

УДК 532.526

© 1999 г. И.И. Липатов

**ЗАДАЧИ С РАЗРЫВНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ,
ОПИСЫВАЮЩИЕ ЛАМИНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ
ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА**

Исследована асимптотическая структура возмущенных ламинарных течений, описываемых задачами с нестационарными разрывными граничными условиями. В результате асимптотического анализа найдена структура областей течения и сформулированы соответствующие краевые задачи. Получены численные решения для одного из режимов, описываемого неоднородным уравнением Бюргерса и соответствующего разрывам вертикальной и продольной скорости, а также выдуву тангенциальной струи.

Разрывные граничные условия в теории пограничного слоя (ПС) встречаются в задачах, описывающих течение вблизи кромок профилей или крыльев, вблизи линий излома обтекаемых поверхностей и т.д. Например, переход от течения в ПС на пластине нулевой толщины под нулевым углом атаки к течению в следе связан с разрывом нормальной производной продольной скорости, которая пропорциональна трению на поверхности пластины и равна нулю на оси следа. Исследование течений такого типа на основе уравнений ПС показало, что вертикальная скорость на внешней границе следа при приближении к задней кромке пластины неограниченно растет. Таким образом, справедливость предположений теории ПС нарушается.

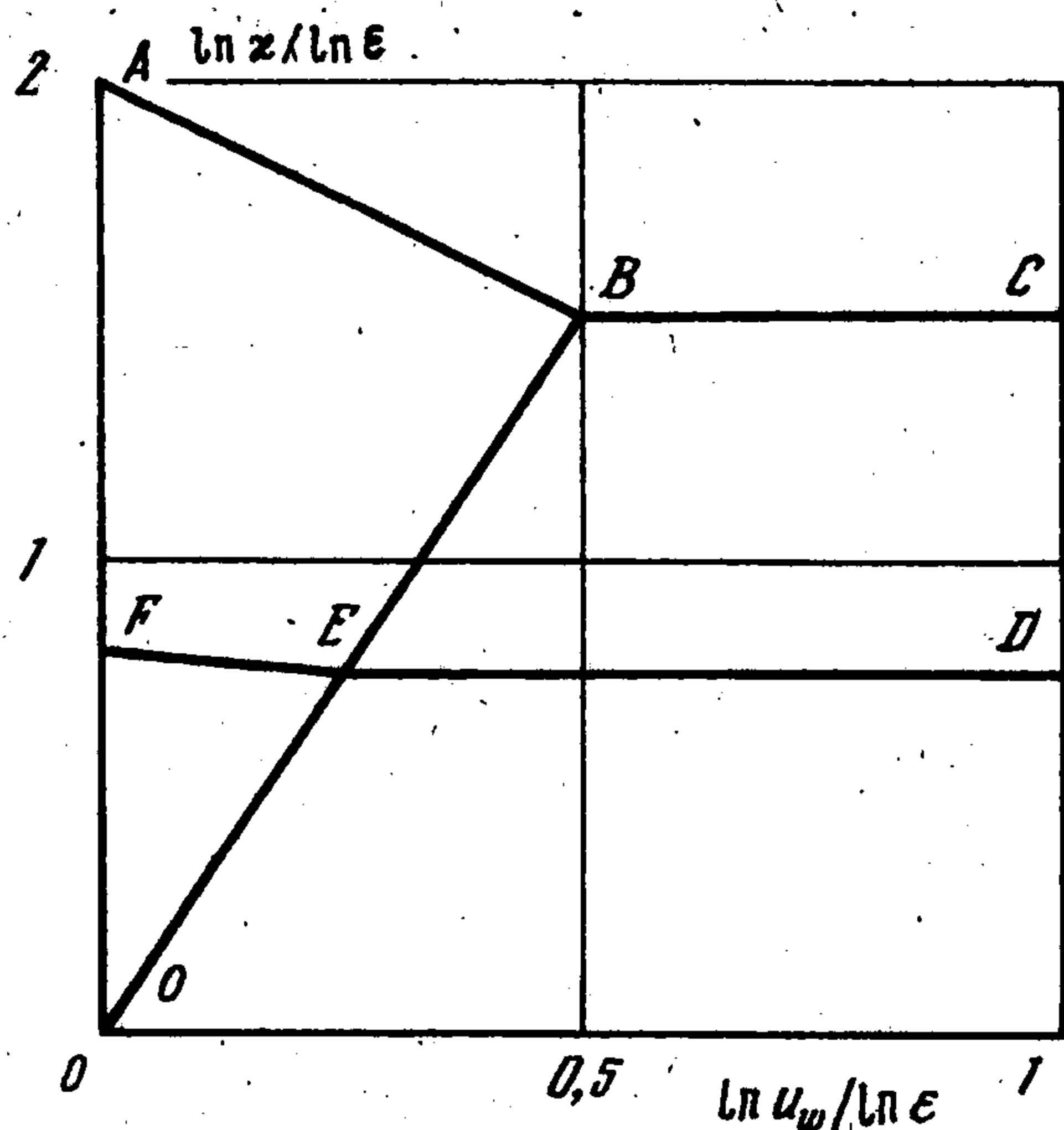
На основании асимптотического анализа уравнений Навье – Стокса было показано [1, 2], что вертикальная скорость на внешней границе вязкого течения, обусловленная изменением толщины вытеснения следа, ограничена в своем росте и не превышает таких величин при которых индуцированное во внешнем невязком течении возмущение давления начинает влиять на изменение толщины вытеснения. Подобные эффекты локального сильного вязко-невязкого взаимодействия были обнаружены и в окрестности точки отрыва ламинарного ПС от гладкой поверхности в сверхзвуковом потоке [3, 4]. Дальнейший анализ показал [5], что вблизи задней кромки пластины возникает сложная структура течения, включающая в себя ряд вложенных областей, течение в которых описывается полной системой уравнений Навье – Стокса, системой уравнений ПС с индуцированным градиентом давления и др.

Другие виды разрывов: скорости поверхности [6], производной функции тока (распределенный отсос) [7], температуры поверхности [8, 9] также характеризуются сложной структурой возмущенной области течения.

Нестационарные возмущения, порождаемые разрывными граничными условиями, исследованы значительно меньше, хотя изучение таких процессов необходимо для определения характеристик нелинейной устойчивости ламинарных течений при больших числах Рейнольдса.

1. Структура областей возмущенного течения. Для построения схемы областей возмущенного течения в качестве примера рассмотрим задачу о течении вблизи области разрыва скорости на пластине, имеющей на расстоянии l от передней кромки подвижный участок, скорость которого равна u_w .

Для декартовых координат, отсчитываемых вдоль обтекаемой поверхности и по нормали к ней, времени, компонентов вектора скорости, плотности, давления, коэффициента вязкости, полной энтальпии приняты следующие обозначения: $xl, yl, tl/u_\infty, uu_\infty, vu_\infty, \rho\rho_\infty, \rho\rho_\infty u_\infty^2, \mu\mu_\infty, Nu_\infty^2$. Индексом ∞ отмечены размерные функции в невозмущенном набегающем потоке.



Фиг. 1

Рассмотрим вначале структуру возмущенного стационарного течения.

Разрыв скорости струек тока, проходящих вблизи поверхности, имеющей скорость u_w , и струек тока с почти нулевыми скоростями может приводить к образованию нового ПС ниже по течению от точки разрыва. Условия, при которых на дне основного ПС в результате влияния разрывных граничных условий образуется новый ПС, получены ниже. Структура локального возмущенного течения зависит от величины местного (построенного по локальным параметрам) числа Рейнольдса.

Оценка толщины образующегося ПС следует из условия равенства порядков величин членов, описывающих влияние сил инерции и вязкости в уравнении продольного импульса

$$y \sim \varepsilon u_w^{-1/2} x^{1/2}, \quad \varepsilon = Re^{-1/2}, \quad Re = \rho_\infty u_\infty l / \mu_\infty \quad (1.1)$$

При фиксированной величине скорости поверхности и при меняющейся толщине образующегося ПС трение в нем монотонно убывает с ростом продольной координаты. Используя оценку (1.1), можно найти расстояние x_1 , на котором трение в образующемся ПС становится сравнимым с трением в основном ПС

$$u_w / \varepsilon \sim 1 / \varepsilon, \quad x_1 \sim u_w^3 \quad (1.2)$$

Полученные соотношения удобно изобразить графически в виде зависимости $\ln x / \ln \varepsilon = f(\ln u_w / \ln \varepsilon)$, тогда соотношение (1.2) представляется линией OB (фиг. 1).

Из оценки (1.1) можно также найти расстояние от точки разрыва граничного условия, на котором толщина и длина области нелинейных возмущений становятся одинаковыми по порядку величины и где по существу предположения теории ПС нарушаются

$$x_2 \sim \varepsilon^2 / u_w \quad (1.3)$$

Соотношение (1.3) изображается линией AB на фиг. 1.

Совпадение продольного и поперечного масштабов приводит тогда и к равенству порядков величин возмущенных продольной и поперечной скоростей. Поскольку соотношение (1.1) получено в предположении о равенстве инерционных и вязких сил по порядку величины, можно показать, что течение в области, имеющей масштабы $x_2 \sim y_2 \sim \varepsilon^2 / u_w$, описывается полной системой уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости. Указанная область также возникает и при рассмотрении течения вблизи передней кромки пластины нулевой толщины.

Оценим влияние образующегося за счет разрыва в граничных условиях ПС на течение в исходном ПС. Физически это влияние выражается в поглощении газа из основного ПС. Оценка величины вертикальной скорости в образующемся ПС следует из (1.1) и рассмотрения уравнения неразрывности и имеет вид

$$v \sim \varepsilon u_w^{1/2} x^{-1/2}, \quad \psi \sim v x \sim \varepsilon u_w^{1/2} x^{1/2}$$

Поглощение такого расхода на длине x из исходного ПС приводит к изменению его толщины. Для определения величины этого изменения воспользуемся представлением профиля скорости в основном ПС при малых расстояниях по сравнению с толщиной ПС: $u \sim y / \varepsilon$. Соответственно расход газа через основной ПС на расстоянии y от поверхности оценивается следующим образом: $\psi \sim y^2 / \varepsilon$. Следовательно, оценка для

изменения толщины вытеснения основного ПС имеет вид

$$\Delta\delta \sim \varepsilon^{1/2} \psi^{1/2} \sim \varepsilon u_w^{1/4} x^{1/4}$$

Это изменение толщины вытеснения индуцирует во внешнем невязком потоке соответствующее возмущение давления

$$\Delta p \sim \Delta\delta / x \sim \varepsilon u_w^{1/4} x^{-3/4}$$

Последняя оценка следует из линейной теории невязких (дозвуковых или сверхзвуковых) течений. Использование этой теории оправданно, если расстояние x_3 , на котором указанные эффекты существенны, превосходит толщину основного ПС $\delta \sim \varepsilon$. Условия, при которых справедливо предположение о том, что $x_3 > O(\varepsilon)$, будут определены ниже.

Оценка для возмущения давления позволяет найти расстояние x_3 , на котором индуцированный градиент давления оказывает нелинейное воздействие на пристеночную область основного ПС. Предполагается, что именно из этой области поглощается расход газа и именно изменение толщины этой области определяет суммарное изменение толщины вытеснения ПС

$$\Delta p \sim u_3^2, \quad x_3 \sim \varepsilon^{4/5} u_w^{-1/5} \quad (1.4)$$

Последнее из соотношений (1.4) изображается линией EF на фиг. 1. Используя оценку (1.4) можно записать условие, при котором длина области взаимодействия превосходит толщину ПС

$$u_w < 1/\varepsilon$$

что предполагается заведомо выполненным.

Характерные точки B и E находятся на пересечении линии OB с линиями AB и FE . Для режимов течения, соответствующих точкам B и E , характерно совпадение порядков величин трения в возмущенной зоне и в основном ПС. Тогда точке B соответствует течение, описываемое системой уравнений Навье–Стокса, а точке E — течение, описываемое системой уравнений теории "свободного взаимодействия".

Оценка (1.3) несправедлива для области изменения параметра u_w , находящейся правее точки B или в случаях, когда реализуется режим линейных возмущений из-за большего относительного влияния сил вязкости. Равенство порядков величин членов, описывающих влияние сил вязкости и инерции, приводит к оценке

$$x_4 \sim \varepsilon^{3/2} \quad (1.5)$$

Соотношение (1.5) описывается линией BC на фиг. 1. Аналогичные соображения можно использовать для нахождения расстояния x_5 , на котором происходят линейные процессы вязко-невязкого взаимодействия. Соотношение (1.4) несправедливо в области изменения параметра u_w , находящейся правее точки E . Для расстояния x_5 следует оценка

$$x_5 \sim \varepsilon^{3/4} \quad (1.6)$$

которой соответствует линия ED .

Схема областей возмущенного течения, изображенная на фиг. 1, позволяет при заданной амплитуде параметра u_w определить размеры этих областей и характер течения в них. Так, воздействие возмущения с амплитудой $O(\varepsilon^{1/4}) \leq u_w \leq O(1)$ приводит к появлению вблизи разрыва области с размерами, определяющимися линией AB , течение в которой описывается системой уравнений Навье–Стокса для несжимаемой

жидкости. Следующая по протяженности – область, продольный размер которой определяется линией EF , где течение описывается в первом приближении уравнением Бюргерса. При этом на промежуточных расстояниях при изменении параметров в области нелинейных возмущений реализуется режим компенсационного взаимодействия [10], а влияние вязкости несущественно. Отсутствие вязких членов в уравнениях, описывающих возмущенное течение, требует введения подобласти, в которой влияние сил вязкости имеет тот же порядок, что и влияние сил инерции. В то же время существует область с длиной, определяющейся линией OB , в которой влияние вязкости существенно и в которой поверхностное трение имеет тот же порядок величины, что и трение в исходном ПС. Точка E , как отмечалось выше, соответствует общему случаю, когда нелинейные процессы выравнивания трения взаимодействия с внешним потоком происходят в одной области – области "свободного взаимодействия" [3–4].

При изменении параметра u_w в диапазоне $O(\epsilon^{1/4}) \leq u_w \leq O(\epsilon^{1/2})$ кроме упоминавшейся области, где течение описывается системой уравнений Навье–Стокса, появляется еще одна область, длина которой определяется линией BE . Течение здесь описывается системой уравнений ПС с компенсационным условием взаимодействия. В этой области происходит выравнивание величины поверхностного трения. Наконец, при $u_w \sim \epsilon^{1/2}$ выравнивание трения реализуется непосредственно в той области, где течение описывается системой уравнений Навье–Стокса.

Таким образом, вблизи точки (линии) разрыва возникает система вложенных областей, имеющих различные масштабы в продольном направлении. Размер каждой из этих областей при заданной величине u_w можно определить, используя схему на фиг. 1. Нужно учитывать также, что каждая область, продольный размер которой превосходит по порядку величины толщину ПС, состоит из подобластей разного поперечного размера.

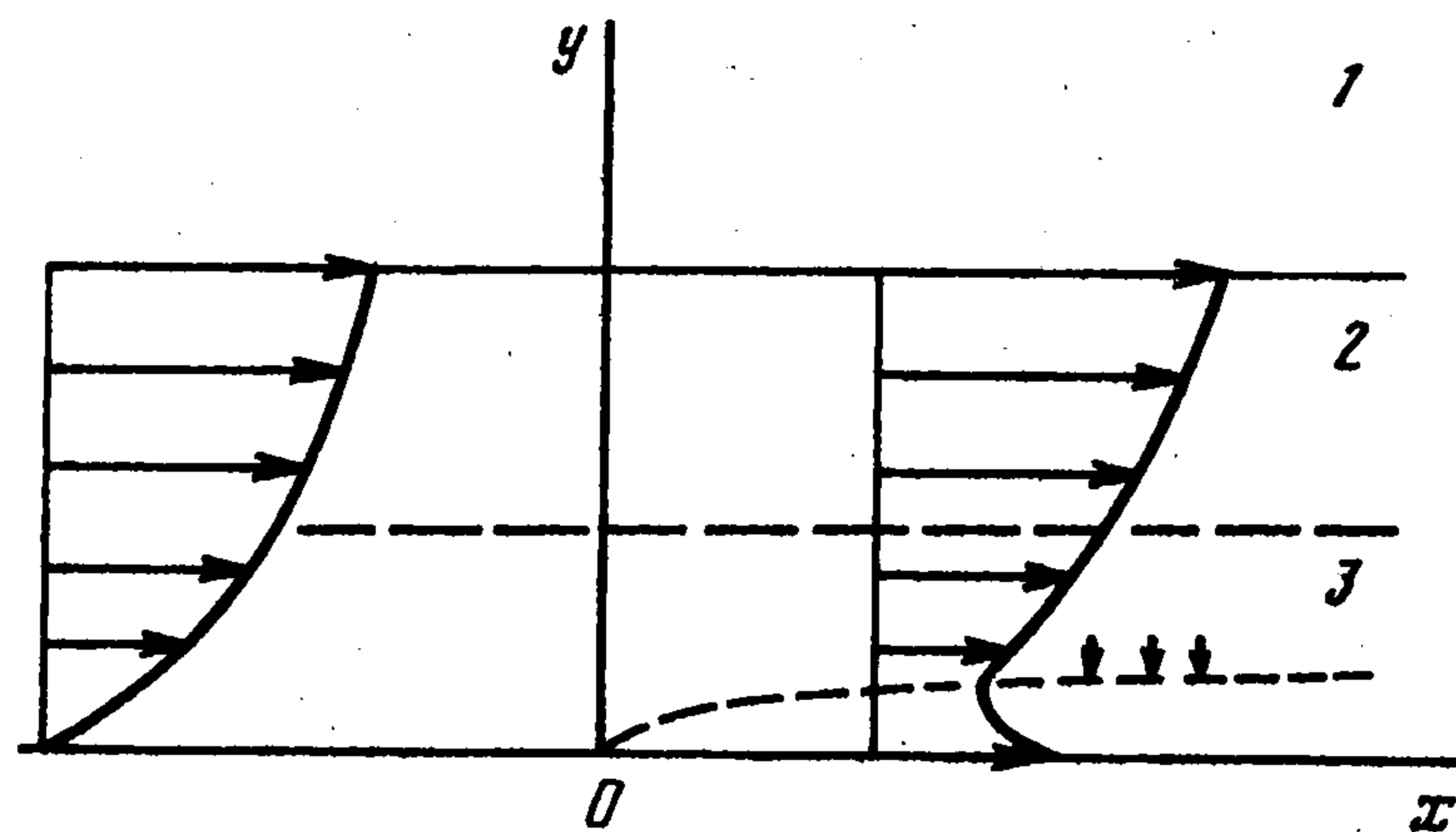
Пользуясь схемой на фиг. 1 и приведенными выше оценками, можно определить характерные времена для всех областей возмущенного течения. Эти характерные величины времени равны отношению длин областей к характерным величинам скорости в них. Следовательно, для рассматриваемой области, состоящей из системы вложенных подобластей, наибольшее характерное время будет соответствовать подобласти с наименьшей характерной продольной скоростью, нестационарным процессам в подобласти с наибольшим временем будут соответствовать квазистационарные процессы в остальных подобластях. Как следует из приведенных выше оценок, наименьшая продольная скорость характерна для области, в которой происходят нелинейные изменения.

Необходимо учитывать также, что областям, имеющим разные продольные размеры, будут соответствовать и разные характерные времена. Так, для областей, соответствующих линиям, указанным на фиг. 1, имеем оценки: $t_2 \sim \epsilon^2 u_w^{-2}$ на AB , $t_3 \sim \epsilon^{3/5} u_w^{-2/5}$ на EF , $t_1 \sim u_w^2$ на OB .

Для дальнейшего анализа отметим, что наименьшее время при $u_w = o(\epsilon^{1/2})$ характерно для области течения, соответствующей линии AB , затем при $u_w > O(\epsilon^{1/4})$ следующим по продолжительности является время для области EF и наибольшим оказывается характерное время для области, соответствующей линии OE .

2. Анализ нелинейных режимов. Для дальнейшего анализа существенно, что в главном приближении возмущенное течение в области, характеризующейся меньшим продольным масштабом, не влияет на течение в области с большим продольным масштабом. Аналогичным примером служит течение вблизи передней кромки пластины нулевой толщины и расположенной под нулевым углом атаки к набегающему потоку.

Ограничимся рассмотрением режимов течения, соответствующих области EF на



Фиг. 2

фиг. 1. Как показано выше, течение в области 3 оказывается невязким, а разрыв граничных условий приводит к появлению нелинейных возмущений. Кроме упоминавшейся иерархии режимов в продольном направлении с каждой областью (длина которой превосходит толщину ПС) связаны подобласти, поперечные размеры которых определяются соответственно толщиной образующегося ПС, толщиной области с нелинейными изменениями, толщиной основного ПС и продольным размером области возмущенного течения вблизи разрыва (фиг. 2).

Рассмотрим течение в области нелинейных изменений продольной скорости — области 3, для которой характерны следующие представления функций течения и координат

$$\begin{aligned}
 x &= 1 + x_3 \varepsilon^{4/5} u_w^{-1/5}, \quad y = y_3 \varepsilon^{6/5} u_w^{1/5}, \quad t = t_3 \varepsilon^{3/5} u_w^{-2/5} \\
 (u, v) &= (\varepsilon^{1/5} u_w^{1/5} u_3, \varepsilon^{3/5} u_w^{3/5} v_3) + \dots \\
 (p, \rho) &= \left(\frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \varepsilon^{2/5} u_w^{2/5} p_3, \rho_w \right) + \dots
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Подстановка разложений (2.1) в систему уравнений Навье–Стокса дает в результате предельного перехода

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad u_w \rightarrow 0, \quad \varepsilon^{1/4} / u_w \rightarrow 0 \tag{2.2}$$

следующую систему

$$\frac{\partial u_3}{\partial t_3} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial y_3} + \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p_3}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} = 0, \quad \frac{\partial p_3}{\partial y_3} = 0 \tag{2.3}$$

Граничные условия при $x_3 \rightarrow -\infty$ определяются решением для пристеночной области, в основном ПС

$$u_3 = a y_3, \quad v_3 = 0, \quad p_3 = 0 \tag{2.4}$$

Для области 2, расположенной над областью 3, характерны следующие асимптотические представления:

$$x = 1 + \varepsilon^{4/5} u_w^{-1/5} x_2, \quad y = \varepsilon y_2, \quad t = \varepsilon^{3/5} u_w^{-2/5} t_2 \tag{2.5}$$

$$u(x, y, t, \varepsilon, u_w) = u_0(y_2) + \varepsilon^{1/5} u_w^{1/5} u_2(x_2, y_2, t_2) + \dots$$

$$v(x, y, t, \varepsilon, u_w) + \varepsilon^{2/5} u_w^{2/5} v_2(x_2, y_2, t_2) + \dots \tag{2.6}$$

$$p(x, y, t, \varepsilon, u_w) = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \varepsilon^{2/5} u_w^{2/5} p_2(x_2, y_2, t_2) + \dots$$

$$\rho(x, y, t, \varepsilon, u_w) = \rho_0(y_2) + \varepsilon^{2/5} u_w^{2/5} \rho_2(x_2, y_2, t_2) + \dots$$

Подстановка разложений (2.6) в систему уравнений Навье–Стокса и предельный переход (2.2) дают систему

$$u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} = 0 \quad (2.7)$$

Решение системы (2.7) имеет вид

$$u_2 = A(x_2, t_2) \frac{du_0}{dy_2}, \quad v_2 = -u_0 \frac{\partial A}{\partial x_2} \quad (2.8)$$

В области 1, содержащей струйки тока невязкого внешнего течения можно ввести следующие представления функций и координат:

$$x = 1 + \varepsilon^{4/5} u_w^{-1/5} x_1, \quad y = \varepsilon^{4/5} u_w^{-1/5} y_1, \quad t = \varepsilon^{3/5} u_w^{-2/5} t_1$$

$$u(x, y, t, \varepsilon, u_w) = 1 + \varepsilon^{2/5} u_w^{2/5} u_1(x_1, y_1, t_1) + \dots \quad (2.9)$$

$$\rho(x, y, t, \varepsilon, u_w) = 1 + \varepsilon^{2/5} u_w^{2/5} \rho_1(x_1, y_1, t_1) + \dots$$

Представления для остальных функций с точностью до замены индекса совпадают с (2.6).

Подстановка разложений (2.9) в систему уравнений Навье–Стокса и предельный переход (2.2) дают

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0, \quad p_1 = \frac{\rho_1}{M_\infty^2} \quad (2.10)$$

откуда можно получить известное волновое уравнение (при $M_\infty > 1$) линейной теории сверхзвуковых течений, результатом решения которого является формула Аккерета [11]

$$\sqrt{M_\infty^2 - 1} p_1(x_1, 0, t_1) = v_1(x_1, 0, t_1) \quad (2.11)$$

Для дозвуковых течений решение системы уравнений (2.10) имеет вид

$$\frac{\partial p_1(x_1, 0, t_1)}{\partial x_1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(s - x_1)} \frac{\partial v(s, 0, t_1)}{\partial s} ds \quad (2.12)$$

Проводя сращивание решений в областях 1 и 2, найдем

$$p_1(x_1, 0, t_1) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial A}{\partial x_1}, & M_\infty > 1 \\ -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(s - x_1)} \frac{\partial A}{\partial s} ds, & M_\infty < 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

Сращивание решений в областях 2 и 3 дает

$$aA = u_3(x_3, y_3, t_3) - ay_3, \quad y_3 \rightarrow \infty \quad (2.14)$$

Решение для области 3 можно искать в виде

$$u_3(x_3, y_3, t_3) = ay_3 + aA(x_3, t_3)$$

для которого система уравнений (2.3) принимает вид

$$a \frac{\partial A}{\partial t_3} + a^2 A \frac{\partial A}{\partial x_3} + \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p_3}{\partial x_3} + a v_{3w} = 0 \quad (2.15)$$

причем возмущение давления определяется формулами (2.13), поскольку $p_3(x_3, t_3) = p_1(x_1, 0, t_1)$.

Таким образом, течение в области нелинейных возмущений в окрестности линии разрыва описывается неоднородными уравнениями Бенджамена–Оно (для дозвукового внешнего потока) или уравнением Бюргера (для сверхзвукового внешнего потока).

3. Примеры. Приведем результаты численного решения уравнения Бюргера.

В рассмотренных ниже примерах возмущение, вносимое разрывом граничных условий, влияет на течение в области 3 через вертикальную скорость v_{3w} . Эта скорость отсоса (вдува) определяется решением для образующегося ПС. Граничные условия для уравнений ПС определяются видом разрыва. Существенно, что всем рассматриваемым ниже видам разрывов в граничных условиях соответствует единая формулировка задачи (2.15) с точностью до алгебраической замены переменных и с различными распределениями скорости v_{3w} . Следует отметить также, что за исключением первого из рассматриваемых примеров течение в образующемся ПС характеризуется асимптотически большими величинами продольной скорости и соответственно меньшими величинами характерного времени, чем в области 3. Таким образом, предполагая нестационарный характер течения в области 3, приходим к квазистационарным процессам в образующемся ПС.

Отсос со скоростью v_w , начинающийся в момент времени $t_3 = 0$ в области $x_3 > 0$, где расположен пористый участок поверхности. Было показано [7], что отсос порождает течение в области 3, описываемое системой уравнений (2.2) в случае $O(\epsilon^{3/4}) < v_w < O(1)$; было получено также стационарное решение задачи. Ниже изучается эволюция перехода к этому стационарному состоянию. В этом случае для области 3 характерны другие асимптотические выражения:

$$x = 1 + (\epsilon^{-3} a^3 \beta \rho_w v_w)^{-1/3} X, \quad t = (\epsilon^{-3} a^3 \beta \rho_w v_w^2)^{-1/3} T \quad (3.1)$$

$$p = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + (\beta^{-2} \rho_w v_w^2)^{1/3} P, \quad P = -\frac{\partial A}{\partial X}$$

В результате подстановки выражений (3.1) в систему уравнений (2.15) получим

$$\frac{\partial A}{\partial T} + A \frac{\partial A}{\partial X} - \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + F(X, T) = 0 \quad (3.2)$$

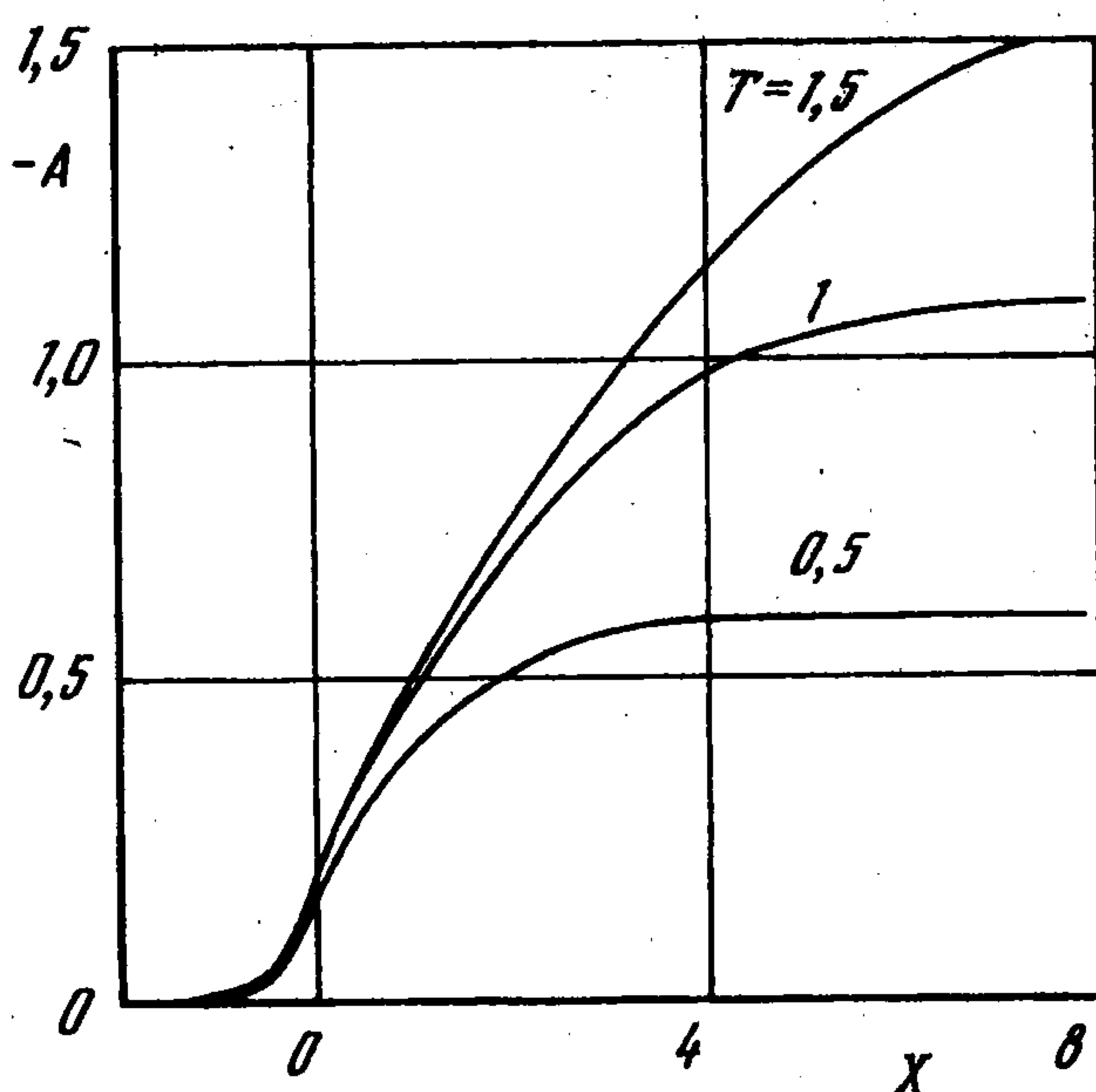
$$A(X, 0) = 0, \quad A(-\infty, T) = 0, \quad \frac{\partial A(\infty, T)}{\partial X} = 0 \quad (3.3)$$

$$F(X, T) = \begin{cases} 0, & X < 0, \quad T \geq 0 \\ 1, & X \geq 0, \quad T > 0 \end{cases}$$

Следует отметить, что уравнение Бюргера описывает и другие режимы течения в ПС, необязательно порождаемые разрывом в граничных условиях. Примеры таких режимов исследованы ранее [12, 13].

Решение задачи (3.2), (3.3) получено численно с использованием метода конечных разностей. На фиг. 3 приведена функция $A(X, T)$ в разные моменты времени. При больших значениях времени численное решение нестационарной задачи совпадает с решением стационарной задачи, полученным ранее [7].

Движение поверхности, начинающееся в момент времени $t_3 = 0$ в области $x_3 > 0$ со скоростью u_w . Влияние такого вида разрыва сказывается на течении в области 3 также через появление скорости отсоса, величина которого определяется эжекционными свойствами образующегося ПС. Течение в ПС описывается уравнением Блазиуса



Фиг. 3

$$f'' + ff' = 0$$

$$\psi = (2\varepsilon^2 u_w \rho_w^{-1} \mu_w x)^{1/2} f(\eta), \quad \eta = (2\varepsilon^{-2} u_w \rho_w \mu_w^{-1} x^{-1})^{1/2} y$$

с граничными условиями

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f'(\infty) = 0$$

соответствующими рассматриваемой задаче.

Необходимое для дальнейшего анализа решение имеет вид

$$f(\infty) = C_0, \quad C_0 \approx 1,23$$

Тогда

$$v_{3w} = -(2^{-1} \rho_w^{-1} \mu_w C_0^2 x_3^{-1})^{1/2}$$

Замена переменных

$$x = 1 + (2\varepsilon^4 u_w^{-1} a^{-6} \beta^{-4} \rho_w^{-3} \mu_w^{-1} C_0^{-2})^{1/5} X$$

$$t = (4\varepsilon^3 u_w^{-2} a^{-7} \beta^{-3} \rho_w^{-1} \mu_w^{-2} C_0^{-4})^{1/5} X$$

$$p = (\gamma M_\infty^2)^{-1} + (4^{-1} \varepsilon^2 u_w^2 a^2 \beta^{-2} \rho_w \mu_w^2 C_0^{-4})^{1/5} P, \quad P = -\partial A / \partial X$$

приводит уравнение к виду (3.2), где

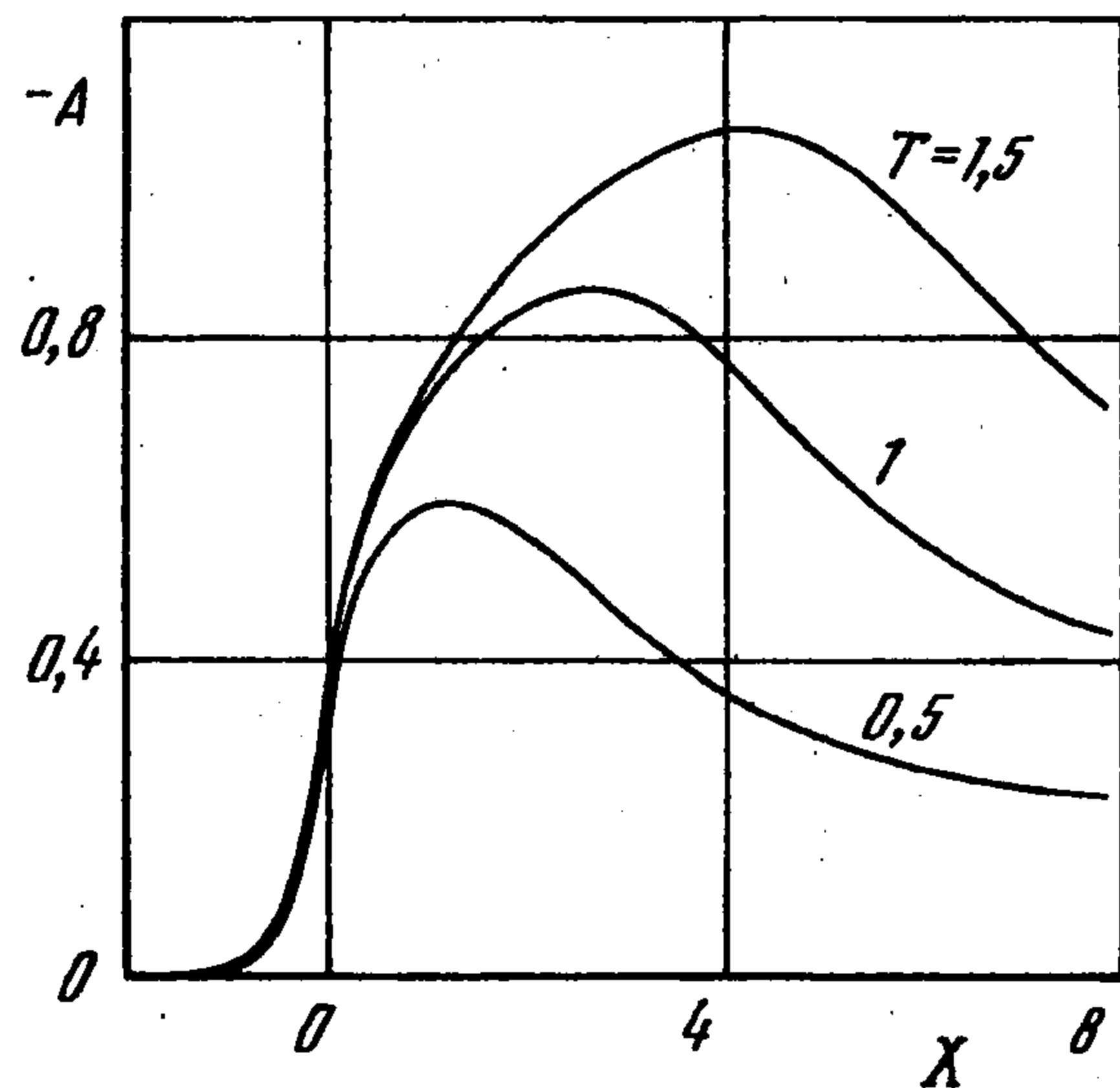
$$F(X, T) = \begin{cases} 0, & X < 0, \quad T \geq 0 \\ -X^{-1/2}, & X \geq 0, \quad T > 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

с краевыми условиями

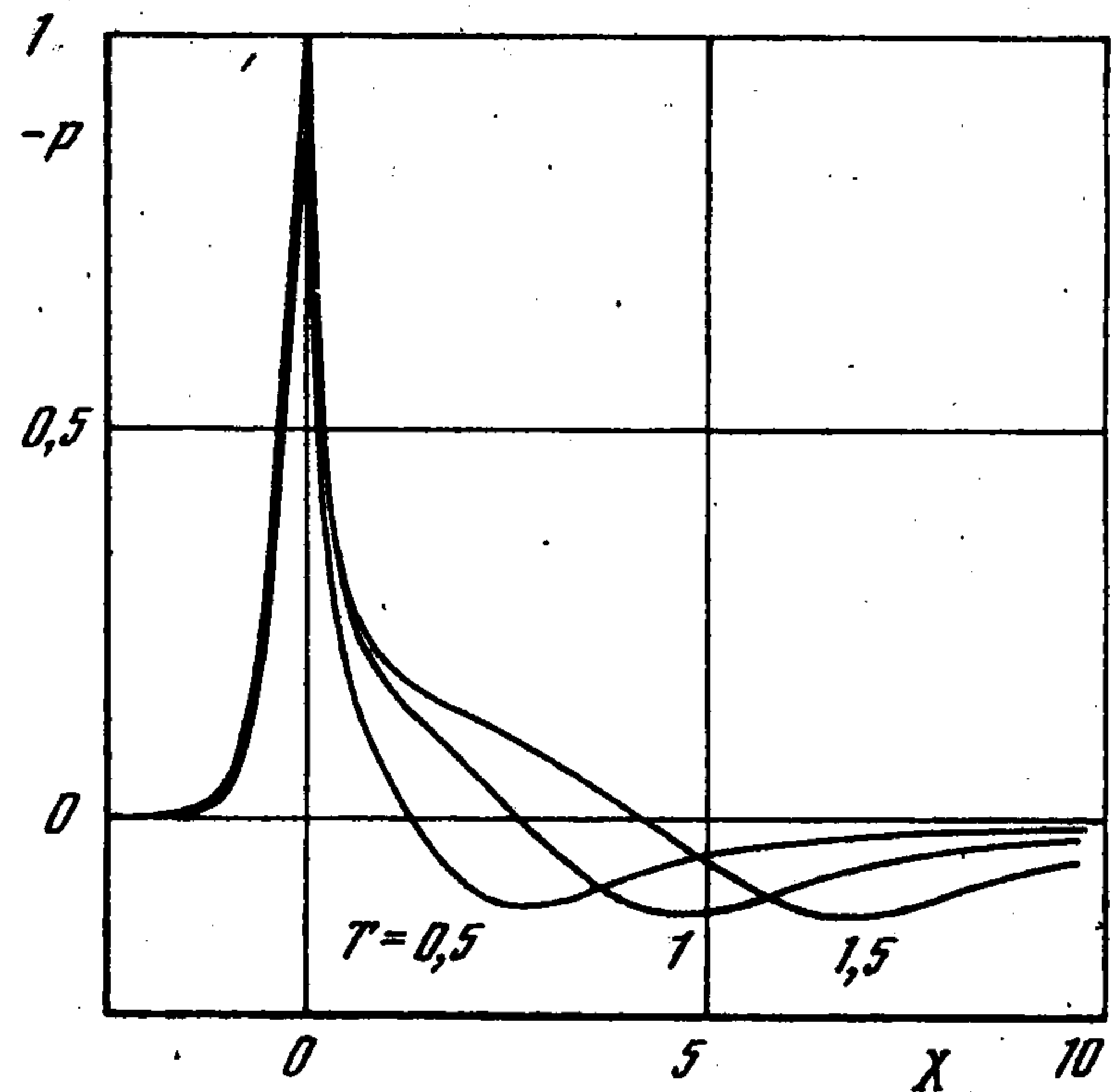
$$A(X, 0) = 0, \quad A(-\infty, T) = 0, \quad \frac{\partial A(\infty, T)}{\partial X} = 0 \quad (3.5)$$

Результаты численного решения задачи (3.2), (3.4), (3.5) приведены на фиг. 4, где изображена функция $A(X, T)$ в разные моменты времени. С течением времени решение, описывающее возмущенное течение выше по потоку от разрыва, достаточно быстро выходит на решение стационарной задачи. Решение, описывающее возмущенное течение ниже по потоку от разрыва, характеризуется перемещением уединенной волны. Более отчетливо это видно на фиг. 5, где изображены распределения возмущения давления в разные моменты времени.

Тангенциальный вдув, начинающийся в момент времени $t_3 = 0$ через щель, расположенную на поверхности при $x_3 = 0$. Предполагается, что вблизи поверхности тела формируется течение, описываемое известным автомодельным решением [14] для пристенной струи, выдуваемой в затопленное пространство. Стационарное решение этой задачи было изучено [15] и показано,



Фиг. 4



Фиг. 5

что при изменении инварианта

$$I = \int_0^{\infty} u^2 d\lambda \int_0^{\lambda} u dy$$

в диапазоне $O(\epsilon^{13/4}) < I < O(1)$ в области 3 реализуется течение, описываемое уравнением Бюргера (3.2). Влияние пристенной струи на течение в области 3, как и в предыдущем случае, осуществляется через скорость инъекции на внешней границе пристенной струи. Для рассматриваемой задачи справедливы разложения

$$x = 1 + (\epsilon^{10} a^{-12} \beta^{-8} \rho_w^{-7} \mu_w^{-1} I^{-1} C_1^{-4})^{1/9} X$$

$$t = (\epsilon^2 a^{-15} \beta^{-7} \rho_w^{-5} I^{-2} C_1^{-8})^{1/9} T$$

$$p = (\gamma M_{\infty}^2)^{-1} + (\epsilon^{-2} a^6 \beta^{-2} \rho_w^5 \mu_w^2 I^2 C_1^8)^{1/9} P$$

$$v_w = 4^{-1} (\epsilon^2 \rho_w^{-1} \mu_w I C_1^4 x^{-3})^{1/4}, \quad C_1 \approx 2,515$$

Уравнение для функции $A(X, T)$ имеет вид (3.2), где

$$F(X, T) = \begin{cases} 0, & X < 0, \quad T \geq 0 \\ -X^{-3/4}, & X \geq 0, \quad T > 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Результаты численного решения уравнения (3.2) при условиях (3.6) и (3.4) качественно совпадают. Как и в предыдущем случае, выдув струи приводит к образованию уединенной волны, перемещающейся вниз по потоку.

Все рассмотренные выше примеры характеризуются образованием перемещающейся вниз по потоку области повышенного давления. Однако это не приводит к отрыву пристенного ПС, поскольку по предположению течение в нем не зависит в первом приближении от течения в области нелинейных возмущений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-1537).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Messiter A.F.* Boundary layer flow near the trailing edge of a flat plate // *SIAM J. Appl. Math.* 1970. V. 18. № 1. P. 241–257.
2. *Stewartson K.* On the flow near the trailing edge of a flat plate // *Mathematika.* 1969. V. 16. Pt. 1. № 31. P. 106–121.
3. *Нейланд В.Я.* К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1969. № 4. С. 53–57.
4. *Stewartson K., Williams P.G.* Self-induced separation // *Proc. Roy. Soc. London.* 1969. Ser. A. V. 312. № 1509. P. 181–206.
5. *Veldman A.E.P.* Boundary-layer flow past a finite flat plate. Groningen: Rijksuniv., 1976. 130 p.
6. *Липатов И.И., Нейланд В.Я.* Влияние внезапного изменения движения поверхности пластины на течение в ламинарном пограничном слое в сверхзвуковом потоке // *Учен. зап. ЦАГИ.* 1982. Т. 13. № 5. С. 79–90.
7. *Липатов И.И.* Течение в окрестности точки начала интенсивного отсоса ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // *Учен. зап. ЦАГИ.* 1976. Т. 7. № 2. С. 37–44.
8. *Соколов Л.А.* К асимптотической теории плоских течений ламинарного пограничного слоя с разрывом температуры на теле // *Тр. ЦАГИ.* 1975. Вып. 1650. С. 18–23.
9. *Боголепов В.В., Липатов И.И., Соколов Л.А.* Структура химически неравновесных течений при скачкообразном изменении температуры и каталитических свойств поверхности // *ПМТФ.* 1990. № 3. С. 30–41.
10. *Боголепов В.В., Нейланд В.Я.* Исследование локальных возмущений вязких сверхзвуковых течений // *Аэромеханика.* М.: Наука, 1976. С. 104–118.
11. *Ферри А.* Аэродинамика сверхзвуковых течений. М.; Л.: Гостехиздат, 1953. 463 с.
12. *Жук В.И., Рыжов О.С.* О локально-невязких возмущениях в пограничном слое с самоиндуцированным давлением // *Докл. АН СССР.* 1982. Т. 263. № 1. С. 56–59.
13. *Липатов И.И., Нейланд В.Я.* К теории нестационарного отрыва и взаимодействия ламинарного пограничного слоя со сверхзвуковым потоком газа // *Учен. зап. ЦАГИ.* 1987. Т. 18. № 1. С. 36–49.
14. *Акатнов Н.Н.* Распространение плоской ламинарной струи несжимаемой жидкости вдоль твердой стенки // *Тр. Ленингр. политехн. ин-та.* 1953. № 5. С. 24–31.
15. *Липатов И.И.* Взаимодействие течения в ламинарном пограничном слое с внешним сверхзвуковым потоком при щелевом тангенциальном вдуве // *Тр. ЦАГИ.* 1983. Вып. 2190. С. 38–52.

Жуковский

Поступила в редакцию
20.III.1997