

УДК (532.59, 533.95):534

© 1999 г. И.Б. Бахолдин

СТРУКТУРЫ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СКАЧКОВ В ОБРАТИМЫХ СИСТЕМАХ

Разработана общая теория структур скачков в обратимых симметричных системах. Установлено, что, как и в системах с диссипацией [1–3], тип структуры скачка зависит от числа пересечений дисперсионной кривой и прямой, соответствующей скорости скачка, а скачки, для которых существует структура, оказываются одновременно эволюционными. Теория применима в случаях, когда дисперсионные свойства среды преобладают над диссипативными.

Основные положения теории скачков в системах с диссипацией состоят в следующем [1]. Имеется некоторая полная система уравнений с диссипацией. Из нее можно вывести упрощенную систему уравнений без учета диссипативных членов. Эта упрощенная система нелинейная и относится к геперболическому типу, она не всегда имеет непрерывные решения, необходимо вводить скачки. Чтобы скачок был устойчив, необходимо выполнение условия, называемого условием эволюционности: число граничных условий на скачке должно на единицу превышать число характеристик, уходящих от скачка. Чтобы скачок мог существовать, необходимо наличие у полной системы стационарных непрерывных решений, описывающих скачкообразные переходы между однородными состояниями, так называемых структур разрыва. Исходную систему из n уравнений можно записать в консервативном виде и получить из ее интегрального вида n граничных условий на скачке (основные граничные условия). Для широкого класса систем показано [2, 3], что наличие структуры скачка означает и его эволюционность, т.е. все необходимые дополнительные граничные условия, если таковые требуются, могут быть получены из анализа структуры скачка.

Все перечисленные выше положения получают свое развитие в теории скачков для систем без диссипации, но с наличием дисперсии, которая ответственна за формирование структуры скачков. Эта теория имеет следующие существенные отличия:

1) под скачками понимаются скачки между любыми периодическими, квазипериодическими, стохастическими, а не только однородными состояниями, соответственно и структуры таких скачков оказываются более сложными [4];

2) под упрощенной системой уравнений может пониматься система усредненных уравнений для периодических или квазипериодических состояний, соответственно число характеристик в ней может быть большим, чем число неизвестных в полной системе [5];

3) структуры некоторых скачков перестают существовать, появляются новые типы скачков, которые не существуют в чисто диссипативных системах [6], например для наиболее распространенных скачков с числом граничных условий n (ударные волны в газовой динамике), в случае моделей без диссипации не существует структуры скачка, эти скачки обычно замещаются скачками между однородным и периодическим состоянием, в то же время в дисперсионных системах становятся возможны скачки типа кинков ($n + 1$ условие);

4) встречаются скачки с солитонной структурой, для них нельзя использовать законы сохранения при получении граничных условий [5];

5) в некоторых случаях из законов сохранения можно получить число независимых граничных условий большее, чем число исходных уравнений [6].

Областью применения теории скачков без диссипации могут быть любые физические модели, где дисперсионные свойства преобладают над диссипативными, например скачки на поверхности идеальной жидкости или скачки в плазме [7]. Традиционным является рассмотрение скачков в плазме как бездиссипативных. Особо следует выделить теорию скачков в

волновых моделях, которые с математической точки зрения можно охарактеризовать как модели типа нелинейной геометрической оптики [4–6]. В теории волновых скачков имеет смысл говорить только о бездиссипативных скачках, поскольку пока неизвестны физические эффекты, которые могли бы придать таким моделям свойство, которое можно было бы охарактеризовать как "волновая диссипация".

1. Скачки в бездиссипативных системах. Рассмотрим дисперсионный аналог скачка для уравнения

$$a_t + aa_x + b_3 a_{xxx} = 0$$

У него есть нестационарные решения колебательного типа, волновые зоны (ВЗ), стремящиеся к a_1 и a_2 при $x \rightarrow \pm \infty$. При $t \rightarrow +\infty$ на одной из границ ВЗ первая волна приближается к уединенной, далее идут волны с амплитудой, плавно уменьшающейся до нулевого значения. Протяженность ВЗ линейно растет со временем. Методом усреднения Уизема [8] для описания эволюции ВЗ выводится гиперболическая система с тремя неизвестными, имеющая автомодельные решения, зависящие от x/t [7]. Будем называть их автомодельной (расширяющейся) структурой бездиссипативного скачка (другое название – нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны [7] – связано с терминологией из физики плазмы). Если сравнивать эти решения с аналогичными решениями уравнения Бюргерса, то окажется, что эта автомодельная структура здесь замещает стационарную структуру скачка. Для уравнения Бюргерса скорость скачка $U = (a_1 + a_2) / 2$, а в данном случае скорость переднего фронта ВЗ равна $(2a_2 + a_1)/3$. В некоторых случаях, например для инженерных приложений, этой информации вполне достаточно, такой подход можно назвать макроскопическим. В данной работе под скачком понимается скачок амплитуды волны на границе ВЗ. Будем формально рассматривать уединенную волну на границе ВЗ как стационарную структуру бездиссипативного скачка. С одной стороны, от скачка решение можно описать системой усредненных уравнений для волновой зоны, а с другой – обычным упрощенным уравнением $a_t + aa_x = 0$.

В бездиссипативных моделях с усложненной нелинейностью встречаются скачки без ВЗ, которые, как и в случае скачков с диссипацией, можно строго рассматривать как разрывные решения упрощенной системы. Однако число уходящих характеристик у этих скачков другое. В моделях с усложненной дисперсией встречаются стационарные скачки несолитонного типа с ВЗ (скачки с излучаемыми волнами). В этом случае подход такой же, как в случае диссипативных моделей, но роль упрощенных уравнений играют для ВЗ уравнения, полученные в результате усреднения полной системы. Под структурами скачков здесь понимаются решения полной системы, стационарные в некоторой системе координат, выходящие при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$ на однородные, периодические или квазипериодические состояния.

Общим свойством бездиссипативных моделей является то, что они описываются симметричной, обратимой и консервативной системой уравнений. После однократного ее интегрирования получаем динамическую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую стационарные решения. Эту систему после введения дополнительных неизвестных можно представить как систему из уравнений $u_{qx} = F_q(\mathbf{u})$, инвариантных при преобразовании $x \rightarrow -x$, $u_q \rightarrow u_q$ при $q = 1, \dots, 2n - 1$ (симметричные неизвестные), $u_q \rightarrow -u_q$ при $q = 2, \dots, 2n$ (антисимметричные неизвестные). Такая процедура осуществима для всех физически осмысленных обратимых по времени систем и используется для доказательства существования уединенных и обобщенных уединенных волн методом центрального многообразия [9].

2. Структуры скачков. В результате однократного интегрирования уравнений исходной консервативной системы оказываются уже учтенными все граничные условия, получаемые из исходных законов сохранения для упрощенной системы (основные условия). Было установлено для моделей с диссипацией [2, 3], что при анализе структур скачков можно получить все необходимые для эволюционности дополнительные

граничные условия. В моделях без диссипации количество дополнительных условий может быть большим, поскольку помимо неизвестных исходной системы в расчет должны приниматься дополнительные неизвестные, определяющие амплитуды и длины излучаемых волн, т.е. каждая излучаемая волна порождает два дополнительных граничных условия. Если же у исходной системы имеются дополнительные законы сохранения помимо тех, которые были использованы при ее интегрировании, то они могут быть применены в качестве другого способа получения граничных условий. В этом случае, если известно, что скачок существует и этих законов достаточно количество, можно обойтись без анализа структуры разрыва [6].

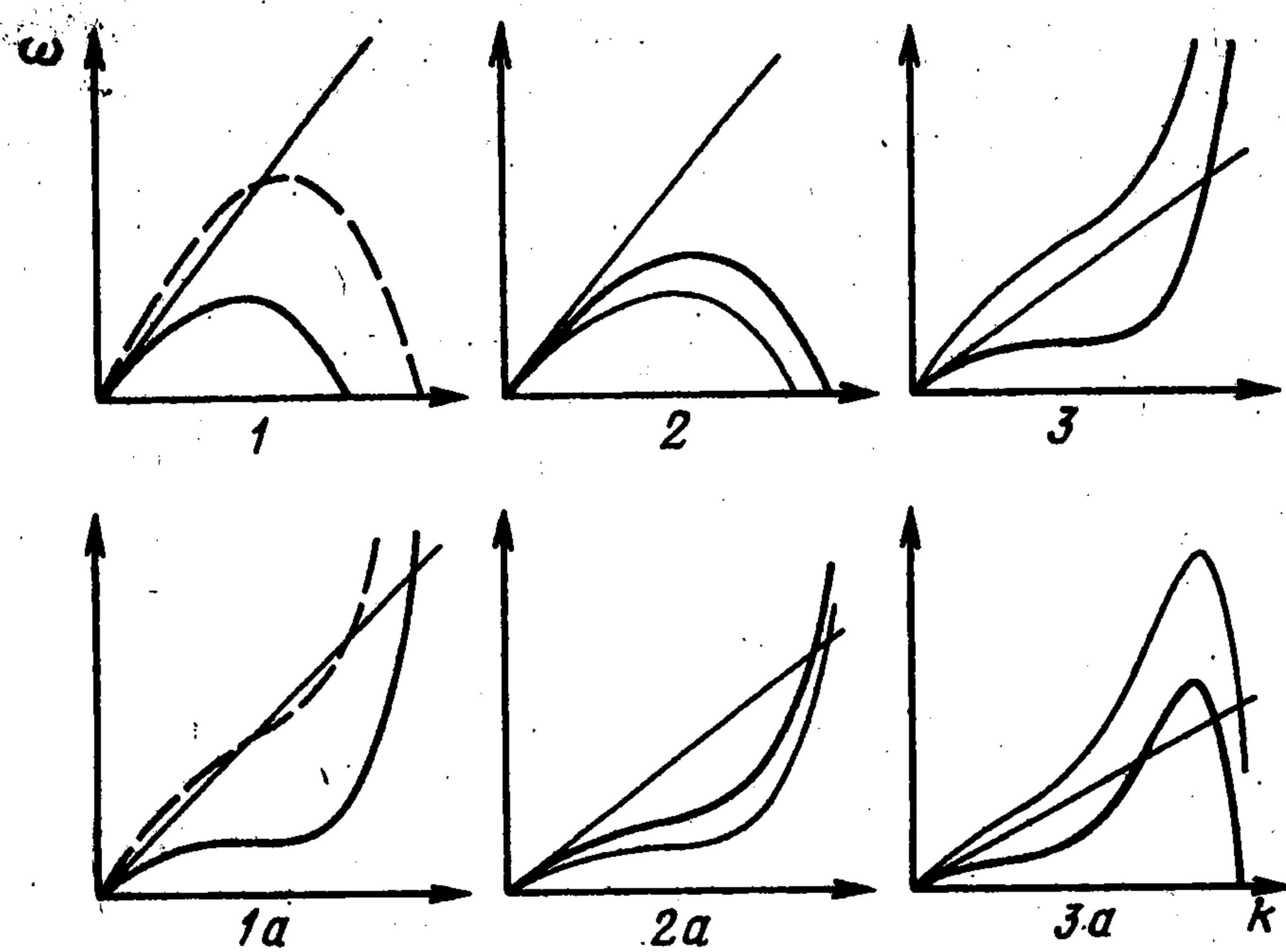
Излагаются два подхода к анализу возможности существования разрывов: геометрический и алгоритмический. Оба подхода дают идентичные результаты. Второй подход по существу представляет собой неформальное изложение идей первого посредством указания способа нахождения решения методом вариации начальных данных.

Геометрический подход основан на том, что если суммарная размерность двух подпространств совпадает с размерностью пространства, то в стандартном случае такие подпространства могут иметь одно, конечное или счетное число точек пересечения. А если в случае пересечения этих подпространств обязательно должен быть общий касательный вектор и суммарная их размерность на единицу больше размерности пространства, то стандартным положением является возможность наличия линии пересечения. Такая ситуация возникает, если оба подпространства являются подпространствами, образованными некоторыми множествами фазовых кривых динамической системы. Будем называть их фазовыми подпространствами. Введем обозначение для таких подпространств. Пусть рассматривается подпространство, образованное фазовыми траекториями $\{u(x), -\infty < x < +\infty\}$, проходящими через ε -окрестность точки C при $x = x_0$ и ограниченными или периодическими на $+\infty$. Будем ссылаться на такие подпространства по образцу $S(C, \varepsilon; |u| < M, x \rightarrow +\infty)$ или $S(C, \varepsilon; u(x+T) \rightarrow u(x), x \rightarrow +\infty)$. Величина x_0 не играет роли в силу того, что решение определено с точностью до сдвига по фазе.

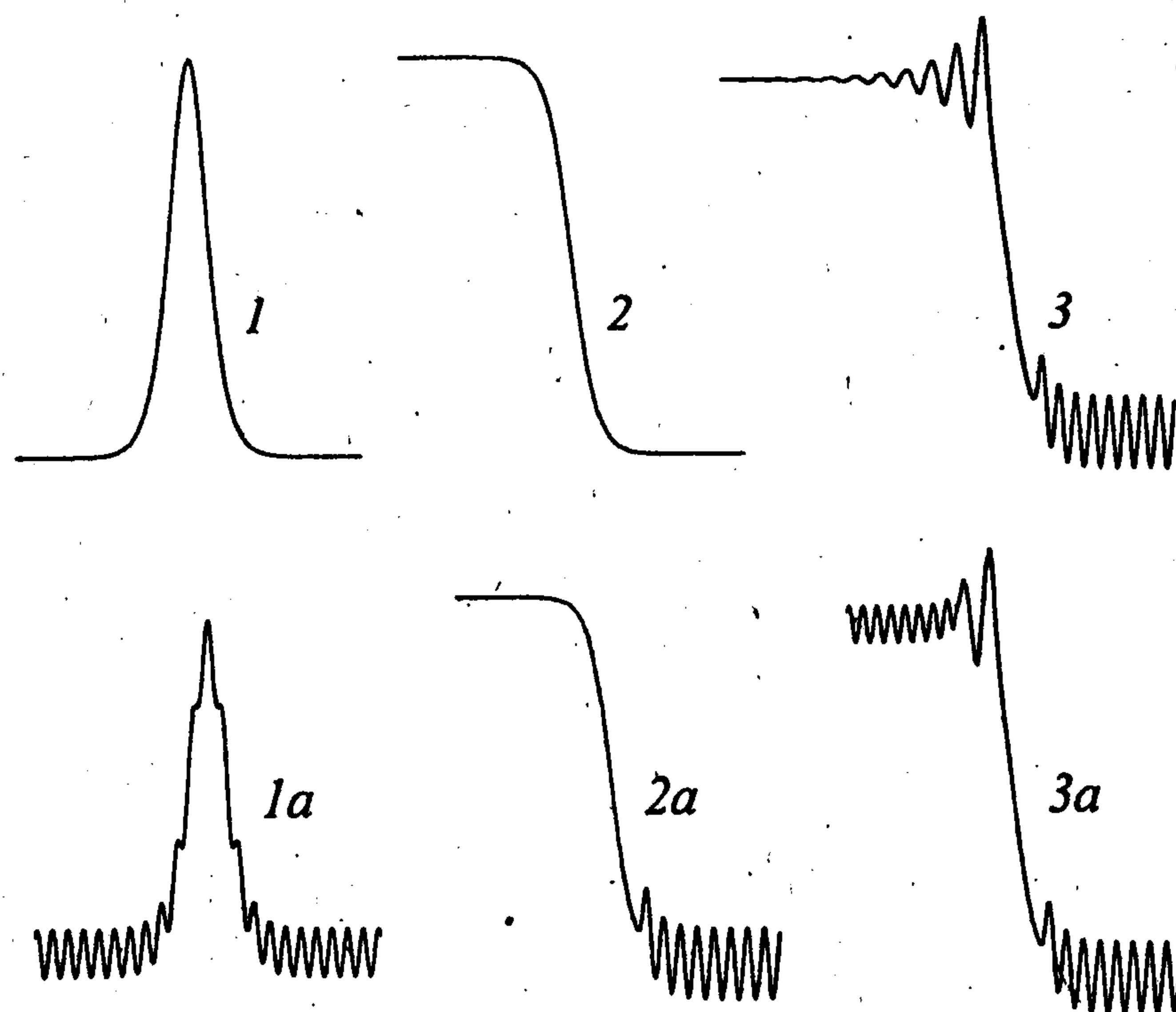
В алгоритмическом подходе анализируется соответствие числа свободных параметров начальных данных числу наложенных связей в постановке задачи на поиск стационарных решений. Если число свободных параметров в начальной точке фазового пространства (состояние с одной стороны от скачка) совпадает с числом наложенных связей в конечной точке (состояние с другой стороны от скачка), то такая задача может иметь решение и ее постановку можно назвать корректной в том смысле, что может существовать одно решение или же конечное или счетное число таких решений. Заметим, что для симметричных солитоноподобных структур способ поиска решений несколько иной, он описан ниже.

Рассмотрим для линеаризованных около однородных состояний вариантов этих систем дисперсионную кривую (ДК) $\omega = \omega(k)$ (предполагается, что это соотношение получено подстановкой $\sim \exp[i(kx - \omega t)]$) и уравнение для длин волн стационарных решений $R(U, k) = 0$ (U – скорость скачка). Имеется $2n$ корней уравнения $R(U, k) = 0$, причем $k_{2m-1} = -k_{2m}, m = 1, \dots, n$. Решение линеаризованной динамической системы зависит от $2n$ параметров c_j и записывается в виде $\text{Re}(\sum_{j=1}^{2n} c_j \exp ik_j x)$. Со значениями $\text{Im}(k_j) > 0$ связаны волны, растущие при $x \rightarrow -\infty$, со значениями $\text{Im}(k_j) < 0$ – волны, растущие при $x \rightarrow +\infty$, с действительными значениями k_j – чисто периодические волны. В дальнейшем предполагается, что данные качественные свойства сохраняются и у нелинейных вариантов систем с тем отличием, что возрастающие волны могут оказаться возрастающими только в окрестности точки равновесия и ограниченными при удалении от нее.

Пусть скачок движется с некоторой скоростью U . Проведем на плоскости (ω, k) прямую $U = \omega/k$, соответствующую скорости этого скачка. Для анализа корректности важно знать, сколько раз эта прямая пересекает ДК. В дальнейшем при подсчете



Фиг. 1



Фиг. 2

числа пересечений пересечение в начале координат учитываться не будет, поскольку ему соответствует кратное $k = 0$, учтенное в качестве постоянной интегрирования исходной системы. Кроме того, в силу симметрии ДК будет вестись только учет пересечений при $k > 0$. Каждое пересечение дает два действительных корня уравнения $R(U, k) = 0$ с противоположными знаками. По разные стороны от скачка ДК различна, соответственно различным может быть и число пересечений. На фиг. 1 схематично показаны различные типичные варианты расположения этой прямой и ДК по разные стороны от скачка для состояний 1 и 2 (кривая для состояния 2 выделена жирной линией) в случае, когда фазовая скорость близка к характеристической скорости упрощенной системы уравнений. Касательной к ДК в точке $k = 0$ соответствует некоторая характеристическая скорость, будем называть характеристики с таким свойством основными характеристиками. Для простоты показан случай, когда ДК имеет только одну ветвь, однако сделанные ниже выводы справедливы и для случаев, когда ветвей несколько. На фиг. 2 схематично показаны графики соответствующих стационарных решений для неизвестных симметричного типа.

Ниже анализируются все возможные структуры скачков и показывается, что при наличии структуры скачка обеспечивается и его эволюционность. Анализ структур

скачков и их эволюционности проводится по индукции: от наиболее простых с минимальным числом излучаемых волн к более сложным с последующим добавлением дополнительных волн. Основная идея состоит в следующем: Является ли рассматриваемая основная характеристика приходящей или уходящей, зависит от того, расположена прямая $U = \omega/k$ выше или ниже той ветви в окрестности начала координат (первый фактор). В тоже время от этого зависит и число пересечений этой прямой с ДК. От числа пересечений зависят число дополнительных граничных условий, которые выявляются при анализе структуры (второй фактор), и число дополнительных уходящих характеристик, связанных с излучаемыми волнами (третий фактор). В результате подведения баланса между этими тремя факторами выясняется, что условие эволюционности выполнено.

1°. *Уединенная волна.* Пусть прямая не пересекает ДК. Тогда для рассматриваемой точки равновесия C_1 нет действительных корней. Имеется n корней с $\text{Im}(k) < 0$ (возрастающие с ростом x волны) и n корней с $\text{Im}(k) > 0$ (убывающие волны). Рассмотрим подпространства $S_1 = S(C_1, \varepsilon; u \rightarrow C_1, x \rightarrow -\infty)$, и $S_2 = \{u, u_{2i} = 0\}$, размерность каждого равна n . Поскольку их суммарная размерность равна $2n$, в общем случае возможно одно пересечение или конечное или счетное число пересечений. В силу симметрии уравнений каждому такому пересечению соответствует уединенная волна, точка пересечения соответствует горбу уединенной волны.

Алгоритмический подход. Если требуется найти решение с константой на $-\infty$, то из множества допустимых начальных данных должны быть исключены данные, порождающие волны, соответствующие $\text{Im}(k_j) > 0$. Имеем n параметров вариации начальных данных. Из них нужно исключить один несущественный параметр, определяющий сдвиг решения по фазе. В результате имеем $n - 1$ параметров вариации. Пусть динамическая система такова, что при постановке начальных данных в окрестности точки равновесия найдется значение x_{S2} такое, что одно из антисимметричных неизвестных ($u_i \rightarrow -u_i, x \rightarrow -x$) равно нулю. А это имеет место, если у динамической системы второго порядка, а также у динамической системы четвертого порядка с малыми величинами коэффициентов при дополнительных членах, имеется вторая точка равновесия для которой имеются действительные значения k . Или, что то же самое, если прямая, соответствующая этой точке равновесия, пересекает ДК. Тогда $n - 1$ параметров вариации начальных данных достаточно, чтобы приравнять к нулю оставшиеся $n - 1$ антисимметричных неизвестных. В силу симметрии системы в области $x > x_{S2}$ будем иметь симметрию с решением при $x < x_{S2}$ и соответственно стремление решения к первой точке равновесия при $x \rightarrow +\infty$, а значит и решение типа уединенной волны.

В данном анализе рассматривалась ДК только для одной стороны от скачка. На границе ВЗ находится уединенная волна, т.е. существенно нелинейное образование, поэтому формально для второй стороны нельзя использовать ДК, получаемую линеаризацией исходных уравнений. Условно можно относить ДК для другой стороны от скачка ко второй точке равновесия (на фиг. 1 показана штриховой линией). При таком грубом описании без учета наличия ВЗ скачок окажется эволюционным. Как видно из фиг. 1, вариант 1, прямая, соответствующая фазовой скорости для разных сторон от скачка, находится по разные стороны от дисперсионной кривой. Это означает, что соответствующая характеристика по разные стороны от скачка является приходящей, и для случая упрощенного уравнения с одним неизвестным достаточно иметь одно граничное условие, например $U = c + U(\Delta u)$, где c — характеристическая скорость для состояния 1, Δu — амплитуда скачка.

При более детальном анализе, обобщая результаты для уравнения Шрёдингера [5], эволюционность этих скачков можно интерпретировать следующим образом. Имеем p характеристик по одну сторону от скачка, пусть это сторона 1, и $p + 2$ — по другую, пусть это сторона 2. При этом у первых p характеристик со стороны 2 характеристические скорости те же, что и со стороны 1. Две последние по счету характеристики со стороны 2 параллельны линии разрыва. При этом одну из них следует считать

приходящей из волновой зоны, а другую, образующую веер характеристик центрированной простой волны для усредненной системы, следует считать уходящей. Имеем p очевидных условий, выражающих тот факт, что по обе стороны от уединенной волны все параметры одинаковы (в работе [5] эти условия представлены в виде законов сохранения). Можно вместо этих условий использовать p условий сохранения инвариантов Римана, если таковые имеются. Поскольку эти p условий уже учтены при однократном интегрировании системы уравнений, описывающей стационарные решения, то по аналогии с теорией диссипативных скачков их можно назвать основными условиями. Кроме того, для эволюционности требуется два дополнительных условия, которые определяются при исследовании структуры разрыва. Это значения амплитуды (амплитуда уединенной волны) и длины волны (для последовательности уединенных волн длина волны стремится к бесконечности) в области 2.

Замечание. Указанный выше критерий существования уединенной волны справедлив и для так называемого 1:1 солитона (солитон огибающей, скорость которого совпадает с фазовой скоростью волн). Он может существовать в системах четвертого порядка при наличии точки равновесия типа обобщенного фокуса (четыре комплексных значения $k_{1,2,3,4} = \pm k \pm i\lambda$) и представляет собой две резонансно взаимодействующие волны с одинаковым пространственным периодом. Наличие второй точки равновесия здесь не требуется. При этом одна волна растет при $x \rightarrow +\infty$, а другая убывает. В результате обмена энергией между волнами и возникает решение типа уединенной волны огибающей, которое имеет порядок $\exp(\lambda x)\sin(kx)$ при $x \rightarrow -\infty$ и $\exp(-\lambda x)\sin(kx)$ при $x \rightarrow +\infty$. В системах более высокого порядка возможны многоволновые аналоги. Помимо 1:1 солитона для обобщенных уравнений Кортевега–де Вриза (см. ниже, (3.5)) и Шрёдингера имеется счетное число серий уединенных волн более сложного вида.

2°. Скачок без излучаемых волн (чистый скачок), но с дополнительным условием (кинк). Пусть имеются две точки равновесия C_1 и C_2 , для которых соответствующие прямые не пересекают ДК. Действительных корней нет. Для обеих точек равновесия имеется n значений k с $\text{Im}(k) > 0$ и n значений k с $\text{Im}(k) < 0$. Рассмотрим подпространства $S_1 = S(C_1, \varepsilon_1; \mathbf{u} \rightarrow C_1, x \rightarrow -\infty)$ и $S_2 = S(C_2, \varepsilon_2; \mathbf{u} \rightarrow C_2, x \rightarrow +\infty)$. Размерность обоих подпространств равна n . Однако расположены они относительно друг друга специальным образом. Если между ними есть точка пересечения, это означает в силу того, что это пространства фазовых кривых одной и той же динамической системы, что в этой точке есть общая касательная (фазовые подпространства), а значит и линия пересечения, которой соответствует решение типа кинка. В таком случае, если суммарная размерность подпространств совпадает с размерностью всего пространства, то стандартным положением является положение, когда пересечений между ними нет. Но пересечение может существовать в специальном случае, т.е. при наложении дополнительного условия на коэффициенты динамической системы.

Алгоритмический подход. Для обеих точек равновесия имеется n возрастающих волн. Пусть фазовые кривые, исходящие из окрестности начальной точки равновесия, проходят вблизи конечной точки равновесия. Для уравнения Кортевега–де Вриза с кубической нелинейностью и его аналога с производной пятого порядка это имеет место, если между этими точками имеется третья устойчивая точка равновесия и фазовый портрет близок к симметричному. Тогда $n - 1$ параметров вариации в окрестности начальной точки равновесия недостаточно, чтобы приравнять к нулю амплитуду n возрастающих волн в окрестности второй точки равновесия. Требуется еще один параметр вариации. Таким параметром может быть вариация коэффициентов динамической системы, что ведет к появлению дополнительного условия на скачке.

Поскольку прямая, соответствующая фазовой скорости, для обеих сторон от скачка расположена по одну сторону от дисперсионной кривой, то с одной стороны от скачка соответствующая характеристика приходящая, а с другой – уходящая, а потому требуется дополнительное граничное условие.

Замечание 1. Данный тип скачка может существовать также в диссипативных системах, поскольку слабая диссипация не оказывает влияния на знак мнимой части величины k в точках неустойчивого равновесия, а также слабо влияет на характер фазового портрета.

Замечание 2. Решения этого типа существуют и для случая, когда упрощенная система не относится к гиперболическому типу [6] (система с комплексными характеристическими значениями), под отсутствием пересечения в этом случае следует понимать отсутствие действительных корней при $\omega = 0$. Численные эксперименты показали наличие скачков такого типа для обобщенного уравнения Шрёдингера для случая, когда с одной из сторон от скачка неустойчивое однородное состояние (негиперболичность), а с другой – устойчивое.

Минимальный порядок динамической системы, при котором встречаются описанные выше решения, – второй порядок. Далее рассматриваются решения для которых минимальный порядок четвертый.

3°. *Скачок с излучением.* Пусть имеются две точки равновесия. Для одной из них (C_1) прямая $\omega = kU$ не пересекает дисперсионную кривую, а для другой (C_2) пересекает ее один раз. В точке равновесия C_1 имеется n возрастающих волн, а в точке C_2 – $n - 1$ возрастающая волна. Рассмотрим подпространства $S_1 = S(C_1, \varepsilon; \mathbf{u} \rightarrow C_1, x \rightarrow -\infty)$ и $S_2 = S(C_2, \varepsilon; \mathbf{u}(x + T) \rightarrow \mathbf{u}(x), x \rightarrow +\infty)$. Это фазовые подпространства размерности n и $n + 1$ соответственно. Суммарная их размерность $2n + 1$. В этом случае наличие одного, нескольких или счетного числа линий пересечения является стандартным положением. Линии пересечения соответствует скачок с излучением.

Алгоритмический подход. Пусть имеется множество начальных данных вблизи первой точки равновесия, для которых фазовая кривая проходит в окрестности второй точки равновесия. Тогда $n - 1$ параметров вариации вблизи начальной точки равновесия (сдвиг решения по фазе несущественен) достаточно, чтобы приравнять к нулю амплитуду у $n - 1$ возрастающей волны в окрестности конечной точки и получить искомое решение. В ходе решения задачи определяются два дополнительных условия на скачке: значением амплитуды излучаемой волны и ее длина.

Поскольку в окрестности начала координат с одной стороны от скачка дисперсионная кривая лежит ниже прямой $\omega = Uk$, а с другой выше, то, как и в случае скачков обычного типа в диссипативных системах, число основных уходящих характеристик на единицу меньше числа основных входящих характеристик. Скачок эволюционен, поскольку двум дополнительным граничным условиям соответствуют две дополнительные уходящие характеристики, связанные с излучаемой волной.

Замечание. Численные решения задачи о распаде начального разрыва для обобщенных уравнений Кортевега–де Вриза и Шрёдингера показывают, что для динамических систем четвертого порядка такой скачок возникает, если в точке C_1 все значения k комплексны. Это можно объяснить, сопоставив фазовые портреты для модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза с пятой производной в сечении фазового пространства $(a, a_x), a_{xx} = 0, a_{xxx} = 0$ при $x = 0$ для данного случая и случая, когда все значения k мнимые. В случае комплексных значений k фазовые кривые, выходящие из точки C_1 , имеют спиралевидный характер и охватывают все пространство вокруг этой точки. В случае мнимых значений k образуются обобщенные сепаратрисы, и точка C_2 оказывается как бы в "мешке". Фазовые кривые не могут подойти к этой точке и потому решение типа скачка с излучением становится невозможным.

Были рассмотрены решения 1, 2, 3, которые в контексте данного анализа можно назвать первичными. Далее идут решения, которые можно охарактеризовать как вторичные, т.е. полученные наложением дополнительной волны.

1°а. *Уединенная волна с наложенной периодической волной (обобщенная уединенная волна).* Пусть прямая, соответствующая точке равновесия C_1 , один раз пересекает дисперсионную кривую. Имеется $n - 1$ значений k с $\text{Im}(k) < 0$ и $n - 1$ значений с $\text{Im}(k) > 0$. Рассмотрим подпространство $S_1 = S(C_1, \varepsilon; \mathbf{u}(x + T) \rightarrow \mathbf{u}(x), x \rightarrow -\infty)$ и подпространство $S_2 = \{\mathbf{u}, u_{2i} = 0\}$. Их размерности $n + 1$ и n соответственно. Суммарная размерность $2n + 1$, т.е. на единицу больше размерности пространства. Наличие

конечного или счетного числа однопараметрических семейств пересечений между подпространствами является стандартным положением. Каждой точке пересечения соответствует кривая фазового пространства, описывающая уединенную волну с наложенной периодической волной.

Алгоритмический подход. Как и раньше, число параметров вариации по начальным данным равно $n - 1$. Здесь имеется $n - 1$ значений k с положительной мнимой частью, но в отличие от предыдущего случая существенным параметром является сдвиг по фазе возрастающих волн относительно периодической составляющей. Решения содержат один свободный (неопределенный) параметр — амплитуду наложенной волны. Можно однако корректно поставить задачу на поиск решения с минимальной амплитудой наложенной волны.

Численные эксперименты для модифицированного уравнения Шрёдингера и для модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза показывают, что квазистационарное решение типа уединенной волны с наложенной периодической волной возникает в случае начального скачка малой амплитуды. Проанализировать эволюционность в рамках простых гиперболических систем невозможно, поскольку происходит сложный нелокальный процесс обмена энергией между длинными и короткими волнами. По индукции для систем с порядком выше четвертого могут существовать решения типа уединенной волны с наложенными волнами числом m , если прямая m раз пересекает ДК. Эти решения содержат m свободных параметров. Задача на поиск чистой уединенной волны при этих условиях некорректна, поскольку требование отсутствия периодической составляющей снижает число параметров вариации. Однако в специальных случаях, когда система разбивается на блоки, уединенная волна все же возможна.

2°а, 3°а. *Кинк с излучением и скачок с двумя излучаемыми волнами.* Осуществим теперь наложение волны на несимметричные решения типа 2 и 3. Пусть имеется по одному пересечению с обеих сторон от скачка (порядок системы выше второго) или же с одной стороны одно пересечение, а с другой два (порядок системы выше четвертого). Тогда возможны решения типа скачка с дополнительным условием и наложенной волной и скачка с излучением и наложенной волной. Решения содержат два неопределенных параметра: амплитуду и сдвиг по фазе наложенной волны относительно скачка (подразумевается, что в первом случае сохраняется дополнительное условие, иначе только один неопределенный параметр). Имеем фазовые подпространства $S_1 = S(C_1, \varepsilon_1; u(x+T) \rightarrow u(x), x \rightarrow -\infty)$ и $S_2 = S(C_2, \varepsilon_2; u(x+T) \rightarrow u(x), x \rightarrow +\infty)$ (2а) или же $S_2 = S(C_2, \varepsilon_2; |u(x)| < M, x \rightarrow +\infty)$ (3а). Они имеют размерности $n + 1, n + 1$ или $n + 1, n + 2$ соответственно, суммарная размерность $2n + 2$ или $2n + 3$.

Наличие двух новых свободных параметров позволяет корректно поставить задачу на поиск решения, в котором наложенная волна имеется только с одной стороны. При этом ее фаза, амплитуда, а следовательно, и длина волны будут вполне определены. В первом случае имеем фазовые подпространства $S_1 = S(C_1, \varepsilon_1; u \rightarrow C_1, x \rightarrow -\infty)$ и $S_2 = S(C_2, \varepsilon_2; u(x+T) \rightarrow u(x), x \rightarrow +\infty)$. Размерности подпространств $n - 1$ и $n + 1$; суммарная размерность $2n$. Во втором случае имеем подпространства $S_1 = S(C_1, \varepsilon_1; u \rightarrow C_1, x \rightarrow -\infty)$ и $S_2 = S(C_2, \varepsilon_2; |u(x)| < M, x \rightarrow +\infty)$ размерности $n - 1$ и $n + 2$, или же $S_1 = S(C_1, \varepsilon_1; u(x+T) \rightarrow u(x), x \rightarrow -\infty)$ и $S_2 = S(C_2, \varepsilon_2; u(x+T) \rightarrow u(x), x \rightarrow +\infty)$ размерности $n + 1$ и n . Суммарная размерность $2n + 1$. Таким образом, имеем структуры эволюционных скачков, в которых имеется три и четыре дополнительных условия соответственно.

По индукции для систем более высокого порядка аналогичным способом можно также осуществить наложение m волн. Если с обеих сторон от скачка прямая m раз пересекает дисперсионную кривую, то возможны структуры эволюционных скачков с m излучаемыми волнами (каждая только с одной стороны) и $2m + 1$ дополнительными условиями. Если с одной из сторон имеется m пересечений, а с другой — $m + 1$, то возможна структура эволюционных скачков с $2m + 2$ дополнительными условиями и m

излучаемыми волнами. Под излучаемыми волнами с правой стороны от скачка (в области $x > x_0$) подразумеваются волны, для которых $c_g = d\omega/dk > U$, а с левой ($x < x_0$) — $c_g < U$. В противном случае волна с той или иной стороны от скачка называется поглощаемой. Здесь предполагается, что характеристические скорости, порожденные излучаемой волной, можно представить в виде $c = c_g + f(a)$, как это имеет например место для слабонелинейных волн, описываемых нелинейным уравнением Шрёдингера. Если амплитуда волны невелика, то $\text{sign}(c_g - U) = \text{sign}(c - U)$. По этой причине из рассмотрения на эволюционность исключены случаи касания дисперсионной кривой, при этом $U = c_g$. Случай, когда излучаемая волна порождает одну уходящую и одну входящую характеристику, не встречался в численных расчетах и здесь не рассматривается. По-видимому, это ведет к неэволюционности скачка и замене его нестационарным решением или скачком солитонного типа. Таким образом, волны предполагаются слабонелинейными, хотя численные эксперименты показывают, что сделанные выводы справедливы для волн конечной амплитуды.

Наиболее общая формулировка условия существования структуры скачка. Пусть со стороны 1 имеется n_{1il} излучаемых волн и n_{1ab} поглощаемых, а со стороны 2 — n_{2il} и n_{2ab} соответственно. Общее число пересечений с дисперсионными кривыми по обе стороны от скачка равно $n_{ab} + n_{il}$. Тогда для того чтобы могла существовать эволюционная стационарная структура с только излучаемыми волнами, необходимо выполнение условия

$$(-n_{1ab} + n_{1il}) + (-n_{2ab} + n_{2il}) + n_h/2 = 0 \quad (2.1)$$

где n_h — разность между числом уходящих и входящих характеристик без учета характеристик излучаемых волн (с каждой излучаемой волной связаны две уходящие характеристики). Общее число дополнительных граничных условий на скачке, $n_h/2 + 2n_{1il} + 2n_{2il} + 1$. Простейшим из нестандартных случаев пересечения ДК является случай, когда с одной стороны от скачка на ДК имеется участок, пересекаемый 2 раза, а с другой стороны этот участок не пересекается совсем. В этом случае одна из соответствующих этим пересечениям волн излучаемая, а другая поглощаемая. В силу соотношения (2.1) может существовать эволюционная структура аналогов рассмотренных выше эволюционных скачков типа кинка ($n_h = 0$) и обычного скачка ($n_h = -2$). Обобщения на случаи, когда таких участков несколько, очевидны. Фактически случай скачков, скорость которых близка к характеристической скорости $c = d\omega/dk(0)$ (скачки малой амплитуды), исследован полностью. Добавляя к решениям из пп. 2°, 3° излучаемую волну с одной стороны от скачка и поглощаемую с другой, или же излучаемую и поглощаемую волну с одной стороны от скачка, можно исследовать на эволюционность все возможные типы скачков с несолитонной структурой.

3. Численная проверка теории. С использованием свойств симметрии уравнений был разработан эффективный численный метод для проверки гипотез существования скачков посредством численного решения задачи о распаде разрыва. Основная идея метода заключается в следующем. При использовании численных схем с центральными разностями в случае, когда временной шаг Δt много меньше пространственного Δx , численное решение можно интерпретировать как решение некоторой новой системы, в которую включены члены с производными высокого порядка с коэффициентами пропорциональными Δx^2 . Важно, чтобы эта новая система принадлежала к рассмотренному выше классу консервативных симметричных систем. Для этого необходимо применять консервативные численные схемы. Это дает возможность прогнозировать возможные схемные эффекты и добиться высокой степени достоверности качественных свойств численных решений [6].

В качестве иллюстраций, относящихся к КдВ-подобным моделям, приведем следующие уравнения:

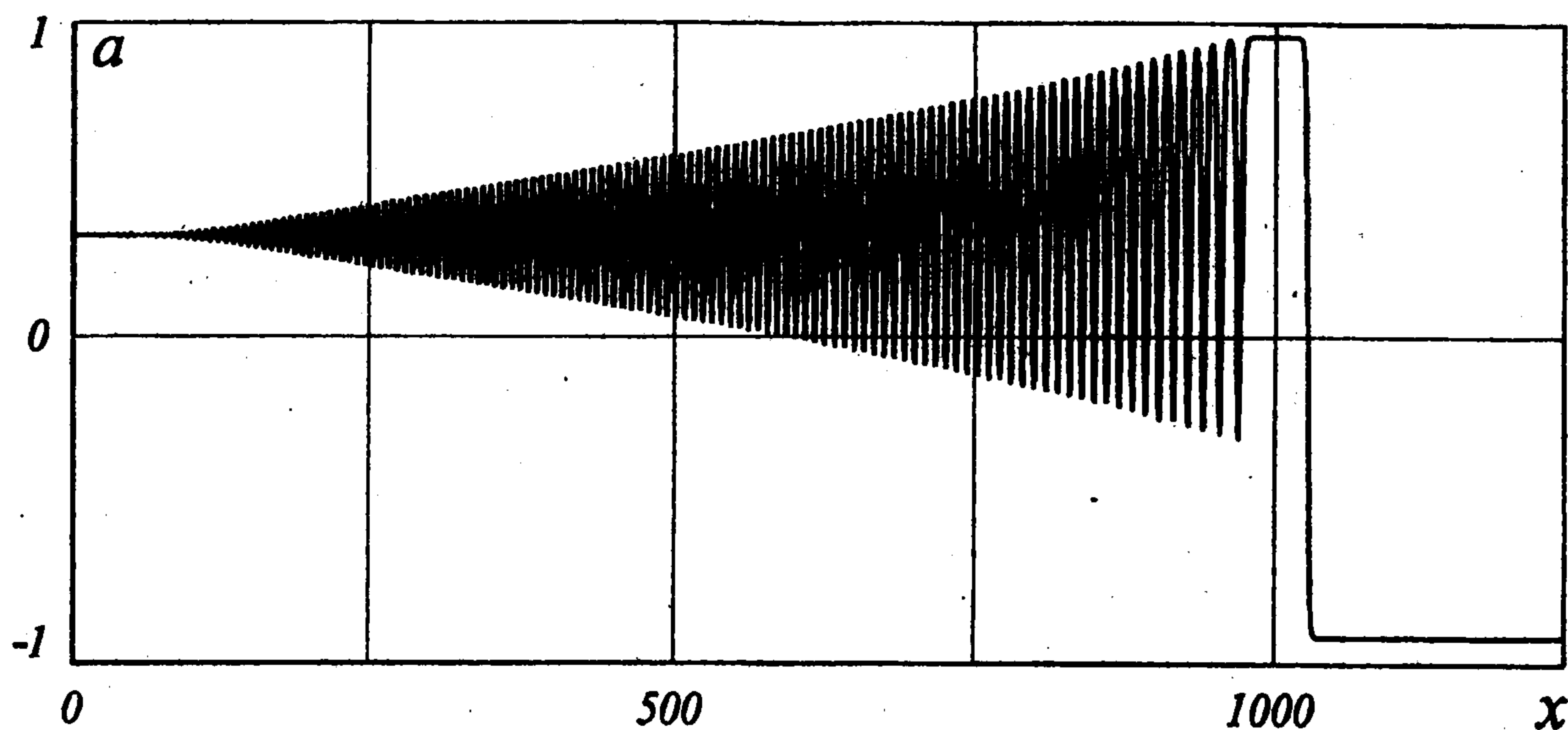
$$a_t - (a^3)_x + b_3 a_{xxx} = 0, \{q_i\} = (a, a_x) \quad (3.1)$$

$$a_t + aa_x + b_3 a_{xxx} + b_5 a_{xxxxx} = 0, \{q_i\} = (a, a_x, a_{xx}, a_{xxx}) \quad (3.2)$$

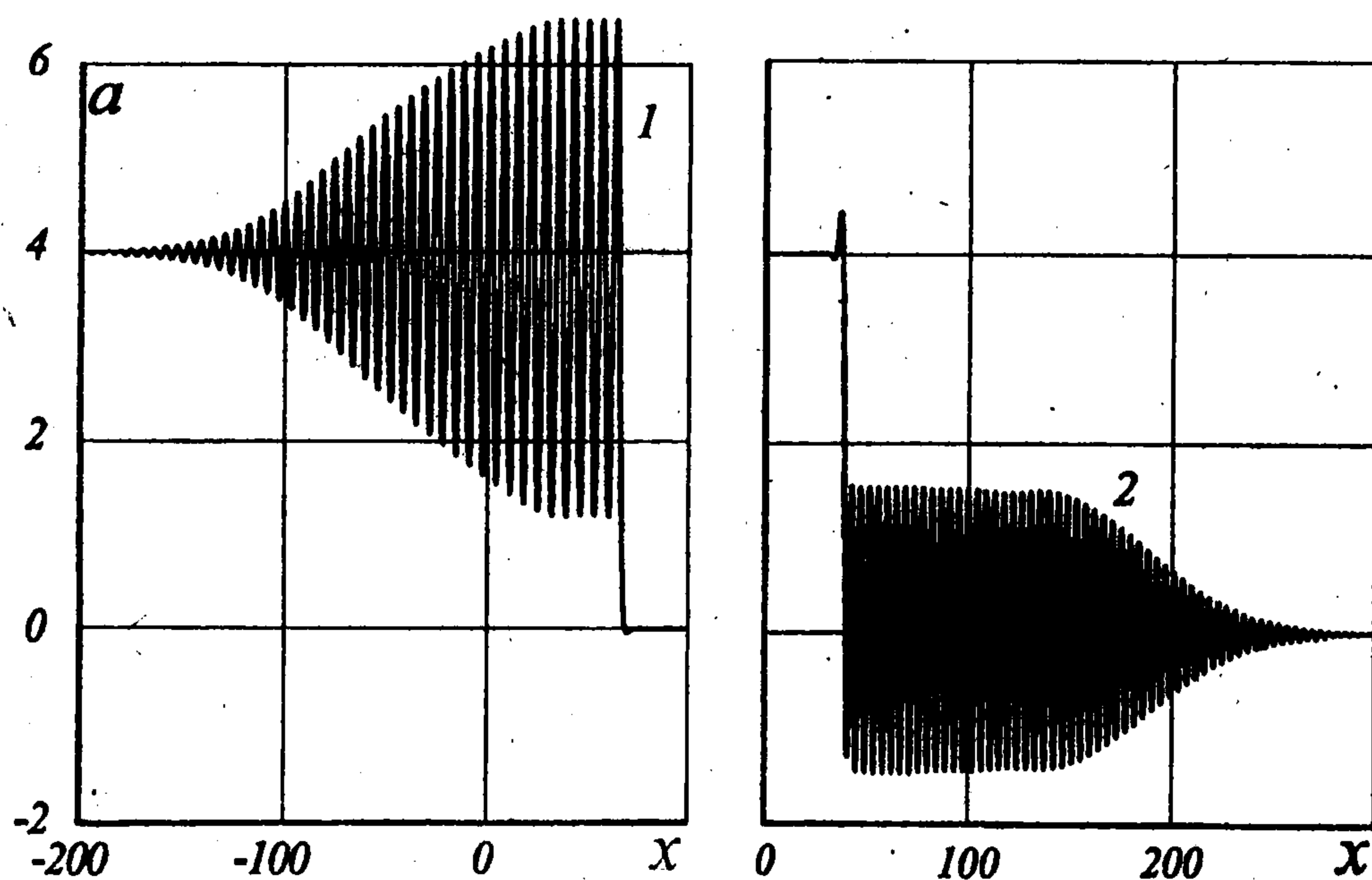
$$a_t - (a^3)_x + b_3 a_{xxx} + b_5 a_{xxxxx} = 0, \{q_i\} = (a, a_x, a_{xx}, a_{xxx}) \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) было специально сконструировано для проверки теории, уравнения (3.3) и (3.2) применяются для описания явлений в плазме и для описания волн на воде с ледовым или иным упругим покрытием.

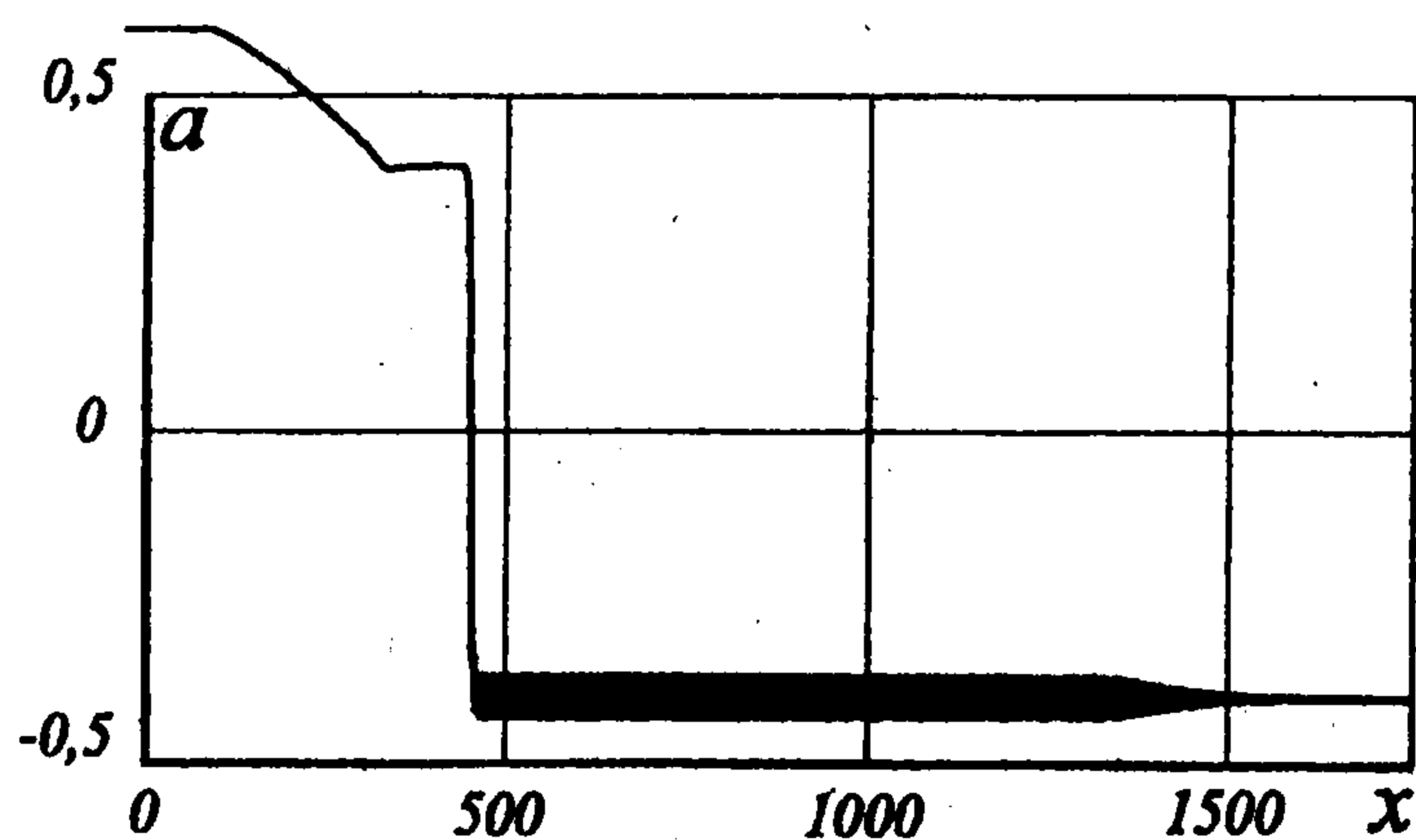
На фиг. 3 показан график решения уравнения (3.1) со скачком со структурой типа уединенной волны и со скачком без излучения (кинком); $b_3 = 1$. На фиг. 4 показаны графики решений со скачком с излучаемой волной для уравнения (3.2); $b_3 = 1, b_5 = -4$ (кривая 1), $b_3 = 1, b_5 = 4$ (кривая 2). На фиг. 5 показан график решения уравнения (3.3) типа кинка с излучением (см. п. 3^оа предыдущего раздела); $b_3 = 1, b_5 = 1$.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Расчеты показали справедливость теории также при наличии у ДК нескольких ветвей. Были проведены исследования для волн, огибающая которых описывается обобщенным уравнением Шрёдингера с производной третьего порядка [4, 6] (выявлены скачки со структурой типа уединенной волны, скачки с излучаемой волной, чистые скачки без излучения), и для холодной плазмы с дисперсией высокого порядка¹. Во всех этих моделях есть один дополнительный закон сохранения.

Автор благодарит А.Г. Куликовского и А.А. Бармина за замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00991).

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Моск. лицей, 1998. 412 с.
2. Куликовский А.Г. О поверхностях разрыва, разделяющих идеальные среды с различными свойствами. Волны рекомбинации в магнитной гидродинамике // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 6. С. 1125–1131.
3. Куликовский А.Г. Сильные разрывы в течениях сплошных сред и их структура // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1988. Т. 182. С. 261–291.
4. Бахолдин И.Б. Волновые скачки в средах, описываемых модифицированным уравнением Шрёдингера // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 4. С. 111–124.
5. Бахолдин И.Б. Трехволновой резонанс и усредненные уравнения взаимодействия двух волн в средах, описываемых кубическим уравнением Шрёдингера // Изв. РАН МЖГ. 1992. № 1. С. 107–116.
6. Бахолдин И.Б. Волновые скачки, описываемые модифицированным уравнением Шрёдингера // Журн. выч. матем. и математич. физики. 1998. Т. 38. № 8. С. 1331–1350.
7. Гуревич А.В., Питаевский Л.П. Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. № 2. С. 590–604.
8. Узем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
9. Bakholdin I., Il'ichev A. Radiation and modulational instability described by the fifth-order Korteweg-de Vries equation // Contemp. Math. 1996. V. 200. P. 1–15.

Москва
e-mail: bakh@spp.Keldysh.ru

Поступила в редакцию
24.IV.1998

¹Бахолдин И.Б. Моделирование нестационарной эволюции уединенных волн: Препринт N. 61. М.: Ин-т прикл. математики им. М.В. Келдыша РАН. Исследована задача об эволюции начальных данных типа уединенной волны, однако в настоящее время получены также скачки со структурой типа уединенной волны и скачки с излучением. 1997. 28 с.