

УДК 533.6.011.32

© 1999 г. А.Н. Крайко, К.С. Реент

НЕВЯЗКАЯ ПРИРОДА НЕСИММЕТРИИ ОТРЫВНОГО ОБТЕКАНИЯ СИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ РАВНОМЕРНЫМ ПОТОКОМ

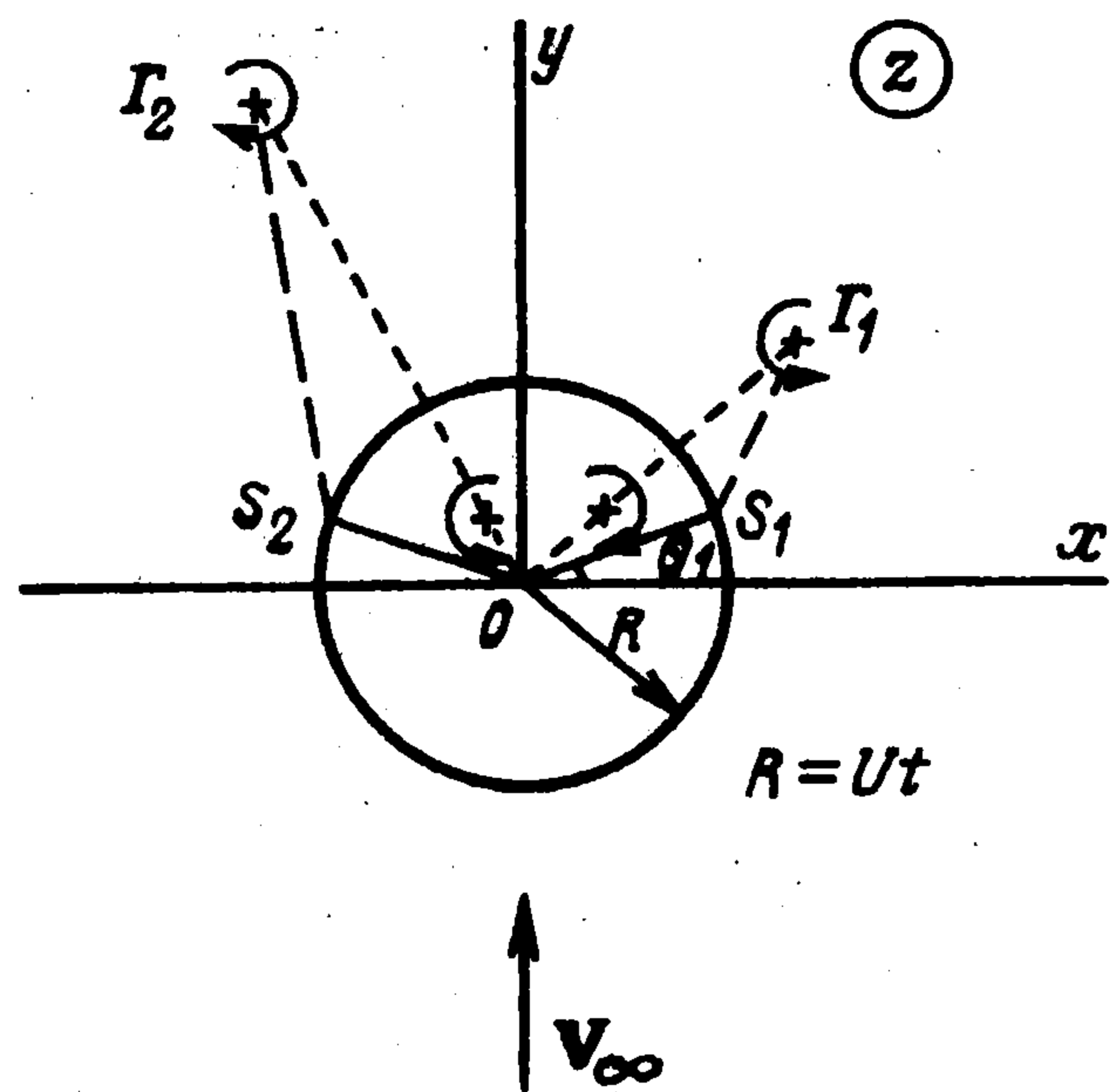
На примере отрывного нестационарного обтекания идеальной несжимаемой жидкостью цилиндра, расширяющегося с постоянной скоростью, — нестационарного аналога стационарного обтекания конуса под углом атаки, демонстрируется "невязкий" характер природы несимметрии. Несимметричная структура течения реализуется при симметричном положении точек схода вихревых пелен. Это свидетельствует о вторичной роли вязкости, которая может проявляться через "обратное" влияние на положение точек схода. Обнаружены новые несимметричные решения и способы их возникновения, отличные от классической бифуркации симметричного решения. При отборе "реально реализующихся" решений наряду с исследованием устойчивости проводится анализ глобальной картины "авто-модельных" линий тока. Последняя должна соответствовать схеме, принятой при построении теоретической модели.

Известное из эксперимента [1] нарушение симметрии отрывного обтекания симметричных тел (круговых конусов, комбинаций конуса и треугольного крыла, конуса и цилиндра и т.п.) в последние годы подтверждается численным интегрированием уравнений Навье — Стокса и Рейнольдса (см., например, [2–4]). При этом для ламинарных режимов возможность сколь угодно близкого согласования экспериментальных и расчетных результатов не вызывает сомнения. Для турбулентных режимов их отличие связано лишь с неуниверсальностью используемых в расчетах моделей турбулентности. Совершенствование этих моделей приведет к уменьшению рассогласования результатов расчета и эксперимента. С другой стороны, сколь угодно точное численное моделирование несимметричного вязкого обтекания симметричных тел при несомненной практической важности получающихся результатов (особенно силовых характеристик), не выявляя причину возникновения несимметрии, создает впечатление об ее исключительно "вязкой природе". На самом деле это не так, ибо в аналогичных задачах нестационарного отрывного обтекания расширяющихся симметричных тел несимметрия возникает в модели идеальной жидкости [5–7],

1. Постановка задачи и основные уравнения. Пусть круговой цилиндр, расширяющийся из начала декартовых координат xu со скоростью $U = \text{const}$, обтекается равномерным на бесконечности плоскопараллельным потоком идеальной жидкости (фиг. 1). Вектор скорости набегающего потока V_∞ направлен по оси u .

Как и в [5], отрывное обтекание цилиндра будем моделировать с помощью вихревых пелен, сходящих с его поверхности из точек S_1 и S_2 , симметрично расположенных относительно оси u с координатами $z_{s1} = Re^{i\theta_1}$ и $z_{s2} = Re^{i\theta_2}$, где $R = Ut$, а $\theta_2 = \pi - \theta_1$. В свою очередь вихревую пелену будем моделировать вихреразрезом.

При переходе от вихревой пелены к вихреразрезу завихренность (разность касательной к вихревой пелене компоненты скорости) "стягивается" с пелены в ее "центр", который превращается в вихревую нить (короче — в вихрь) конечной интенсивности $\Gamma = \Gamma(t)$. Из-за этого появляются две силы. Во-первых, сила Жу-



Фиг. 1

ковского F_1 , пропорциональная произведению Γ на скорость вихря относительно потока, т.е. на разность $V_k - dz_k/dt$, где $z_k = x_k + iy_k$ — комплексная координата k -го вихря ($k = 1, 2$), а V_k — скорость потока при $z = z_k$ без вклада этого вихря. Во-вторых, сила F_2 , обусловленная перепадом давления, который при таком переходе действует на лишенный завихренности "след" пелены [8–12]. Перепад давления, пропорциональный $d\Gamma/dt$, зависит только от времени. Это позволяет при вычислении F_2 заменять не известный заранее след пелены прямолинейным разрезом, который соединяет точку схода пелены с вихревой нитью. На исходную пелену никакие силы не

действуют. Поэтому уравнение движения вихря согласно рекомендациям [8, 9] получается приравниванием нулю суммы $F_1 + F_2$. Это дает уравнение

$$\frac{dz_k^*}{dt} = V_k^* + \frac{(z_{sk}^* - z_k^*)}{\Gamma_k} \frac{d\Gamma_k}{dt} \quad (1.1)$$

Здесь и далее звездочка означает комплексное сопряжение, $V_k = u_k + iv_k$ — скорость жидкости в точке расположения k -го вихря (за вычетом скорости, которую индуцирует он сам), z_{sk} — координата точки отрыва, к которой привязан k -й вихрь, а $\Gamma_k(t)$ — его завихренность ($k = 1, 2$). Перейдем к автомодельным переменным ζ_k и γ_k согласно равенствам $z_k = \zeta_k R(t)$ и $\Gamma_k = 2\pi R(t) U \gamma_k$. В этих переменных уравнение (1.1) станет

$$\frac{d\zeta_k^*}{d\tau} - \frac{e^{-i\theta_k} - \zeta_k^*}{\gamma_k} \frac{d\gamma_k}{d\tau} = \frac{u_k - iv_k}{U} - 2\zeta_k^* + e^{-i\theta_k} \quad (1.2)$$

где $\tau = \ln t$, а $z_{sk} = Re^{i\theta_k}$.

Для нахождения u_k и v_k построим комплексный потенциал w с учетом "сопряженных" относительно цилиндра вихрей в точках R^2/z_1^* и R^2/z_2^* , что необходимо для выполнения условий непротекания на цилиндре [5]

$$w = -iV_\infty \left(z - \frac{R^2}{z} \right) + UR \ln z + \frac{\Gamma_1}{2\pi i} \ln \frac{z - z_1}{z - R^2/z_1^*} - \frac{\Gamma_2}{2\pi i} \ln \frac{z - z_2}{z - R^2/z_2^*} \quad (1.3)$$

Здесь первые три слагаемых — сумма комплексных потенциалов равномерного набегающего потока, диполя и источника. Диполь и источник находятся в начале координат, т.е. в центре цилиндра. В согласии со сказанным ранее

$$u_k - iv_k = \lim_{z \rightarrow z_k} \left(\frac{dw}{dz} - \frac{\Gamma_k}{2\pi i(z - z_k)} \right), \quad k = 1, 2$$

Касательная к цилиндру компонента скорости в точке $z = Re^{i\theta}$ есть мнимая часть от $e^{i\theta}(iv - u)$. Поэтому условие схода вихревой пелены из двух точек на цилиндре, которое состоит в том, что касательная скорость равна в них нулю, имеет вид ($\alpha = V_\infty/U$)

$$\frac{(\zeta_1 \zeta_1^* - 1)\gamma_1}{(e^{i\theta_k} - \zeta_1)(e^{-i\theta_k} - \zeta_1^*)} - \frac{(\zeta_2 \zeta_2^* - 1)\gamma_2}{(e^{i\theta_k} - \zeta_2)(e^{-i\theta_k} - \zeta_2^*)} = 2\alpha \cos \theta_k, \quad k = 1, 2 \quad (1.4)$$

Из этих уравнений γ_k выражаются через $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$ ($k, j = 1, 2$). Введем четырехмерный вектор $X = (X_1, X_2, X_3, X_4) \equiv (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$. Тогда с учетом того, что

$$\frac{d\gamma_k}{d\tau} = \sum_{m=1}^4 \frac{\partial \gamma_k}{\partial X_m} \frac{dX_m}{d\tau}$$

уравнение (1.2) запишем в виде

$$(E + A)dX/d\tau = F \quad (1.5)$$

где E – единичная матрица размером 4×4 , а элементы A_{mn} матрицы A и компоненты F_m вектора F определяются формулами

$$A_{1n} + iA_{2n} = \frac{X_1 + iX_2 - e^{i\theta_1}}{\gamma_1} \frac{\partial \gamma_1}{\partial X_n}, \quad A_{3n} + iA_{4n} = \frac{X_3 + iX_4 - e^{i\theta_2}}{\gamma_2} \frac{\partial \gamma_2}{\partial X_n}$$

$$F_1 + iF_2 = \frac{u_1 + iv_1}{U} - 2(X_1 + iX_2)e^{i\theta_1}, \quad F_3 + iF_4 = \frac{u_2 + iv_2}{U} - 2(X_3 + iX_4)e^{i\theta_2}$$

Автомодельное решение системы (1.5) не зависит от t или τ и, следовательно, удовлетворяет "стационарному" уравнению $F(X) = 0$. После того как решение этого уравнения найдено для какого-либо значения $\alpha = V_\infty/U$, решения для других α строились численно методом непрерывного продолжения по параметру [13].

Для исследования устойчивости автомодельных решений систему (1.5) заменим ее эквивалентной формой

$$dX/d\tau = (E + A)^{-1}F$$

и линеаризуем в окрестности стационарной точки X_0 , представив X в виде $X = X_0 + X^\circ$ с малой добавкой X° , такой, что $|X^\circ| \ll |X_0|$. В результате получим

$$dX^\circ/d\tau = (E + A)_0^{-1} J_0 X^\circ \quad (1.6)$$

Здесь $J \equiv \partial F/\partial X$ – функциональная матрица Якоби правой части системы (1.2). Нулевой индекс у матриц J и $(E + A)^{-1}$ означает, что они вычисляются при $X = X_0$.

Решение линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.6), как обычно, ищется в виде

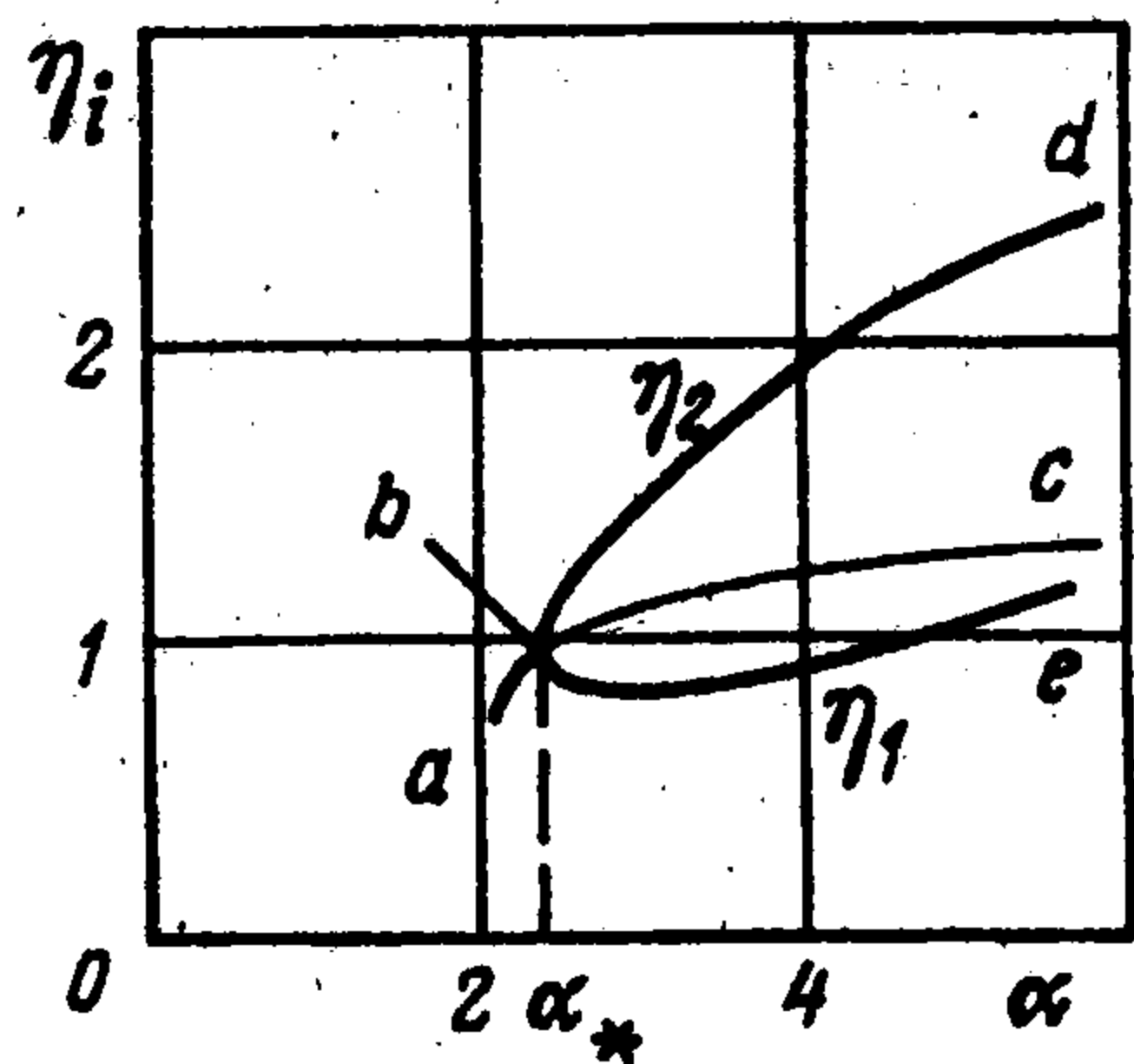
$$X^\circ = \sum_{i=1}^4 C_i X_i^\circ e^{\lambda_i \tau}$$

где C_i – произвольные постоянные, λ_i – собственные значения матрицы $(E + A)_0^{-1} J_0$, а X_i° – соответствующие им собственные векторы.

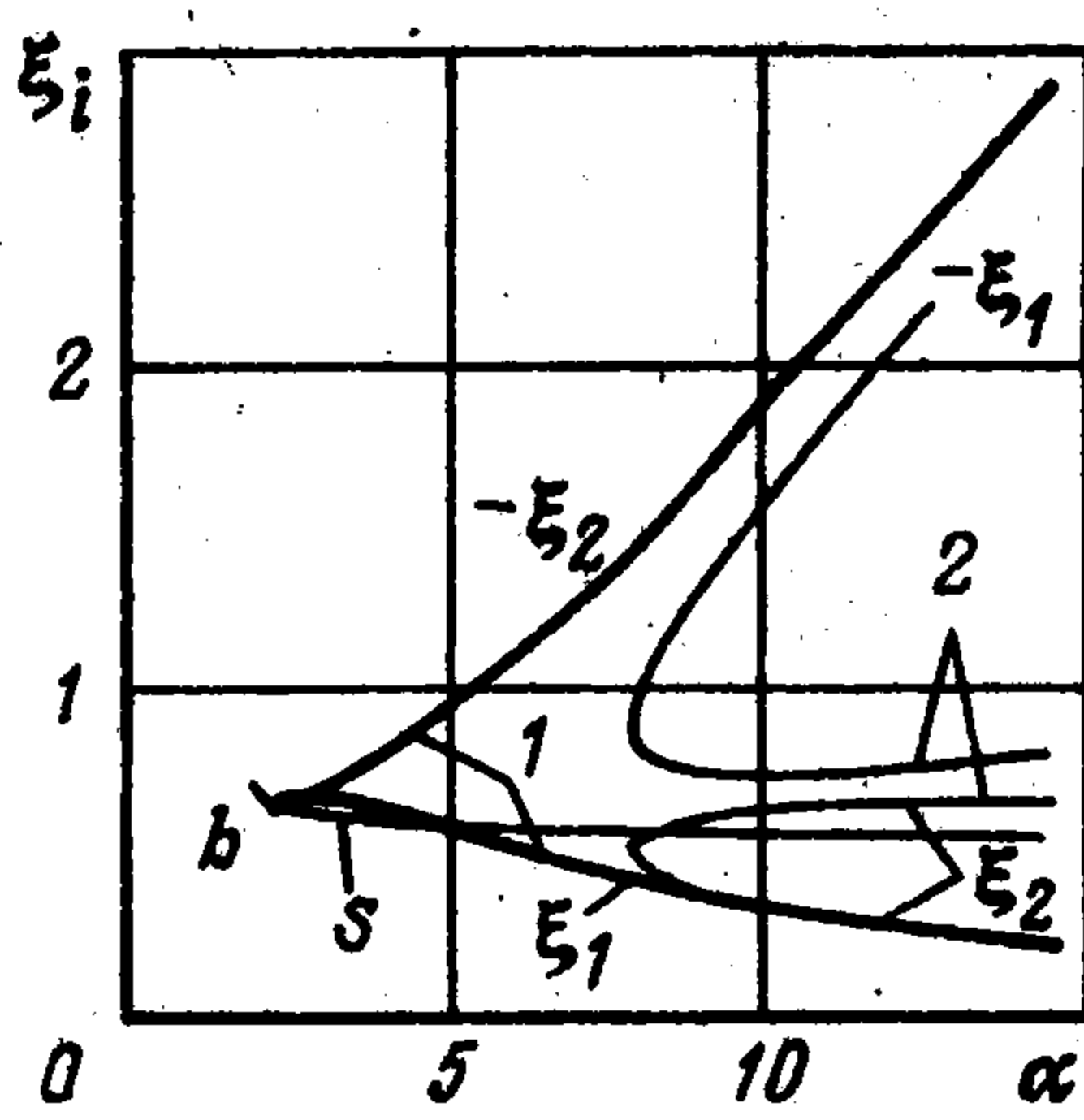
Отметим, что в работе [7] говорится лишь о собственных значениях матрицы J_0 при отсутствии каких-либо упоминаний о матрице $(E + A)_0^{-1}$. Данное обстоятельство ставит под вопрос правильность результатов [7] по исследованию устойчивости. В первую очередь это касается обнаруженного в [7] одновременного (при одном и том же значении α) существования устойчивых симметричных и несимметричных решений.

Если собственное значение λ_i , являющееся корнем характеристического уравнения, лежит в правой полуплоскости ($\text{Re} \lambda_i > 0$), то такой корень будем называть неустойчивым. Неустойчивые решения будем различать по числу неустойчивых корней. При одном собственном значении в правой полуплоскости решение будем называть просто "неустойчивым", при двух – "дважды неустойчивым" и т.д.

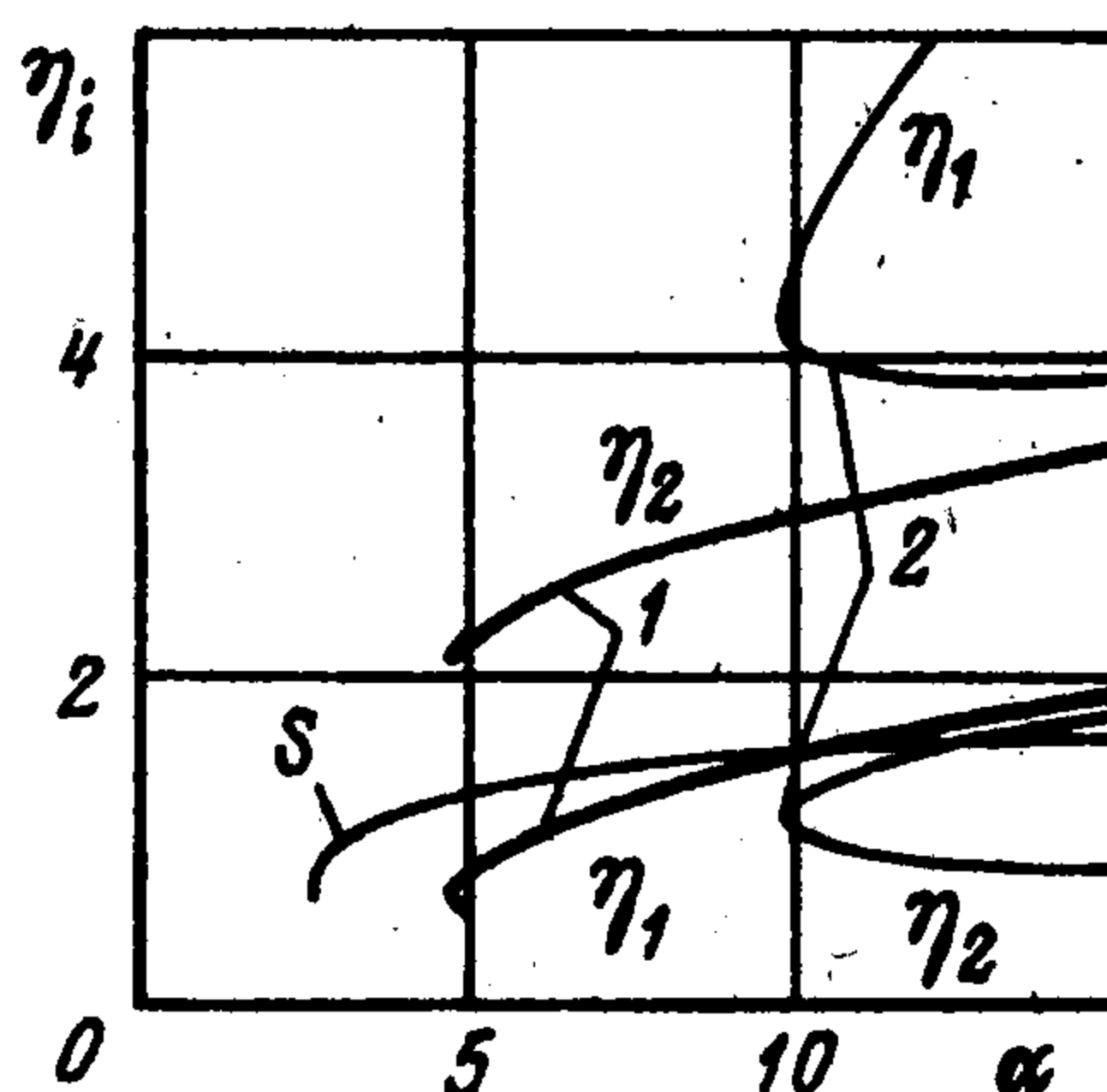
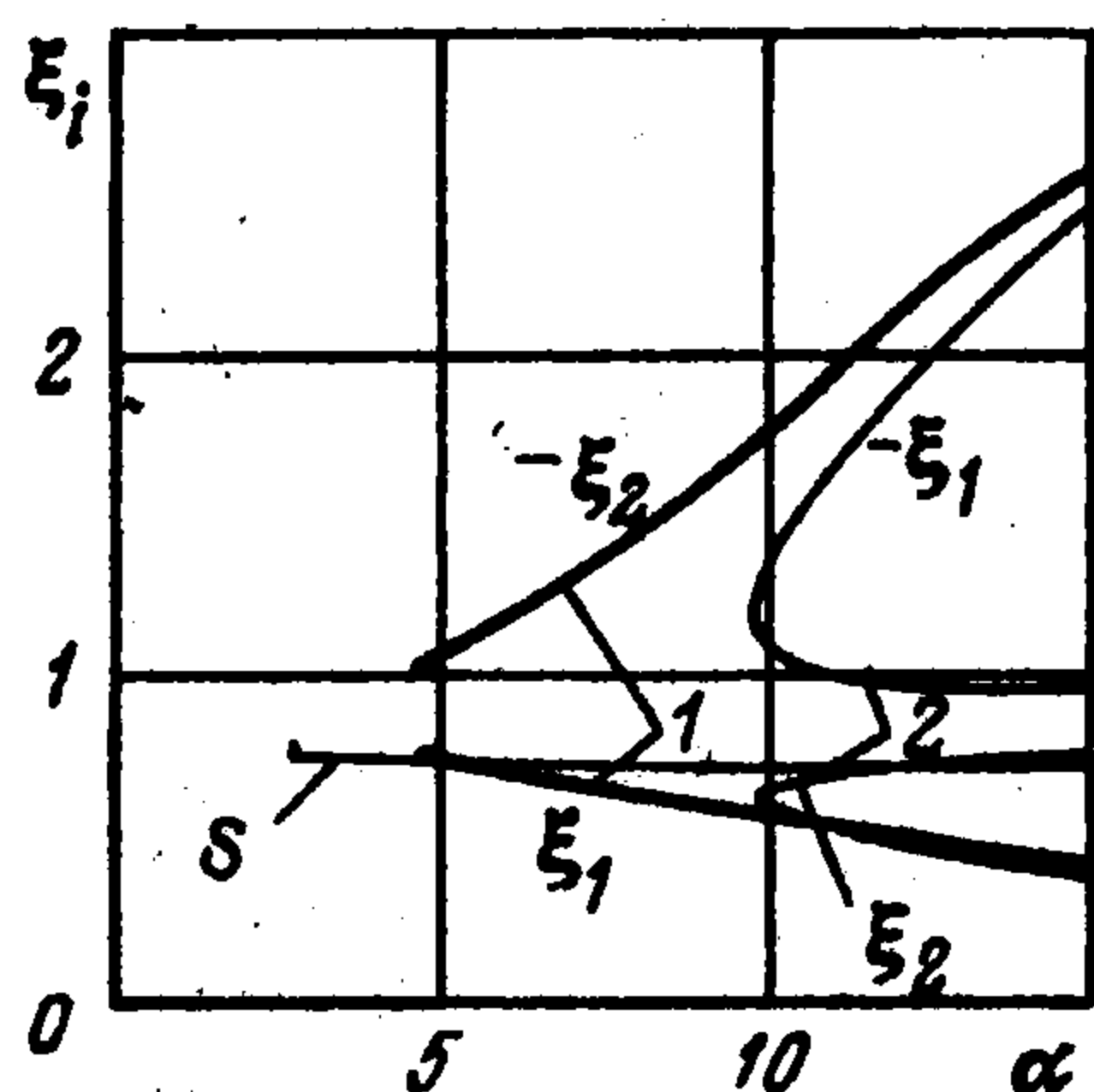
2. Обсуждение результатов. В работах [5–7] переход от симметричного решения



Фиг. 2



Фиг. 3

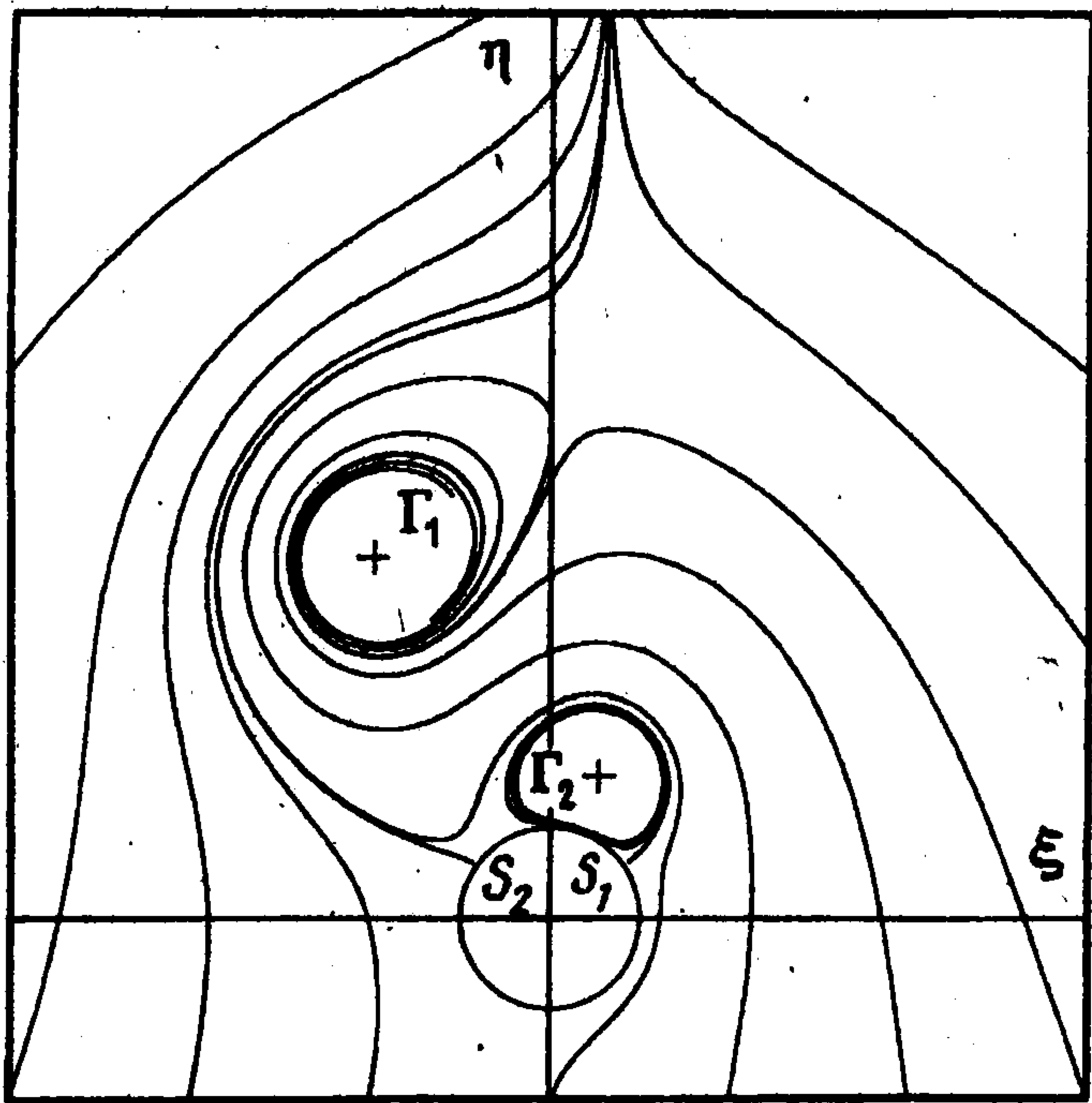


Фиг. 4

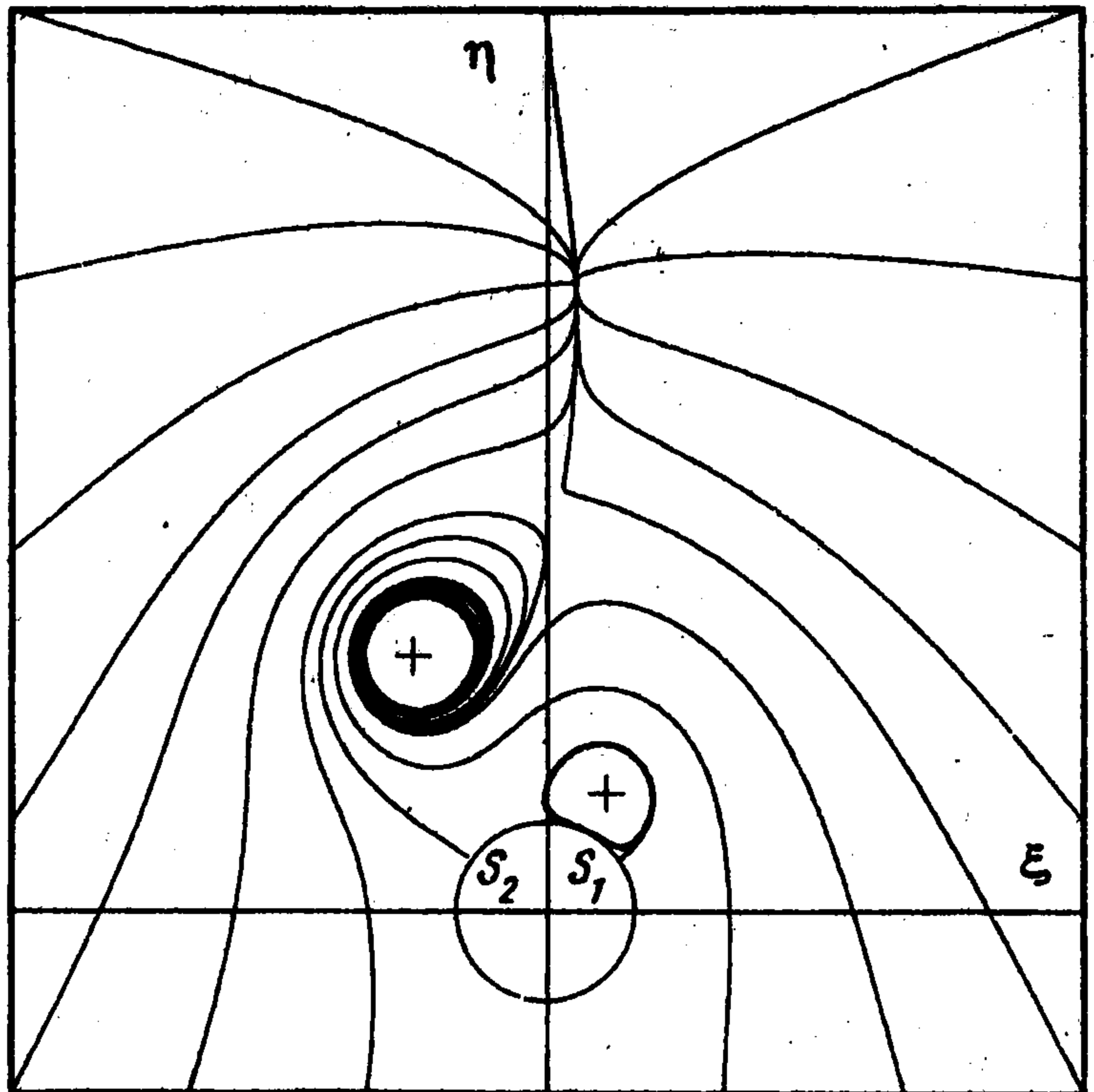
к несимметричному был результатом бифуркации симметричного решения при некотором значении параметра $\alpha = \alpha_*$. При $\alpha < \alpha_*$ существует единственное симметричное решение. Будучи устойчивым всюду, за исключением малой окрестности точки a , о чем сказано ниже, оно при $\alpha > \alpha_*$ становится неустойчивым. Одновременно появляется устойчивое несимметричное решение. Такую ситуацию иллюстрирует фиг. 2, на которой ординаты вихрей η_i даны как функции параметра α при фиксированных точках отрыва $\theta_1 = 45^\circ$ и $\theta_2 = 135^\circ$. Часть симметричного решения ab устойчива, а часть bc неустойчива. На кривой ac в силу симметрии $\eta_1 = \eta_2$. В точке бифуркации b появляется второе, несимметричное решение (кривые be и bd соответственно для η_1 и η_2), устойчивое при $\alpha > \alpha_*$. На фиг. 2 и далее устойчивые (неустойчивые) решения даются жирными (тонкими) кривыми.

Более детальный численный анализ системы уравнений (1.4)–(1.6) при том же положении точек схода показал, что при больших значениях α существует еще два несимметричных решения. На фиг. 3 они помечены цифрой 2. Одно из них неустойчивое, другое дважды неустойчивое. Кроме того, эти решения противоречат физической постановке задачи и должны быть отброшены по причине, разъясненной ниже для другого положения точек схода.

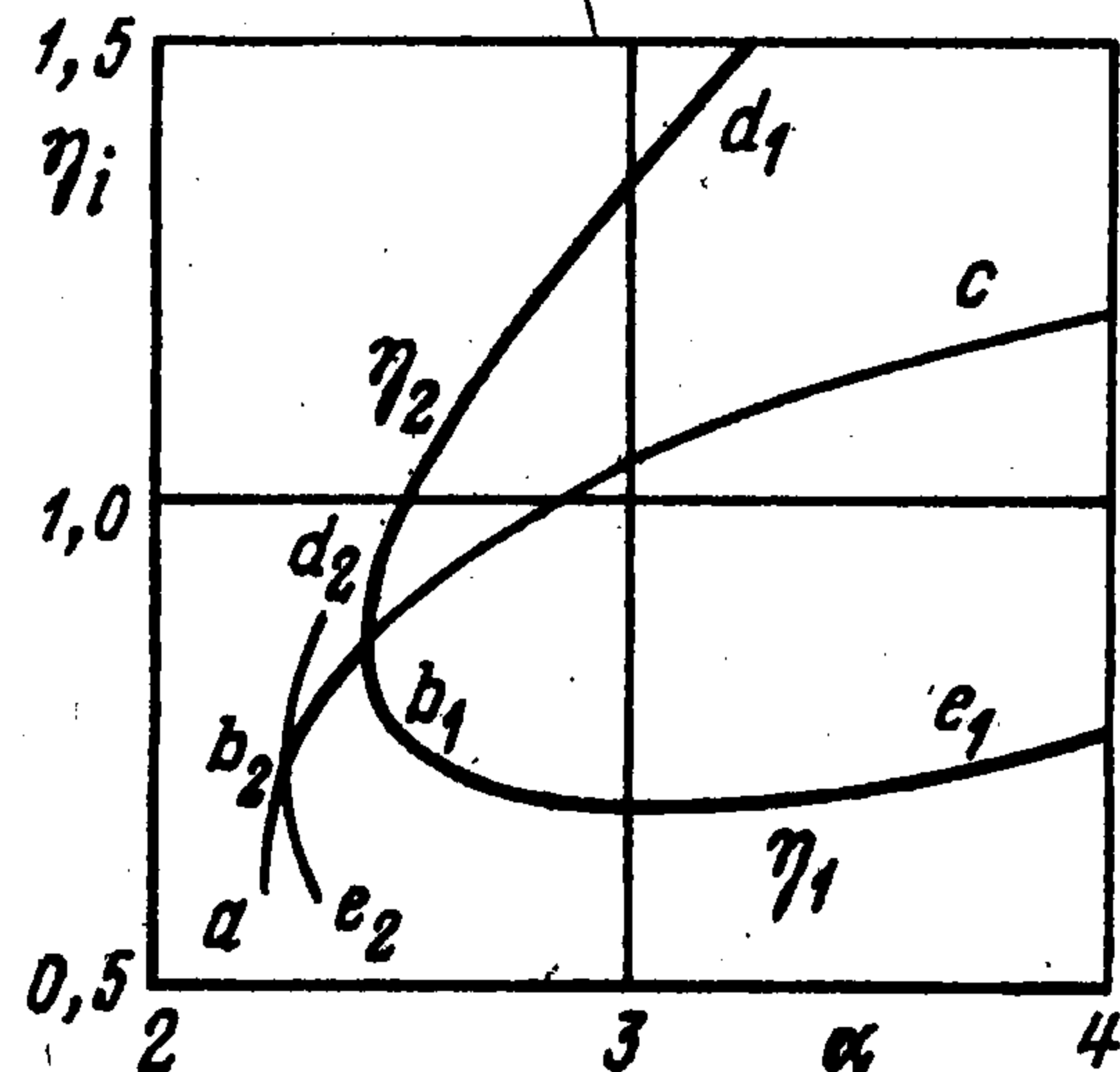
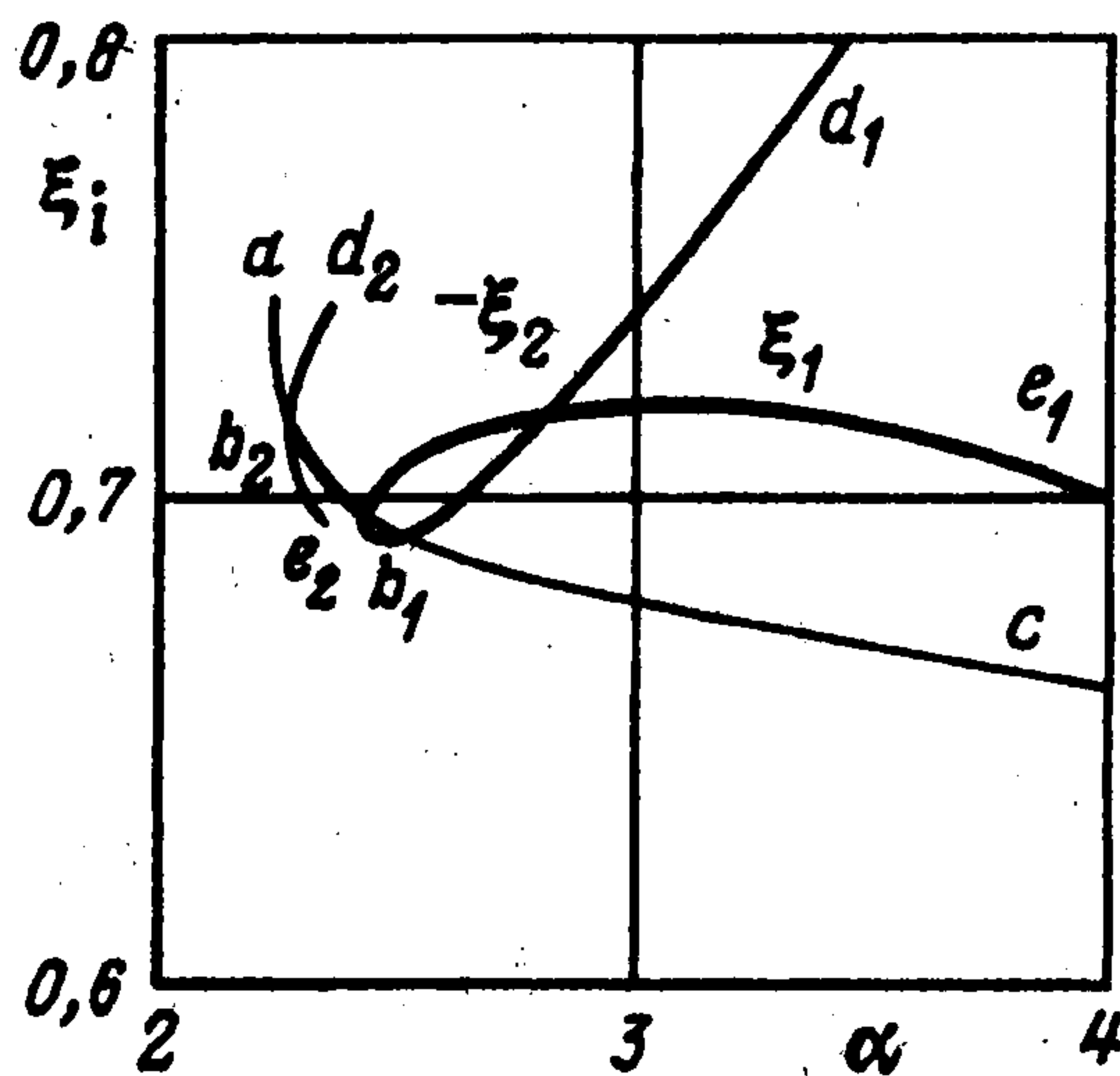
При углах схода пелен $\theta_1 = 35^\circ$ и $\theta_2 = 145^\circ$ точки бифуркации нет. В данном случае (фиг. 4) симметричное решение, обозначенное буквой S , неустойчиво, а несимметричное, помеченное цифрой 1, устойчиво для всех значений параметра α . Это решение появляется при некотором $\alpha > \alpha_m$. Для меньших α несимметричного решения, отвечающего принятому расположению вихререзцов, нет, а симметричное решение неустойчиво. Следовательно, в рамках принятой модели при выбранном симметричном расположении точек схода пелен ("точек отрыва") решений с автомодельной зависимостью параметров от времени не существует. При использовании известных способов предотвращения и организации отрыва подобную ситуацию можно ожидать и в стационарных течениях реальных (вязких) газа или жидкости, аналогом которых служит рассматриваемая нестационарная задача.



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Как и в предыдущем примере, при $\theta_1 = 35^\circ$ и $\theta_2 = 145^\circ$ есть два нефизичных решения, помеченных цифрой 2, одно из которых неустойчиво, другое дважды неустойчиво. Для $\alpha = 12,27$ линии тока одного из них (неустойчивого) изображены на фиг. 5. В данном примере координаты вихрей равны $\xi_1 = -1,96$, $\eta_1 = 3,88$, $\xi_2 = 0,53$ и $\eta_2 = 1,57$. Здесь и далее линиями тока называются записанные в автомодельных переменных траектории частиц. В исходных переменных в соответствии с определением они определяются дифференциальным уравнением $dz/dt = V = u + iv$. Отсюда после перехода к автомодельным переменным ξ и η получим

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{u/U - \xi}{v/U - \eta} \quad (2.1)$$

При определении компонент скорости u и v как функций ξ и η удобно вместо комплексного потенциала $w = w(z, R, \Gamma_{1,2})$ использовать комплексный потенциал $w^\circ = w^\circ(\zeta) = w(Ut\zeta, Ut, 2\pi U^2 r\Gamma_{1,2})/(Ut)$ и формулу $dw^\circ/d\zeta = u - iv$. В согласии с (1.3) это дает

$$w^\circ = -iV_\infty \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) + U \left(\ln \zeta + \frac{\gamma_1}{i} \ln \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - 1/\zeta_1^*} - \frac{\gamma_2}{i} \ln \frac{\zeta - \zeta_2}{\zeta - 1/\zeta_2^*} \right)$$

$$u - iv = -iV_\infty \left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right) + U \left[\frac{1}{\zeta} + \frac{\gamma_1}{i} \left(\frac{1}{\zeta - \zeta_1} - \frac{1}{\zeta - 1/\zeta_1^*} \right) - \frac{\gamma_2}{i} \left(\frac{1}{\zeta - \zeta_2} - \frac{1}{\zeta - 1/\zeta_2^*} \right) \right] \quad (2.2)$$

Линии тока получаются в результате численного интегрирования уравнения (2.1) с u и v из (2.2) при произвольном выборе начальной точки в плоскости автомодельных переменных. Применительно к трехмерному стационарному обтеканию конуса под углом атаки они дают картину пересечений конических поверхностей тока с произвольной (в силу автомодельности решения) плоскостью, перпендикулярной оси конуса.

Как видно из рассчитанных описанным выше способом линий тока, изображенных на фиг. 5, вихрь, "привязанный" через его уравнение движения к правой точке схода S_1 , находится в левой полуплоскости (координата ξ_1 отрицательна), а "привязанный" к левой точке S_2 — в правой. Это, однако, не соответствует исходной постановке задачи. Действительно, линия тока, которая является следом вихревой пелены, сходящей с точки S_1 , наматывается не на левый, а на правый вихрь. Линия тока, выходящая из точки S_2 , уходит на бесконечность и не связана ни с каким вихрем.

Для сравнения на фиг. 6 для $\alpha = 7,93$ дана картина линий тока для физического решения, помеченного на фиг. 4 цифрой 1. В этом примере $\xi_1 = 0,68$, $\eta_1 = 1,32$, $\xi_2 = -1,48$ и $\eta_2 = 2,82$. Здесь следы вихревых пелен наматываются на "свои" вихри.

Фиг. 5 показывает, что система (1.4)–(1.6) допускает весьма экзотические решения, нефизичность которых следует из анализа глобальной картины течения. В подобных ситуациях предложенный в [5] метод отбора решений, сводящийся к анализу поведения скорости на поверхности цилиндра в точках схода пелен на предмет того, не являются ли они точками торможения, недостаточен.

Как отмечалось ранее, при уменьшении угловой координаты схода вихревой пелены θ_1 с 45° до 35° бифуркация решения исчезает (см. фиг. 4 и 5). Это исчезновение сопровождается появлением еще одной точки бифуркации b_2 при некотором промежуточном значении θ_1 . Так при $\theta_1 = 42^\circ$ (см. фиг. 7) наряду с прежней точкой бифуркации b_1 и ветвью несимметричного решения $d_1 b_1 e_1$ имеется вторая точка бифуркации b_2 с соответствующей ей ветвью несимметричного решения $d_2 b_2 e_2$. Как показал анализ устойчивости, последняя, а также куски симметричного решения ab_2 и $b_1 c$ неустойчивы в полном соответствии с [14] (см. § II.10). Остальные ветви — $b_1 b_2$ и $d_1 b_1 e_1$ отвечают устойчивым решениям, соответственно симметричному и несимметричному.

Отметим, что утверждение автора [15] о том, что минимальное значение параметра α , при котором существует симметричное решение, равно $\alpha_0 = 1,5/\sin\theta_1$, неверно. На фиг. 8 в более крупном масштабе, чем на фиг. 4, нанесена ветвь симметричного решения для случая $\theta_1 = 35^\circ$. Точке a соответствует решение с вихрями, расположенными непосредственно на поверхности цилиндра. Именно в ней $\alpha = \alpha_0$. Однако минимальное значение $\alpha = \alpha_m$ достигается в точке m , когда вихри находятся на небольшом расстоянии от поверхности цилиндра. В диапазоне $\alpha_m < \alpha < \alpha_0$ имеется два решения. Одно из них am имеет на один неустойчивый корень больше, чем другое — mc . Описанная ситуация типична для малых окрестностей "левых концевых" точек кривых, отвечающих и симметричным, и несимметричным решениям. Для вторых это имеет место тогда, когда они, как в случае, изображенном на фиг. 4, появляются не в результате бифуркации симметричного решения.

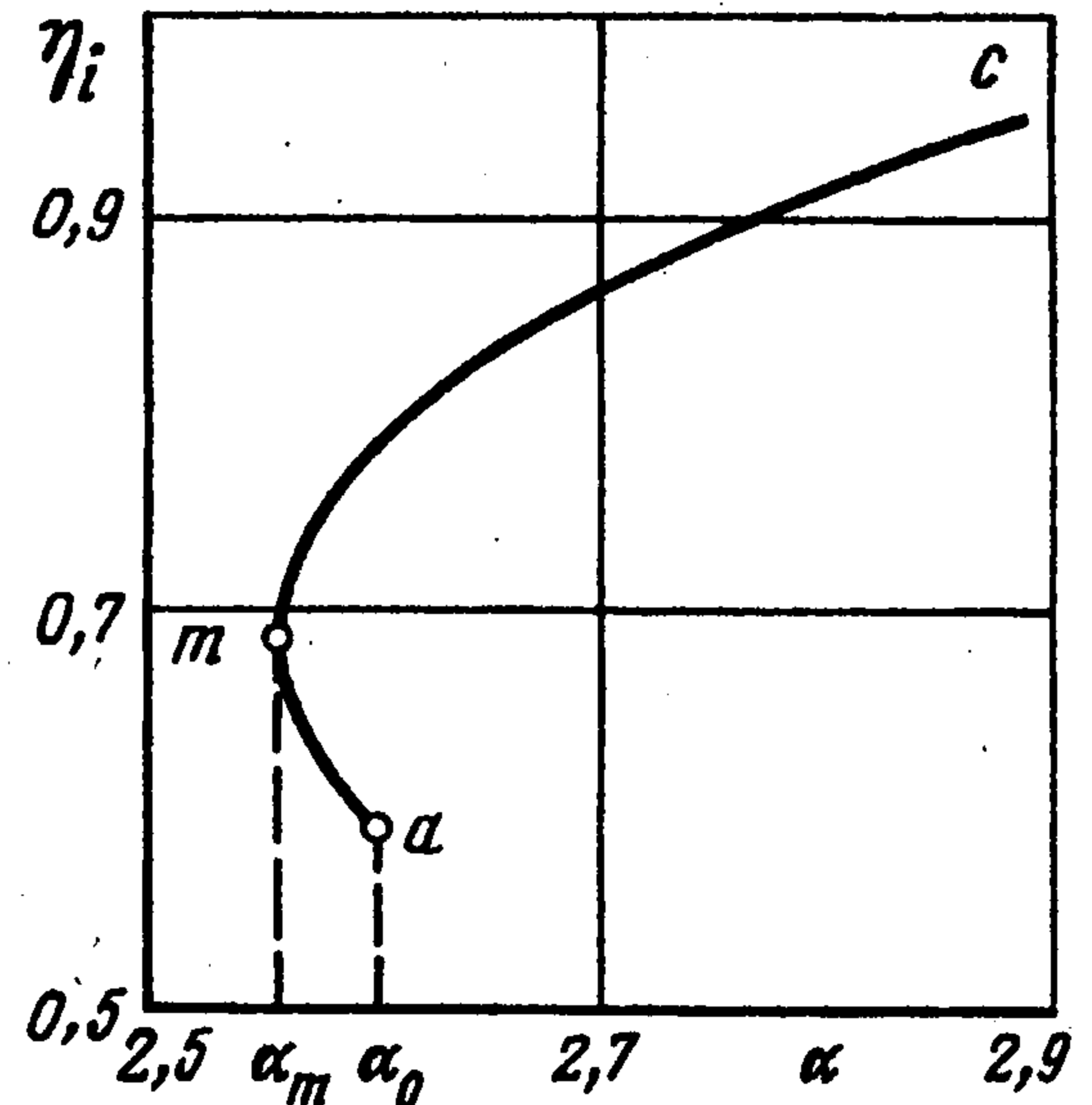
В заключение остановимся на двух, как нам представляется, достаточно важных моментах. Начнем с "ключевой" роли перехода от вихревых пелен, т.е. тангенциальных разрывов к вихререзам. На первый взгляд при таком переходе "вместе с водой выплескивается ребенок". Ведь тангенциальные разрывы неустойчивы и избавление от них удаляет из исходной модели всегда присущий ей механизм возникновения неустойчивости. На самом же деле указанная операция не только не

мешает понять природу возникновения несимметрии исследуемых течений, а напротив помогает этому. Действительно, в результате неустойчивости тангенциальных разрывов вместо них образуются турбулентные зоны смешения. Такие "устойчивые в среднем" зоны будут иметь место и при симметричном, и при несимметричном обтекании. Поэтому указанная неустойчивость, влияя на "переходное" значение параметра α , при котором симметричное решение становится неустойчивым (или наоборот), вряд ли может играть роль механизма возникновения несимметрии.

Аналогичные соображения справедливы и в отношении обратного влияния возникшей несимметрии течения на связанное с отрывом пограничного слоя заведомо несимметричное положение точек схода пелен, точнее соответствующих зон смешения. Более того, в принципе можно развить метод учета упомянутых вязких эффектов. Однако цель данной работы состояла не в создании метода, альтернативного прямому численному моделированию подобных течений, а в демонстрации невязкой природы их несимметрии. В связи с этим оправданно именно симметричное задание точек схода пелен. Кроме того, анализ, выполненный в предположении симметричного расположения точек схода пелен, интересен не только в теоретическом отношении, но и для приложений. Действительно, имеющиеся в распоряжении разработчиков методы управления пограничным слоем – отсос и установка на теле специальных щитков – "интерцепторов" позволяют как затягивать, так и инициировать его отрыв. Ранний отрыв ведет к росту сопротивления, а несимметрия течения – к появлению боковых усилий, действующих на летящий объект. Поскольку и то и другое обычно нежелательно, естественно стремление, во-первых, максимально затянуть отрыв и, во-вторых, при незнании причин несимметрии – сделать его симметричным. Из сравнения фиг. 3 и 4 видно, что "переходное" значение параметра α – аналога угла атаки при стационарном обтекании конических тел при этом уменьшается. Следовательно, вопреки ожиданиям разработчиков нежелательные боковые усилия возникнут при меньших углах атаки, чем при более раннем отрыве пограничного слоя.

Как следует из выполненного анализа и предыдущих разъяснений, главную роль в реализации симметричного или несимметричного обтекания играет поведение "вихревых ядер". В приближении идеальной жидкости это – спиралевидные образования, на которые бесконечное число раз наматывается вихревая пелена. В окрестности их "центра" давление отрицательно. В том же невязком приближении учет сжимаемости, исключая отрицательные давления, приводит к "наматыванию" пелены на "вакуумное ядро" конечного радиуса. Естественно, что в результате влияния вязкости подобные нефизичные образования заменяются "вязкими ядрами" с низким, но положительным давлением и с вращением частиц жидкости или газа по закону, близкому к закону вращения твердого тела (см., например, [16]). Однако, несмотря на столь сильное влияние вязкости в ядре вихря, его воздействие на остальное практически невязкое течение эквивалентно воздействию вихревой нити, вводимой так, как это делалось выше. Напомним, кстати, что и в модели идеальной жидкости в алгоритмах, предполагающих построение пелены, строится с использованием специальных "стабилизирующих" пелену мер лишь один-два ее витка, а остальная ее часть заменяется вихревым разрезом так же, как это делалось выше [11].

Все выкладки проводились с помощью системы аналитических вычислений REDUCE.



Фиг. 8

Авторы благодарят В.И. Копченова и К.Э. Ломкова, участвовавших в начальном этапе этой работы, а А.Г. Куликовского – за замечания.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01825 и 96-15-96158).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ericsson L.E.* Thoughts on conical flow asymmetry // *AIAA Journal*. 1993. V. 31. № 9. P. 1563–1568.
2. *Levy Y., Hesselink L., Degani D.* Anomalous asymmetries in flows generated by algorithms that fail to conserve symmetry // *AIAA Journal*. 1995. V. 33. № 6. P. 999–1007.
3. *Dusing D.W., Orkwis P.D.* Numerical issues affecting vortex asymmetries computed with the conical Navier – Stokes equations // *Computers and Fluids*. 1996. V. 25. № 3. P. 319–334.
4. *Hwang S.J., Rho O.H.* Lower-upper symmetric Gauss–Seidel scheme exhibiting asymmetric vortices over slender bodies // *J. Spacecraft and Rockets*. 1996. V. 33. № 5. P. 750–752.
5. *Dyer D.E., Fiddes S.P., Smith J.H.B.* Asymmetric vortex formation from cones at incidence – a simple inviscid model // *Aeronaut. Quart.* 1982. V. 33. Pt 4. P. 293–312.
6. *Гоман М.Г., Храбров А.Н.* К возникновению несимметричного отрывного обтекания тонких тел вращения на больших углах атаки // *Учен. зап. ЦАГИ*. 1984. Т. 15. № 6. С. 1–9.
7. *Гоман М.Г., Захаров С.Б., Храбров А.Н.* Симметричное и несимметричное отрывное обтекание крыла малого удлинения с фюзеляжем // *Учен. зап. ЦАГИ*. 1985. Т. 16. № 6. С. 1–8.
8. *Edwards R.H.* Leading-edge separation from delta wings // *J. Aeronaut. Sci.* 1954. V. 21. № 2. P. 134–135.
9. *Brown C.E., Michael W.H., Jr.* Effect of leading-edge separation on the lift of a delta wing // *J. Aeronaut. Sci.* 1954. V. 21. № 10. P. 690–694, 706.
10. *Копченов В.И., Крайко А.Н., Ломков К.Э.* К моделированию отрывного обтекания пластины конечной ширины идеальной несжимаемой жидкостью // *Аэродинамика*. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988. Вып. 11 (14). С. 8–23.
11. *Копченов В.И., Крайко А.Н., Щипин С.К.* Автомодельная задача отрывного обтекания расширяющейся пластины идеальной жидкостью // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1988. № 5. С. 62–69.
12. *Копченов В.И., Крайко А.Н., Ломков К.Э.* Нестационарное отрывное обтекание идеальной несжимаемой жидкостью мгновенно ускоренной пластины конечной ширины // *Учен. зап. ЦАГИ*. 1997. Т. 28. № 1. С. 53–64.
13. *Гоман М.Г.* Дифференциальный метод продолжения решений систем конечных нелинейных уравнений, зависящих от параметра // *Учен. зап. ЦАГИ*. 1986. Т. 17. № 5. С. 94–102.
14. *Иосс Ж., Джозеф Д.* Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983. 300 с.
15. *Bryson A.E.* Symmetric vortex separation on circular cylinders and cones // *Trans. ASME. Ser. E.J. Appl. Mech.* 1959. V. 26. № 4. P. 643–648.
16. *Trigub V.N., Blokhin A.B., Simakin I.N.* The asymptotic study of dissipation and breakdown of a wing-tip vortex // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 274. P. 293–337.