-\mu;2|\xi|),\quad \xi<0$$

где $\Psi(z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция второго рода. Таким образом,

$$J_n^\mu(\xi) = \Gamma(1/2+\mu+n)e^{\xi}I_\mu^-(\xi)/\pi n!,\quad \xi<0 \tag{1.6}$$

2. Антиплоская задача о дифракции упругой нестационарной SH-волны на полубесконечной трещине. Применим полученное спектральное соотношение к конкретной задаче механики разрушения. Пусть в неограниченной упругой изотропной среде с модулем сдвига G, коэффициентом Пуассона μ и плотностью ρ имеется трещина (дефект), совпадающая с полуплоскостью

$$y = 0,\ 0 \leqslant x < \infty,\ -\infty < z < \infty \tag{2.1}$$

На указанный дефект падает SH-волна вида [3]

$$w^0(x,y,t) = -A(ct-\omega)H(ct-\omega),\quad c^2 = G\rho^{-1},\quad \omega = x\sin\alpha - y\cos\alpha \tag{2.2}$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда, A – фиксированное число, α – угол падения волны. Эта волна при отсутствии дефекта вызывает в упругой среде касательные напряжения

$$\tau_{yz}^0(x,y,t) = AG\cos\alpha H(ct-\omega) \tag{2.3}$$

Требуется найти распределение смещений и напряжений

$$w(x,y,t) = w(x,y,c^{-1}\tau) = v(x,y,\tau),\quad \tau = ct$$

$$\tau_{yz}(x,y,t) = \tau_{yz}(x,y,c^{-1}\tau) = T(x,y,\tau) \tag{2.4}$$

после падения волны (2.2) на дефект (2.1) и вычислить коэффициент интенсивности напряжений

$$K_{\text{III}}(\tau) = \lim_{x\to-0}\sqrt{2\pi|x|}\ T(x,0,\tau) \tag{2.5}$$

Задача, очевидно, сводится к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 v(x,y,\tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y,\tau)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v(x,y,\tau)}{\partial \tau^2} = 0,\quad |x|<\infty,\quad y\neq 0,\quad \tau>0 \tag{2.6}$$

при нулевых начальных условиях и выполнении следующих условий на дефекте (2.1):

$$\langle \upsilon(x,0,\tau)\rangle = \upsilon(x,-0,\tau)-\upsilon(x,+0,\tau) = \varphi(x,\tau) \neq 0,\ x > 0$$

$$T(x,\pm 0,\tau) = 0,\ x \geqslant 0 \qquad (2.7)$$

Решение задачи (2.6), (2.7) будем строить в виде

$$\upsilon(x,y,\tau) = \upsilon^0(x,y,\tau) + \upsilon^1(x,y,\tau) \qquad (2.8)$$

причем

$$T(x,y,\tau) = G\partial\upsilon(x,y,\tau)/\partial y = T^0(x,y,\tau) + T^1(x,y,\tau) \qquad (2.9)$$

где согласно (2.2) и (2.3)

$$\upsilon^0(x,y,\tau) = -A(\tau-\omega)H(\tau-\omega),\ T^0(x,y,\tau) = AG\cos\alpha\, H(\tau-\omega) \qquad (2.10)$$

и $\upsilon^1(x,y,\tau)$ – разрывное решение [4, 5] волнового уравнения (2.6) для дефекта (2.1). Его строим точно так же, как и в случае сферического дефекта [5]. Последовательно применяем интегральное преобразование Лапласа и Фурье по классической схеме

$$\upsilon_p^1(x,y) = \int_0^\infty e^{-p\tau}\upsilon(x,y,\tau)d\tau,\ \upsilon_{p\alpha}^1(y) = \int_{-\infty}^\infty \upsilon_p^1(x,y)e^{i\alpha x}dx$$

а затем интегральное преобразование Фурье по y

$$\upsilon_{p\alpha\beta}^1 = \left(\int_{-\infty}^{-0} + \int_{+0}^{\infty}\right)\upsilon_{p\alpha}^1(y)e^{i\beta y}dy$$

согласно обобщенной схеме [4]. После обращения трансформант Фурье, трансформанту Лапласа искомого разрывного решения получаем в виде

$$\upsilon_p^1(x,y) = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^\infty \left\langle \upsilon_p^{1\prime}(s,0)\right\rangle K_0(pY)ds + \frac{d}{dy}\int_{-\infty}^\infty \left\langle \upsilon_p^1(s,0)\right\rangle K_0(pY)ds\right\} \qquad (2.11)$$

$$-\infty < x,\ y < \infty,\quad Y = \sqrt{(x-s)^2 + y^2}$$

где

$$\left\langle \upsilon_p^{1\prime}(s,0)\right\rangle = \left.\frac{\partial \upsilon_p^1(s,y)}{\partial y}\right|_{y=-0} - \left.\frac{\partial}{\partial y}\upsilon_p^1(s,y)\right|_{y=+0} = \left\langle \upsilon_p'(s,0)\right\rangle \qquad (2.12)$$

Второе равенство следует из того, что в (2.8) первое слагаемое вместе со своими производными не имеют разрыва на дефекте. По этой же причине

$$\left\langle \upsilon_p^1(s,0)\right\rangle = \left\langle \upsilon_p(s,0)\right\rangle = \int_0^\infty e^{-p\tau}\langle \upsilon(s,0,\tau)\rangle d\tau = \varphi_p(s) \qquad (2.13)$$

Формулы (2.10) в трансформантах Лапласа запишутся так:

$$\upsilon_p^0(x,y) = -Ap^{-2}e^{-\omega p}p^{-1},\quad T_p^0(x,y) = AG\cos\alpha e^{-\omega p} \qquad (2.14)$$

В силу (2.7) и (2.8) $\left\langle \upsilon_p^{1\prime}(\xi,0)\right\rangle = 0$ и $\left\langle \upsilon_p^1(\xi,0)\right\rangle = \varphi_p(\xi)$. Следовательно, разрывное решение (2.11) можно переписать в виде

$$\upsilon_p^1(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \varphi_p(s)K_0(pY)ds \qquad (2.15)$$

и тогда согласно (2.9)

$$T_p^1(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y^2}J_p(x,y),\quad J_p(x,y)=\frac{G}{\pi}\int\limits_0^\infty \varphi_p(s)K_0(pY)ds$$

но интегралы $J_p(x, y)$ по построению удовлетворяет уравнению

$$\partial^2 J_p(x,y)/\partial x^2+\partial^2 J_p(x,y)/\partial y^2-p^2 J_p(x,y)=0$$

и потому (2.9) можем записать в виде

$$T_p(x,y)=AG\cos\alpha p^{-1}e^{-\omega p}+\left(p^2-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{G}{\pi}\int\limits_0^\infty \varphi_p(s)K_0(pY)ds \tag{2.16}$$

Реализовав второе условие из (2.7), записанное в трансформантах Лапласа, сведем поставленную задачу с помощью (2.16) к интегродифференциальному уравнению

$$\left(p^2-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \varphi_p(s)K_0(p\,|\,x-s\,|)ds=f_p(x)\equiv-A\cos\alpha e^{-px\sin\alpha}p^{-1},\quad x\geqslant 0 \tag{2.17}$$

3. Построение точного решения поставленной задачи. Если временно считать параметр p положительным и в уравнении (2.17) сделать замену

$$x=\frac{\xi}{p},\quad s=\frac{\sigma}{p},\quad p\varphi_p\left(\frac{\sigma}{p}\right)=\psi(\sigma,p),\quad f_p\left(\frac{\xi}{p}\right)=g(\xi,p) \tag{3.1}$$

то оно примет вид

$$\left(1-\frac{d^2}{d\xi^2}\right)\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \psi(\sigma,p)K_0(|\,\xi-\sigma\,|)d\sigma=g(\xi,p),\quad \xi\geqslant 0 \tag{3.2}$$

и для построения его точного решения можем применить метод ортогональных многочленов [4], основываясь на спектральном соотношении (1.4), т.е. решение строим в виде

$$\psi(\sigma,p)=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\sigma}e^{-\sigma}L_n^{1/2}(2\sigma)\psi_n(p) \tag{3.3}$$

Подстановка этого ряда в (3.2) и использование соотношения (1.4) и ортогональность многочленов Чебышева–Лагерра позволяет получить явное выражение для коэффициентов разложения в (3.3)

$$\psi_n(p)=2g_n(p)n!^2\,\Gamma^{-2}(n+3/2) \tag{3.4}$$

где (согласно (3.1), (2.17) и формуле 7.714(8) из [2])

$$g_n(p)=\int\limits_0^\infty \sqrt{\xi}e^{-\xi}g(\xi,p)L_n^{1/2}(2\xi)d\xi=\frac{(-1)^n\Gamma(n+3/2)}{n!\,pr_\alpha\sec\alpha}R_\alpha^n,$$

$$R_\alpha=\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha},\quad r_\alpha=(1+\sin\alpha)^{3/2},\quad n=0,1,2,\ldots$$

Следовательно, если вернуться к старым переменным согласно (3.1), решение уравнения (3.2) запишется так:

$$\varphi_p(s)=\frac{2A\cos\alpha\sqrt{ps}}{p^2 r_\alpha e^{ps}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!\,L_n^{1/2}(2ps)}{\Gamma(n+3/2)R_\alpha^{-n}} \tag{3.5}$$

Трансформанта Лапласа рассеянной волны будет определяться формулой (2.15). Займемся восстановлением оригинала. Пусть $\mathfrak{L}^{-1}$ – оператор обратного преобразования Лапласа. Тогда [6]

$$\mathfrak{L}^{-1} K_0(pY) = f_2(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 < \tau < Y \\ (\tau^2 - Y^2)^{-1/2}, & \tau > Y \end{cases} \tag{3.6}$$

Примем во внимание, что [7]

$$\mathfrak{L}^{-1} p^{-n-\nu} L_n^{\alpha}(p) = \frac{(1+\tau)^n \tau^{\nu-1}}{\Gamma(n+\nu)} P_n^{\alpha,\nu-1}\left(\frac{\tau-1}{\tau+1}\right) \tag{3.7}$$

При этом согласно формуле 8.962(1) из [2] можно получить два представления для многочленов Якоби в (3.7)

$$P_n^{\alpha,\nu-1}\left(\frac{\tau-1}{\tau+1}\right) = \frac{(-1)^n(\nu)_n}{n!(\tau+1)^n} F(-n,-n-\alpha;\nu;-\tau) = \frac{(\alpha+1)_n \tau^n}{n!(\tau+1)^n} F(-n,-n-\nu+1;\alpha+1;-\frac{1}{\tau}) \tag{3.8}$$

Теперь, если учесть, что [8]

$$\mathfrak{L}^{-1} e^{-ps} = \delta(\tau - s)$$

($\delta(x)$ – функция Дирака), и воспользоваться теоремой подобия и вновь теоремой о свертке для трансформант Лапласа [9], то можно получить (с учетом (3.7) и (3.8))

$$\mathfrak{L}^{-1} e^{-ps}(2ps)^{-n-\nu} L_n^{1/2}(2ps) = f_1(\tau) \tag{3.9}$$

$$f_1(\tau) \equiv 0,\ s > \tau;\quad f_1(\tau) = \sqrt{\frac{\tau-s}{2s}}\,\frac{(-1)^n(2s)^n}{n!\Gamma(3/2-n)} F\left(-n,-n-\frac{1}{2};\frac{3}{2}-n;\frac{s-\tau}{2s}\right),\quad \tau > s \tag{3.10}$$

Следовательно, оригинал решения (3.5) интегрального уравнения (2.17) в силу (2.13) и (3.5), (3.9) запишется в виде

$$\mathcal{L}^{-1}\varphi_p(s) = \langle v(s,0,\tau)\rangle = \frac{\sqrt{2}A(2s)^2}{r_\alpha \sec\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n! f_1(\tau)}{\Gamma\left(n+3/2\right) R_\alpha^{-n}} \tag{3.11}$$

Располагая формулами (3.6) и (3.11), для обращения трансформанты (2.15) достаточно воспользоваться теоремой о свертке. В результате получим

$$\mathcal{L}^{-1} v_p^1(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{2^{1/2+2} A}{\pi r_\alpha \sec\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n! R_\alpha^n}{\Gamma\left(n+3/2\right)} I_*$$
$$I_* = \int_0^{\infty} s^2 I(\tau,s)\,ds,\quad I(\tau,s) = \int_0^{\tau} f_1(u) f_2(\tau-u)\,du \tag{3.12}$$

Займемся преобразованием последнего интеграла. Учитывая структуру функции $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$, даваемую формулами (3.10) и (3.6), находим

$$I(\tau,s) \equiv 0,\ \tau < s,\ \tau - s < Y;\quad I(\tau,s) = J_*(\tau,s),\ \tau - s \geq Y$$

$$J_*(\tau,s) = \int_Y^{\tau-s} f_1(\tau-\xi) f_2(\xi)\,d\xi$$

и потому

$$I_k = \int_0^{\tau} s^2 J_*(\tau,s)\,ds \tag{3.13}$$

На основании (3.10), (3.6) находим

$$J_*(\tau,s) = \frac{(-1)^n(2s)^{n-1/2}}{n!\Gamma\left(3/2-n\right)} Y^- \int_0^1 \frac{\sqrt{\sigma} F\left(-n,-n-1/2;3/2-n;(-2s)^{-1} Y^-\sigma\right) d\sigma}{\left[(1-\sigma)\left(Y^+ - Y^-\sigma\right)\right]^{1/2}} \tag{3.14}$$

(использована замена $\xi = Y + Y^-\sigma$ ($Y^{\pm} = \tau - s \pm Y$)).

Учитывая соотношения (3.12), (3.13) и (3.14), для рассеянной волны получаем окончательную формулу

$$v^1(x,y,\tau)=\frac{-16A\cos\alpha}{\pi^2 r_\alpha}\frac{\partial}{\partial y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-2R_\alpha\right)^n}{4n^2-1}\times$$

$$\times\int_0^\tau s^{n+3/2}Y^- ds\int_0^1\frac{F\left(-n,-n-1/2;3/2-n;(-2s)^{-1}Y^-\sigma\right)}{\sigma^{-1/2}\left[(1-\sigma)\left(Y^+-Y^-\sigma\right)\right]^{1/2}}d\sigma$$

4. Формула для коэффициента интенсивности напряжений. Для вычисления коэффициента интенсивности напряжения (КИН) нужно выполнить предельный переход в формулу (2.5), которая в трансформантах Лапласа запишется в виде

$$K_{III}^{(p)}=\int_0^\infty K_{III}^p(\tau)e^{-p\tau}d\tau=\lim_{x\to-0}\sqrt{2\pi|x|}T_p(x,0)=\sqrt{\frac{2\pi}{p}}\lim_{\xi\to-0}\sqrt{|\xi|}T_p\left(\frac{\xi}{p}0\right) \qquad (4.1)$$

где согласно (2.16) (с учетом замены (3.2)) имеем

$$T_p\left(\frac{\xi}{p},0\right)=\frac{AG\cos\alpha}{p}\exp\left(\frac{\xi}{p}\sin\alpha\right)+\left(1-\frac{d^2}{d\xi^2}\right)\frac{G}{\pi}\int_0^\infty\psi(\sigma,p)K_0(|\xi-\sigma|)d\sigma \qquad (4.2)$$

Первое слагаемое в силу своей непрерывности не внесет вклада в трансформанту КИН и потому оно отбрасывается. Под знак интеграла во втором слагаемом подставим ряд (3.3), (3.4). Тогда

$$K_{III}^{(p)}=\frac{2^{3/2}AG\cos\alpha}{\sqrt{\pi}p^{3/2}r_\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-R_\alpha\right)^n n!}{\Gamma\left(n+3/2\right)}\lim_{\xi\to-0}\sqrt{|\xi|}J_n^{(1)}(\xi) \qquad (4.3)$$

Если принять во внимание (1.6), то можем записать

$$\lim_{\xi\to-0}\sqrt{|\xi|}J_n^{(1)}(\xi)=\frac{\Gamma\left(n+3/2\right)}{n!\pi}\lim_{\xi\to-0}\sqrt{|\xi|}I_1^-(\xi) \qquad (4.4)$$

Чтобы выделить сингулярную часть в последнем интеграле при $\xi\to-0$, примем во внимание, что функции $s^n(s+1)^{-n}-1$ и $(1+s^{-1})^{-1}-1$ ведут себя на бесконечности как $O(s^{-1})$. Тогда, представив рассматриваемый интеграл в виде

$$I_1^-(\xi)=\int_0^\infty\left[\left(\frac{s}{s+1}\right)^n-1\right]\frac{\sqrt{s}}{s+1}e^{-2s|\xi|}ds+\int_0^\infty\frac{e^{-2s|\xi|}}{\sqrt{s}}\left[\frac{1}{1+1/s}-1\right]ds+\int_0^\infty\frac{e^{-2s|\xi|}}{\sqrt{s}}ds$$

и учтя формулу 3.361(2) из [2], обнаружим, что

$$I_1^-(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2|\xi|}}\left[1-O\left(\frac{1}{|\xi|}\right)\right],\ \xi\to-0$$

и потому

$$\lim_{\xi\to-0}\sqrt{|\xi|}I_1^-(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Подставив этот результат в (4.4), а затем в (4.3), после суммирования простого числового ряда найдем трансформанту КИН

$$K_{III}^{(p)}=\frac{AG\cos\alpha}{\sqrt{1+\sin\alpha}\,p^{3/2}}$$

Обратив ее с помощью известной формулы [6], найдем КИН

$$K_{III}(\tau)=\frac{2AG\cos\alpha\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi(1+\sin\alpha)}}$$

Его структура совпадает с результатом, полученным Г.П. Черепановым [10] для родственной задачи, но принципиально иным методом.

5. Заключение. Таким образом, показано эффективное применение полученного спектрального соотношения к построению точного решения известной задачи. Это решение можно построить и методом факторизации, подобно сделанному ранее [10]; в результате приходим к двукратным квадратурам, одна из которых к тому же и сингулярная. Одним из преимуществ подхода, основанного на спектральном соотношении (1.4), является отсутствие сингулярной квадратуры.

Опишем, как можно применить предложенный подход для эффективного приближенного решения новых более сложных задач механики разрушения.

Рассмотрим такую задачу[1]. Неограниченная упругая среда содержит трещину, совпадающую с поверхностью

$$r=R,\ -\pi\le\gamma<\pi,\ 0\le z<\infty \tag{5.1}$$

на берегах которой $r=R\neq 0$ приложены касательные (крутильные напряжения)

$$\tau_{r\varphi}(R\pm 0,z,\tau)=H(\tau)f(z),\ \ 0\le z,\tau<\infty\ \ (\tau=ct) \tag{5.2}$$

где $f(z)$ – заданная функция. Требуется определить поле напряжений и смещений от такой ударной нагрузки. Построив разрывное решение уравнений движения упругой среды для дефекта (5.1) по схеме работ [5, 11], сведем поставленную задачу к интегродифференциальному уравнению (2.18), в котором следует заменить

$$x\to z,\ \ s\to\zeta,\ \ K_0(p|x-s|)\to H_p(z-\zeta)$$

$$f_p(x)\to 4(Rp)^{-1}f(z),\ \ \varphi_p(s)\to\varphi_p^*(\zeta)$$

$$H_p(z-\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}I_2\left(R\sqrt{p^2+\lambda^2}\right)K_2\left(R\sqrt{p^2+\lambda^2}\right)e^{-i\lambda(z-\zeta)}d\lambda$$

$$\varphi_p^*(\zeta)=\langle u_{\varphi p}(R,\zeta)\rangle$$

где $U_{\varphi p}$ – трансформанта Лапласа смещения $U_\varphi(r,z,\tau)$ по переменной τ. После замены $\lambda=\alpha p$, $z=\xi p$, $\zeta=\sigma p$ приходим к уравнению (3.2) со следующей корректировкой:

$$K_0(|\xi-\sigma|)=H_p^*(\xi-\sigma),\ \ \psi(\sigma,p)=p\varphi_p^*(\sigma/p)$$

$$H_p^*(\xi-\sigma)=2p\int_{-\infty}^{\infty}I_2\left(Rp\sqrt{1+\alpha^2}\right)K_2\left(Rp\sqrt{1+\alpha^2}\right)e^{-i\alpha(\xi-\sigma)}d\alpha \tag{5.3}$$

$$g(\xi,p)=4(Rp)^{-1}f(\xi/p)$$

Чтобы применить к решению полученного уравнения спектральное соотношение (1.4), выделим из ядра (5.3) нерегулярную часть. Если для простоты ограничиться рассмотрением процесса колебаний в начальный период (малые значения времени) и учесть, что это соответствует большим значениям параметра p, то указанную нерегулярную часть легко выделить, воспользовавшись известными [2] асимптотическими представлениями модифицированных функций Бесселя для больших значений аргу-

[1]Извлечение из диссертации Ю.А. Морозова, подготовленной под руководством автора.

мента, т.е.

$$2pI_2\left(Rp\sqrt{\alpha^2+1}\right)K_2\left(Rp\sqrt{\alpha^2+1}\right)=\frac{1}{R\sqrt{\alpha^2+1}}+\frac{1}{R\sqrt{\alpha^2+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{(2Rp)^k\left(\alpha^2+1\right)^{k/2}}$$

$$c_k=\sum_{q=0}^{k}\frac{(-1)^q\Gamma\left(5/2+q\right)\Gamma\left(5/2+k-q\right)}{\Gamma\left(5/2-q\right)\Gamma\left(5/2-k+q\right)q!(k-q)!}$$

Это позволяет интегродифференциальное уравнение задачи представить в виде

$$\left(1-\frac{d^2}{d\xi^2}\right)\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[K_0(|\xi-\sigma|)+R_p(\xi-\sigma)\right]\psi(\sigma,p)d\sigma=\frac{4}{p}f(\xi/p) \tag{5.4}$$

$0\le\xi<\infty$

где регулярная часть ядра имеет представление

$$R_p(X)=2\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha X}{\sqrt{\alpha^2+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k\ d\alpha}{(2Rp)^k\left(\sqrt{\alpha^2+1}\right)^k}$$

Наличие спектрального соотношения (1.4) позволяет применить метод ортогональных многочленов [4] для эффективного приближенного решения уравнения (5.4), т.е. решение по-прежнему строим в виде (3.3). Реализация стандартной процедуры метода ортогональных многочленов [4] приводит к бесконечной системе алгебраических уравнений

$$\varphi_n(p)+\sum_{m=0}^{\infty}d_{nm}(p)\varphi_m(p)=f_n(p),\quad n=0,1,2,...$$

где

$$\varphi_n(p)=a_n\psi_n(p),\quad a_n=(n!)^{-1}\Gamma\left(3/2+n\right)$$

$$f_n(p)=\frac{1}{p}\int_0^{\infty}f(\xi/p)\sqrt{\xi}e^{-\xi}L_n^{1/2}(2\xi)d\xi$$

$$d_{nm}(p)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_kJ_{m,n}^{(k)}}{(2Rp)^k a_n a_m},\quad J_{m,n}^{(k)}=\frac{(-1)^{m+n}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}=\frac{J_m^*(-\alpha)J_n^*(\alpha)d\alpha}{\left(\alpha^2+1\right)^{k/2-1/2}}$$

$$J_n^*(\alpha)\int_0^{\infty}\sqrt{\xi}e^{-(1+i\alpha)\xi}L_n^{1/2}(2\xi)d\xi$$

Все содержащиеся в $J_{m,n}^k$ интегралы вычисляются в конечном виде. Имеем

$$J_{m,n}^{(k)}=\frac{(-1)^{m+n+|m-n|}}{\Gamma\left(|m-n|+3/2\right)}\sum_{q=0}^{|m-n|}\frac{(-2|m-n|)_{2q}(-1)^q\Gamma\left(q+1/2\right)}{(2q)!\Gamma^{-1}\left(|m-n|+k/2-q+1/2\right)}$$

Полученную бесконечную систему наиболее удобно решать асимптотическим методом больших параметров p [12]. С этой целью ее решение строится в виде

$$\varphi_n(p)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\varphi_{nj}}{p^j},\quad n=0,1,2,... \tag{5.5}$$

При этом если заданная функция $f(z)$ разлагается в ряд Маклорена, то и правая часть уравнения оказывается разложенной по обратным степеням p.

В результате реализации асимптотического метода больших p получены явные аналитические выражения для коэффициентов в разложении (5.5), причем $\varphi_{n0} = 0$. В результате и решение исходного уравнения (5.4) тоже оказывается разложенным по обратным степеням p. Обратив по Лапласу полученное разложение, получим асимптотическое решение поставленной задачи для малых значений времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 668 с.
2. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
3. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д.* Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. Киев: Наук. думка, 1982. 399 с. (Методы расчета оболочек. Т. 5).
4. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
5. *Назаренко О.А., Попов Г.Я.* О дифракции упругих волн на сферических дефектах // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 835–847.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 343 с.
7. *Oberhettinger F., Badii L.* Tables of Laplace Trasforms. Berlin: Springer, 1973. 428 с.
8. *Брычков Ю.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 287 с.
9. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.: Физматгиз, 1958. 207 с.
10. *Черепанов Г.П.* Дифракция упругих волн на разрезе // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972. С. 615–622.
11. *Попов Г.Я., Кебли Б.* К решению задач о концентрации упругих напряжений возле дефектов на цилиндрических поверхностях // Прикл. мех. 1997. Т. 33. № 10. С. 67–73.
12. *Александров В.М., Коваленко Е.В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.

Одесса

Поступила в редакцию
9.II.1998