УДК 532.59:534.1

© 1999 г. Д.Б. Рохлин

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ЗАХВАЧЕННЫХ ГРАНИЦЕЙ ПРИЛИВНЫХ ВОЛН КЕЛЬВИНА ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРА ЛАМБА

Рассматриваются приливные уравнения Лапласа, и при больших значениях параметра Ламба, пропорционального квадрату угловой скорости вращения бассейна, строится асимптотика собственных значений, соответствующих собственным функциям (волнам Кельвина), сосредоточенным в окрестности замкнутой компоненты границы. В случае плоского односвязного бассейна постоянной глубины полученные формулы определяют асимптотику k-го собственного значения.

1. Приливные уравнения Лапласа. Пусть X – ограниченная гладкая ориентированная поверхность с краем, $C^\infty(X)$, $\Lambda_1(X)$ – множества гладких комплекснозначных функций и ковекторных полей на X. Положим

$$\langle U,V\rangle = g^{ij}U_i\overline{V}_j,\quad (*U)_i = \varepsilon_{ij}(\det g)^{1/2}g^{jk}U_k$$

$$\operatorname{div}U = (\det g)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x_i}((\det g)^{1/2}g^{ij}U_j),\quad U,V\in\Lambda_1(X)$$

Здесь g^{ij} – контравариантные компоненты метрического тензора поверхности, $\det g$ – определитель матрицы $\{g_{ij}\}$ (обратной к $\{g^{ij}\}$), $\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}=0$, $\varepsilon_{12}=-\varepsilon_{21}=1$. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Пусть пространство $\mathbb{R}^3$ жестко связано с вращающейся поверхностью X, $(0, 0, \Omega)$ – вектор угловой скорости вращения, n – поле нормалей к поверхности X, согласованное с ее ориентацией. Последнее означает, что векторы (r_{x^1}, r_{x^2}, n), где $r = r(x^1, x^2)$ – параметризация поверхности, образуют правую тройку.

Рассмотрим частицу единичной массы, движущуюся по поверхности X с мгновенной скоростью, определяемой ковектором U. Непосредственная проверка в локальных координатах показывает, что выражение для действующей на нее силы Кориолиса можно переписать так: $-2\Omega pn\times U = 2\Omega p * U$. Здесь $p=\cos\theta$, θ – угол между нормалью n и осью вращения, $\times$ – векторное умножение и подразумевается естественное отождествление ковекторов и касательных векторов к поверхности, лежащих в $\mathbb{R}^3$: $U\mapsto g^{ij}U_j r_{x^i}$.

Ввиду указанного соотношения приливные уравнения Лапласа [1, 2] принимают вид

$$i\lambda U = p*U - \alpha^{-1/2}h\nabla\zeta,\quad i\lambda\zeta = -\alpha^{-1/2}\operatorname{div}U \qquad (1.1)$$

Здесь $\lambda=\omega/(2\Omega)$ – спектральный параметр, $\alpha = 4\Omega^2 l_*^2/(g_*h_*)$ – безразмерный параметр (параметр Ламба), ω – частота свободных колебаний, l_* – характерный размер, h_* – характерная глубина, g_* – ускорение свободного падения. Безразмерная невозмущенная глубина жидкости $h \in C^\infty(X)$ предполагается положительной: $\inf_X h > 0$. Величины (U, ζ) определяют поток скорости и возвышение свободной поверхности.

Определим гильбертовы пространства L_2', $H_{1,h}'$ как пополнения множества $\{\varphi \in C^\infty(X) : \int \varphi dS = 0\}$ по нормам, порождаемым скалярными произведениями

$$(\varphi,\psi)_0 = \int \varphi\overline{\psi}dS,\ (\varphi,\psi)_{1,h} = \int h\langle\nabla\varphi,\nabla\psi\rangle dS$$

и пространство $\hat{L}_{2,h}$ как пополнение $\Lambda_1(X)$ по норме, ассоциированной со скалярным произведением $[U, V]_{0,h} = \int h^{-1}\langle U, V\rangle dS$. Здесь dS – элемент площади, интегрирование ведется по поверхности X.

Обозначим через $\hat{E}$ множество элементов $U \in \hat{L}_{2,h}$, для которых $\mathrm{div}U \in L_2(X, dS)$. Для элементов $\hat{E}$ корректно определен след γ_ν нормальной компоненты на ∂X (ср. с. [3], с. 101). Если $U \in \Lambda_1$, то $-\gamma_\nu U$ совпадает с сужением $*U$ на ∂X. Положим $\hat{E}_0 = \{U \in \hat{E} : \gamma_\nu U = 0\}$.

Спектральная задача для приливных уравнений Лапласа (1.1) с условием непротекания на границе сводится к исследованию спектральных свойств оператора

$$\tilde{R} = \begin{Vmatrix} -ip* & i\alpha^{-1/2}h\nabla \\ i\alpha^{-1/2}\mathrm{div} & 0 \end{Vmatrix} : \hat{L}_{2,h} \oplus L_2' \to \hat{L}_{2,h} \oplus L_2'$$

с областью определения $\mathrm{dom}\,\tilde{R} = \hat{E}_0 \oplus H_{1,h}'$.

Оператор $\tilde{R}$ самосопряжен. Структура и асимптотика его спектра описаны в теореме 1 из [4]. Здесь отметим, что спектр симметричен относительно начала координат и состоит из точки $\lambda = 0$ и счетного множества конечнократных собственных значений с предельными точками $\pm\infty$ при $ph^{-1} \equiv \mathrm{const}$ и 0, $\pm\infty$ при $ph^{-1} \not\equiv \mathrm{const}$. Вариационные принципы для собственных значений сформулированы ранее [2, 4, 5].

2. Асимптотика спектра волн Кельвина. Асимптотика собственных значений, соответствующих собственным функциям, сосредоточенным в окрестности границы, строится по методу пограничного слоя [6, 7]. Пусть Γ_0 – компонента границы поверхности X длины l. Введем в некоторой ее окрестности полугеодезическую систему координат $(\tau, s) \in [0, l] \times [0, \varepsilon_0)$ [8], где τ – длина дуги Γ_0, s – длина дуги геодезической, ортогональной Γ_0. При увеличении τ поверхность остается слева.

В координатах (τ, s) имеем $g_{11} = G(\tau, s)$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = 1$, $G(\tau, 0) = 1$. Полагая $U = U_1 d\tau + U_2 ds$, перепишем уравнения (1.1) в форме

$$i\lambda U_1 = pG^{1/2}U_2 - \alpha^{-1/2}h\frac{\partial\zeta}{\partial\tau},\quad i\lambda U_2 = -pG^{-1/2}U_1 - \alpha^{-1/2}h\frac{\partial\zeta}{\partial s} \tag{2.1}$$

$$i\lambda\zeta = -\alpha^{-1/2}G^{-1/2}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}(G^{-1/2}U_1) + \frac{\partial}{\partial s}(G^{1/2}U_2)\right)$$

Определим растянутую переменную $\rho = \alpha^{1/2}s$ и будем искать асимптотику собственных значений и собственных функций в виде

$$\lambda \sim \alpha^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\delta_m\alpha^{-m/2},\quad \zeta \sim \sum_{m=0}^{\infty}\zeta_m(\tau,\rho)\alpha^{-m/2}, \tag{2.2}$$

$$U_1 \sim \sum_{m=0}^{\infty}U_{1,m}(\tau,\rho)\alpha^{-m/2},\quad U_2 \sim \alpha^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}U_{2,m}(\tau,\rho)\alpha^{-m/2}$$

где функции ζ_m, $U_{j,m}$, которые можно считать определенными в полуплоскости $(\tau, \rho) \in$

$\in [0, l] \times [0, +\infty)$, экспоненциально убывают при $\rho \to +\infty$ и являются l-периодическими по τ. Далее считается, что $\delta_0 > 0$.

Подставим выражения (2.2) в уравнения (2.1) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях α. В главном приближении имеем

$$i\delta_0 U_{1,0} - p_0 U_{2,0} + h_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial \tau} = 0, \quad p_0 U_{1,0} + h_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial \rho} = 0 \qquad (2.3)$$

$$i\delta_0 \zeta_0 + \frac{\partial U_{1,0}}{\partial \tau} + \frac{\partial U_{2,0}}{\partial \rho} = 0 \qquad (2.4)$$

Здесь $h_0 = h(\tau, 0)$, $p_0 = p(\tau, 0)$. Из условия непротекания $*U\big|_{\Gamma_0} = 0$ следует

$$U_{2,m}(\tau, 0) = 0, \quad m \geqslant 0 \qquad (2.5)$$

Пусть $p_0 \neq 0$ на Γ_0. Если X – область на сфере, симметричной относительно оси вращения, это означает, что Γ_0 не пересекается с экватором. Выражая из уравнений (2.3) функции $U_{j,0}$ через ζ_0 и подставляя в (2.4), (2.5), получаем

$$\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \rho^2} - i\frac{p_0^2}{\delta_0 h_0}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{h_0}{p_0}\right)\frac{\partial \zeta_0}{\partial \rho} - \frac{p_0^2}{h_0}\zeta_0 = 0 \qquad (2.6)$$

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial \tau}(\tau, 0) - i\frac{\delta_0}{p_0}\frac{\partial \zeta_0}{\partial \rho}(\tau, 0) = 0 \qquad (2.7)$$

При достаточно большом δ_0 характеристический многочлен уравнения (2.6) имеет корень $\mu = \mu(\tau)$ с отрицательной действительной частью. Соответствующее экспоненциально убывающее при $\rho \to +\infty$ решение уравнения (2.6) имеет вид $\zeta_0 =$ $= a_0(\tau)\exp(\mu\rho)$. Подставляя это выражение в (2.7), получаем для $a_0 = a_0(\tau)$ обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Условие l-периодичности функции a_0 приводит к соотношениям

$$\operatorname{sign}(p_0)\int_0^l \left[\frac{\delta_0^2}{h_0} - \frac{p_0^2}{4h_0^2}\left(\frac{d}{d\tau}\frac{h_0}{p_0}\right)^2\right]^{1/2} d\tau = 2\pi k \qquad (2.8)$$

где k – целое число. Уравнение (2.8) имеет при любом достаточно большом k ($\operatorname{sign} k =$ $= \operatorname{sign} p_0$) единственное решение $\delta_0 = \delta_0(k)$.

Поправки $(U_{1,m}, U_{2,m}, \zeta_m)$, δ_m, $m \geqslant 1$ определяются по той же схеме.

С использованием известной оценки расстояния до спектра Σ самосопряженного оператора

$$\operatorname{dist}(\lambda; \Sigma(\tilde{R})) \leqslant \left\|(\lambda I - \tilde{R})(U, \zeta); L_2' \oplus \hat{L}_{2,h}\right\| / \left\|(U, \zeta); L_2' \oplus \hat{L}_{2,h}\right\|$$

следуя известному подходу ([9], с. 188), выводим, что расстояние от величины $\tilde{\lambda}_N = \alpha^{-1/2}(\delta_0 + \delta_1\alpha^{-1/2} + \ldots + \delta_N\alpha^{-N/2})$ до $\Sigma(\tilde{R})$ имеет порядок $\alpha^{-(N+1)/2}$. В силу дискретности спектра это означает, что существует счетное множество собственных значений $\lambda^k = \lambda^k(\alpha)$ с асимптотикой, определяемой первой формулой (2.2), причем коэффициент $\delta_0(k)$ вычисляется по формуле (2.8).

Элементарный анализ построенного приближенного решения показывает, что волны $\exp(i\lambda^k t)\zeta_0$, где t – время, распространяются вдоль границы, оставляя область слева, если $\operatorname{sign}(p_0) > 0$ (северное полушарие в случае сферы) и справа, если $\operatorname{sign}(p_0) < 0$ (южное полушарие). При $h_0 \equiv p_0 \equiv 1$ главный член асимптотики скорости их распространения $d\tau/dt \sim \alpha^{-1/2}$ в размерных переменных совпадает со скоростью длинных волн $\sqrt{g_* h_*}$. Оба эти свойства характерны для волн Кельвина [10, 11].

Отметим, что в описанном формальном алгоритме компактность поверхности X не играет роли. Не рассматривая вопросы обоснования асимптотики спектра в случае некомпактной поверхности, укажем, что для внешности круга (при $h \equiv p \equiv 1$) формула (2.8) была получена ранее [12].

3. Асимптотика k-го собственного значения в случае плоского односвязного бассейна постоянной глубины. Пусть X – плоская, односвязная, ограниченная область, l – длина ее границы и $h \equiv p \equiv 1$. Оказывается, что в этом случае полученные формулы определяют асимптотику k-го собственного значения в упорядоченной последовательности

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \lambda_k \leqslant \ldots \tag{3.1}$$

собственных значений оператора $\tilde{R}$, т.е.

$$\lambda_k \sim \frac{2\pi k}{l}\alpha^{-1/2} + \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m(k)\alpha^{-(m+1)/2}, \quad \alpha \to \infty \tag{3.2}$$

Схема доказательства этого утверждения состоит в следующем. Пусть границы единичного круга $X_0 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ и области X связаны гладкой гомотопией [13], $\varepsilon \in [0, T]$ – параметр гомотопии и границы полученных в процессе гомотопии областей $X(\varepsilon)$ имеют длину $l(\varepsilon)$. Обозначим через $\lambda_k(\alpha; \varepsilon)$ собственные значения (3.1), соответствующие области $X(\varepsilon)$ и через $\psi = \psi(z; \varepsilon, \varepsilon_1)$, $z = x + iy$ – семейство конформных отображений области $X(\varepsilon_1)$ на $X(\varepsilon)$, подобранное таким образом, что

$$f_1(\varepsilon,\varepsilon_1) = \min_{z\in X(\varepsilon_1)} \left|\psi'_z(z;\varepsilon,\varepsilon_1)\right|^2, \quad f_2(\varepsilon,\varepsilon_1) = \max_{z\in X(\varepsilon_1)} \left|\psi'_z(z;\varepsilon,\varepsilon_1)\right|^2$$

– непрерывные функции ε и $f_j(\varepsilon_1, \varepsilon_1) = 1, j = 1, 2$.

Анализируя известное решение [1], находим главный член асимптотики (3.2) в случае единичного круга. Из полученного результата и неравенства

$$\lambda_k(\alpha f_2(\varepsilon,\varepsilon_1);\varepsilon_1) \leqslant \lambda_k(\alpha;\varepsilon) \leqslant \lambda_k(\alpha f_1(\varepsilon,\varepsilon_1);\varepsilon_1) \tag{3.3}$$

которое выводится при помощи вариационных методов, вытекает, что определены ограниченные функции

$$F_{1,k}(\varepsilon) = \underline{\lim}_{\alpha\to\infty}\alpha^{1/2}\lambda_k(\alpha;\varepsilon), \quad F_{2,k}(\varepsilon) \equiv \overline{\lim}_{\alpha\to\infty}\alpha^{1/2}\lambda_k(\alpha;\varepsilon)$$

Исходя из установленного в предыдущем разделе факта существования собственного значения с асимптотикой (3.2) и неравенств (3.3), можно показать, что множество

$$D_k = \{\varepsilon \in [0,T] : F_{1,k}(\varepsilon) = F_{2,k}(\varepsilon) = 2\pi k / l(\varepsilon)\}$$

открыто и замкнуто в $[0, T]$. Поскольку D_k не пусто: $0 \in D_k$, то отсюда следует, что $D_k = [0, T]$.

Итак, доказана формула для главного члена асимптотики λ_k. Наличие собственного значения с асимптотикой (3.2) показывает, что справедливо и полное разложение.

Отметим, что асимптотика количества собственных значений на фиксированном интервале $(0, \lambda)$ при $\alpha \to \infty$ найдена ранее [5]. Имеется подробное изложение этих и других результатов[1].

---

[1] *Рохлин Д.Б.* О спектральной задаче для приливных уравнений Лапласа. Ростов-на-Дону, 1997. 68 с. – Деп. в ВИНИТИ 7.07.97, № 2204-В97.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ламб Г.* Гидродинамика: Пер. с англ. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. *Марчук Г.И., Каган Б.А.* Динамика океанских приливов. Л.: Гидрометеоиздат, 1991. 472 с.
3. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. М.: Наука, 1989. 416 с.
4. *Рохлин Д.Б.* О спектральной задаче для приливных уравнений Лапласа на поверхности с краем // Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки. 1996. № 4. С. 15–18.
5. *Рохлин Д.Б.* О спектральной задаче теории приливов в ограниченной области // Докл. РАН. 1997. Т. 353. № 5. С. 619–621.
6. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. Вып. 5. С. 3–122.
7. *Бабич В.М., Кирпичникова Н.Я.* Метод пограничного слоя в задачах дифракции. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974. 124 с.
8. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. М.: Гостехиздат, 1956. 420 с.
9. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
10. *Ле Блон П.Х., Майсек Л.А.* Волны в океане. Т. 1. Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 480 с.
11. *Mysak L.A.* Topographically trapped waves // Ann. Rev. Fluid Mech. 1980. V. 12. P. 45–76.
12. *Longuet-Higgins M.S.* On the trapping of long-period waves round islands // J. Fluid Mech. 1969. V. 37. Pt 4. P. 773–784.
13. *Евграфов М.А.* Аналитические функции. М.: Наука, 1991. 447 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
15.IV.1997