ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 63. Вып. 1, 1999

УДК 531.38

© 1999 г. К. Валле, А. Амдуни, Ф. Инар, Д. Фортюн

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА БЕЗ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ВРАЩЕНИЙ

Предлагаются новые уравнения динамики твердого тела, в которых для описания вращательной части движения не используется локальная параметризация группы вращений. Получена простая система алгебро-дифференциальных уравнений, хорошо приспособленная для формирования уравнений движения сочлененных тел.

Существует несколько способов параметризации вращательных движений твердого тела, чаще всего осуществляемых при помощи углов Эйлера или Брайана. Известная трудность такой параметризации состоит в отсутствии единой карты для группы вращений SO(3). Предлагались различные пути выхода из положения. Приведем в качестве примера использование параметров Родрига – Гамильтона [1, 2] или, что эквивалентно, кватернионов [3] или дуальных чисел [4]. Можно найти в [4, 5] большую библиографию, посвященную параметризации вращений.

В 60-х годах В.И. Арнольд [6] предложил при записи уравнений динамики опираться исключительно на структуру группы SO(3). Шевалье [7, 8] обобщил эти идеи, использовав исключительно геометрическую и дифференциальную структуру группы Ли перемещений D. Благодаря присоединенному представлению группы Ли D в своей алгебре Ли он получил простую синтетическую формулировку уравнений динамики.

Ниже предлагается отказаться от параметризации вращений посредством рассмотрения произвольного поворота непосредственно в виде элемента ансамбля невырожденных матриц 3×3, представляющих собой открытое множество в нормированном векторном пространстве матриц 3×3.

Условие $RR^T = R^TR = I$ (R означает матрицу поворота, а I – единичную матрицу) рассматривается в качестве связи, учитываемой посредством введения 6 множителей Лагранжа. Эти множители могут быть представлены симметрической матрицей 3×3.

В этой постановке задачи начнем с вычисления кинетической энергии, после чего запишем уравнения Лагранжа.

Далее выясняется механический смысл множителей Лагранжа и приводится иллюстрированный пример.

1. Уравнения движения. Пусть S – твердое тело, движущееся в фиксированной галилеевой системе отсчета с репером R_0. Пусть O – начало этого репера, а A и M – две точки тела S, занимавшие в начальный момент времени положение A_0 и M_0. В каждый момент времени имеет место равенство

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t) = \mathbf{a}(t) + R(t)\mathbf{b}_0$$

где $\mathbf{r}(t)$ – радиус-вектор точки M, $\mathbf{a}(t)$ – вектор поступательного перемещения (радиус-вектор точки A), $R(t)$ – матрица поворота, $\mathbf{b}$ – вектор с началом в точке A и концом в точке M.

Скорость точки M в R_0 выражается так:

$$\mathbf{V}(M/R_0) = \dot{\mathbf{a}}(t) + \dot{R}(t)\mathbf{b}_0 = \dot{\mathbf{a}}(t) + \dot{R}(t)[R(t)]^{-1}\mathbf{b}(t) \qquad (1.1)$$

Точка над буквой означает производную по времени в репере R_θ. Цель статьи – выразить уравнение движения твердого тела S через R и $\mathbf{a}$, имея в виду уравнения связей, учитывающих, что R – матрица поворота: $RR^T = I$, посредством введения множителей Лагранжа.

Выражение для кинетической энергии. Пусть m – масса тела S. Рассмотрим тензор

$$K = \int_S \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \ \ dm$$

где $\otimes$ означает тензорное произведение. Тензор K связан с тензором инерции тела в точке A, который будет обозначать буквой J. Точнее, если обозначить K_0 величину K в начальный момент времени, т.е.

$$K_0 = \int_S b_0 \otimes b_0 dm$$

то справедлива следующая лемма.

Лемма 1. В каждый момент времени тензоры K и K_0 связаны равенством $K(t) = R(t)K_0R^T(t)$ и, кроме того, J и K удовлетворяют соотношению

$$K = \frac{1}{2}(trJ)I - J$$

Доказательство. Осуществляя замену переменных с равным единице якобианом $\mathbf{b} = R\mathbf{b}_0$, получаем

$$K = \int_{S_0} R\mathbf{b}_0 \otimes R\mathbf{b}_0 dm$$

Поскольку $R\mathbf{b}_0 \otimes R\mathbf{b}_0 = R(\mathbf{b}_0 \otimes \mathbf{b}_0)R^T$, то первая часть леммы доказана. Классическое определение тензора инерции тела в точке A есть

$$J = \mathrm{tr}\left(\int_S \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \ \ dm\right) I - \int_S \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \ \ dm$$

Следовательно, $J = (\mathrm{tr}K)\, I - K$. Вычисляя след правой и левой частей этого равенства, получаем $\mathrm{tr}J = 2\mathrm{tr}K$, что позволяет записать второе соотношение леммы.

Пусть G – положение центра масс тела S в начальный момент времени t, а G_0 – это же положение в начальный момент времени. Тогда имеет место следующее свойство.

Свойство 1. Кинетическая энергия тела, двигающаяся по отношению к реперу R_0, равна

$$W\left(\frac{S}{R_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\left(\dot{R}K_0\dot{R}^T\right) + m\|\dot{\mathbf{a}}\|^2\right) + m\left\langle \dot{\mathbf{a}}, \dot{R}\mathbf{C}_0\right\rangle$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ обозначает обычное скалярное произведение, а вектор $\mathbf{c}_0$ исходит из A_0 и кончается в G_0.

Доказательство. По определению кинетической энергии тела S по отношению к реперу R_0 имеем

$$2W = \int_S \left\|\mathbf{V}(M/R_0)\right\|^2 dm$$

Вычисление подынтегрального выражения в соответствии с соотношением (1.1)

$$2W = m\|\dot{\mathbf{a}}\|^2 + 2m\left\langle \dot{\mathbf{a}}, \dot{R}R^T\mathbf{c}\right\rangle + \mathrm{tr}\left(\dot{R}R^T KR\dot{R}^T\right)$$

Используя, с одной стороны, лемму 1, а с другой стороны, равенство $\mathbf{c}_0 = R^T\mathbf{c}$, получаем утверждаемое свойство.

Виртуальная работа внешних сил, действующих на тело. Учитывая выражение для $\mathbf{r}$, виртуальное перемещение точки M записываем в виде

$$\delta\mathbf{r} = \delta R\mathbf{b}_0 = \delta\mathbf{a}$$

Виртуальное перемещение твердого тела может быть охарактеризовано парой $(\delta R, \delta\mathbf{a})$.

Свойство 2. Для любых сил, приложенных к телу S, существует матрица Q и вектор $\mathbf{L}$, такие, что виртуальная работа этих сил на виртуальном перемещении $(\delta R, \delta\mathbf{a})$ может быть выражена следующим образом:

$$T^v = \operatorname{tr}\left(Q\delta R^T\right) + \langle L, \delta\mathbf{a}\rangle$$

Этот результат очевиден, поскольку виртуальная работа T^v – линейная форма в пространстве виртуальных перемещений $(\delta R, \delta\mathbf{a})$. Следовательно, существует матрица Q и вектор $\mathbf{L}$, удовлетворяющие указанному свойству.

Пример. Определим $\mathbf{L}$ и Q для объемной плотности сил $\mathbf{f}$, действующих на тело S. Имеем

$$T^v = \int_S \langle\mathbf{f}(\mathbf{r}), \delta\mathbf{r}\rangle dv = \int_S \left\langle\mathbf{f}(\mathbf{r}), \delta RR^T\mathbf{b} + \delta\mathbf{a}\right\rangle dv$$

Сравнивая это выражение с тем, которое фигурирует в свойстве 2, получаем

$$\mathbf{L} = \int_S \mathbf{f}(\mathbf{r})dv, \quad Q = \left(\int_S \mathbf{f}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{b}\, dv\right)R$$

Вектор $\mathbf{L}$ представляет собой главный вектор сил, приложенных к S, а матрица Q содержит информацию о моментах этих сил относительно точки A.

Уравнения Лагранжа. Прежде всего заметим, что $\partial W/\partial R = 0$ и $\partial W/\partial\mathbf{a} = 0$. С другой стороны,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial\dot{R}}\right) = \ddot{R}K_0 + m\ddot{\mathbf{a}} \otimes \mathbf{c}_0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial\dot{\mathbf{a}}}\right) = m\left(\ddot{R}\mathbf{c}_0 + \ddot{\mathbf{a}}\right)$$

Учитывая выражение для виртуальной работы и уравнение связи $RR^T = I$, вариация которой

$$(\delta R)R^T + R(\delta R)^T = 0 \tag{1.2}$$

уравнения движения запишем в виде

$$\ddot{R}K_0 + m\ddot{\mathbf{a}} \otimes \mathbf{c}_0 = Q + R\Lambda, \quad m\left(\ddot{\mathbf{a}} + \ddot{R}\mathbf{c}_0\right) = \mathbf{L} \tag{1.3}$$

где Λ – симметрическая матрица 3×3,6 коэффициентов которой – множители Лагранжа в соответствии с уравнениями связи (1.2).

Интерпретация Λ. Рассмотрим частный случай твердого тела с неподвижной точкой O. Кроме того, для простоты положим $Q = 0$. При этих условиях справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Для твердого тела с неподвижной точкой O и с равным нулю моментом внешних сил вокруг этой точки матрица множителей Лагранжа Λ отрицательна.

Доказательство. В силу условий леммы уравнение движения перепишутся так:

$$\ddot{R}K_0 = R\Lambda, \quad R^T R = I$$

Дифференцируя дважды последнее равенство и используя равенство $R^T\ddot{R} = \Lambda K_0^{-1}$, вытекающее из уравнений движения, получаем

$$K_0^{-1}\Lambda + \Lambda K_0^{-1} = -2\dot{R}^T\dot{R}$$

Поскольку матрица Λ симметрическая, она диагонализируема и ее собственные числа вещественны.

Для доказательства того, что эта матрица отрицательна, достаточно показать, что все собственные числа отрицательны.

Пусть λ – собственное значение Λ и $\mathbf{u}$ – соответствующий собственный вектор. Тогда

$$\left\langle K_0^{-1}\Lambda u,\ u\right\rangle + \left\langle \Lambda K_0^{-1}u,\ u\right\rangle = -2\left\langle \dot{R}^T\dot{R}u,\ u\right\rangle$$

Учитывая, что Λ – симметрическая матрица, имеем

$$\lambda\left\langle K_0^{-1}u,\ u\right\rangle = -\left\langle \dot{R}^T\dot{R}u,\ u\right\rangle$$

С другой стороны, K_0 – положительная матрица, поэтому форма $\left\langle K_0^{-1}u,\ u\right\rangle$ строго положительна. Кроме того, форма $\left\langle \dot{R}u, \dot{R}u\right\rangle$ тоже положительна, откуда и следует отрицательность λ.

Полученный результат позволяет интерпретировать Λ как внутренние напряжения, вытекающие из условий нерастяжимости твердого тела, а именно имеет место следующее свойство.

Свойство 3. Пусть S – абсолютно твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки O относительно репера R_0 по инерции. Тогда матрица множителей Лагранжа может быть записана в форме

$$\Lambda = -R^T\left(\int_S \sigma\, dv\right)R$$

где σ – тензор внутренних напряжений Коши.

Посмотрим на задачу с точки зрения теории деформируемых сред. В отсутствие внешних сил произвольное виртуальное перемещение производит виртуальную работу сил инерции, равную и противоположную виртуальной работе внутренних напряжений: $T_a^v = -T_i^v$. Поскольку, с одной стороны,

$$T_i^v = \int_S \mathrm{tr}\left(\sigma\frac{\partial \delta\mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}}\right)dv$$

то, учитывая выражения для $\delta\mathbf{r}$, получим

$$T_i^v = \int_S \mathrm{tr}\left(\sigma R\delta R^T\right)dv$$

(использован факт симметричности тензора σ).

С другой стороны, имеем

$$T_a^v = \mathrm{tr}\left(P\delta R^T\right),\quad P = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial R}\right) - \frac{\partial W}{\partial R} = R\Lambda$$

Сравнивая сформулированный выше принцип виртуальных работ для абсолютно твердого тела и для упругого тела и получаем утверждаемый факт.

Замечание. Таким образом, установлено, что форма $R\Lambda R^T$ представляет собой объемное среднее внутренних напряжений в теле S.

2. Приложение. При помощи классического, но нетривиального примера, покажем, как можно проинтегрировать полученные выше уравнения движения, не прибегая к параметризации вращения.

Рассмотрим тело вращения S с неподвижным центром масс O и вектором $(0, \mathbf{z})$, направленным по оси симметрии. Дополним $\mathbf{z}$ двумя единичными векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, чтобы образовать репер главных осей инерции тела S.

Пусть B – момент инерции по отношению к любой оси, проходящей через O и расположенной в плоскости (O, x, y), C – момент инерции вокруг оси симметрии. Для тензора инерции получаем выражение

$$J = BI + (C - B)\mathbf{z} \otimes \mathbf{z}$$

Пусть $(O; \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ – начальное положение репера главных осей инерции тела S. В каждый момент времени движение определено матрицей поворота R, переводящий репер $(O; \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ в репер $(O; \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. Уравнения движения имеют вид

$$\ddot{R}K_0 = R\Lambda, \quad R^T R = I \tag{2.1}$$

$$\left(K_0 = IC/2 + (B - C/2)\mathbf{z}_0 \otimes \mathbf{z}_0\right)$$

Дифференцируя второе из уравнений (2.1), получим, что матрица $R^T \dot{R}$ антисимметрическая. Следовательно, существует вектор, который обозначим $\boldsymbol{\omega}$, такой, что $\dot{R} = Rj(\boldsymbol{\omega})$, где $j(\boldsymbol{\omega})$ – антисимметрическое отображение, определяемое выражением

$$j(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$$

(справа стоит векторное произведение). Вектор $R\boldsymbol{\omega}$ является классическим вектором мгновенной угловой скорости. Дифференцируя второе уравнение (2.1) еще раз и подставляя в первое уравнение, получаем

$$(j(\boldsymbol{\omega}))^2 K_0 + j(\dot{\boldsymbol{\omega}})K_0 = \Lambda$$

Поскольку Λ – симметрическая матрица, то, вычитая из этого соотношения транспонированное, получим

$$[j(\boldsymbol{\omega})]^2 K_0 - K_0[j(\boldsymbol{\omega})]^2 + j(\dot{\omega})K_0 + K_0 j(\dot{\boldsymbol{\omega}}) = 0 \tag{2.2}$$

Таким образом, множители Лагранжа оказываются исключенными. Свойства векторного произведения и оператора вычисления следа позволяют проверить, что

$$[j(\boldsymbol{\omega})]^2 K_0 - K_0[j(\boldsymbol{\omega})]^2 = j\left((K_0\boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}\right), \qquad j(\dot{\boldsymbol{\omega}})K_0 + K_0 j(\dot{\boldsymbol{\omega}}) = j\left[\left(\mathrm{tr}(K_0)I - K_0\right)\dot{\boldsymbol{\omega}}\right].$$

В силу этих соображений и при учете леммы 1 уравнение (2.2) можно привести к виду

$$J_0\dot{\boldsymbol{\omega}} - (J_0\boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega} = 0 \tag{2.3}$$

в котором легко узнается уравнение для кинетического момента.

Умножая скалярно уравнение (2.3) на $\mathbf{z}_0$, получаем: $\langle \mathbf{z}_0, \dot{\boldsymbol{\omega}} \rangle = 0$. Следовательно, $\langle \mathbf{z}_0, \boldsymbol{\omega} \rangle = \mathrm{const}$ и

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = (C/B - 1)\langle \mathbf{z}_0, \boldsymbol{\omega}_0 \rangle j(z_0)\boldsymbol{\omega} \tag{2.4}$$

где обозначено $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0$.

Учитывая это начальное условие, получаем решение уравнения (2.4)

$$\boldsymbol{\omega} = E(t)\boldsymbol{\omega}_0, \quad E(t) = \exp\left[t(C/B - 1)\langle \mathbf{z}_0, \boldsymbol{\omega}_0 \rangle j(\mathbf{z}_0)\right]$$

где $E(t)$ – матрица поворота.

Осталось проинтегрировать уравнение

$$dR/dt = Rj(E\boldsymbol{\omega}_0)$$

Более общая форма этого уравнения была изучена ранее [9–11], однако результат имеет слишком общий и неявный характер. В рассматриваемом частном случае можно предложить простое явное решение. Действительно, поскольку E – матрица поворота, то

$$j(E\boldsymbol{\omega}_0) = Ej(\boldsymbol{\omega}_0)E^{-1}$$

Используя выражение для производной dE/dt, находим

$$d(RE)/dt = RE\left[j(\boldsymbol{\omega}_0) + (C/B-1)\langle \mathbf{z}_0, \boldsymbol{\omega}_0\rangle j(\mathbf{z}_0)\right]$$

Учитывая начальное условие, получаем решение этого уравнения, откуда окончательно получаем

$$R(t) = \exp\left[t\left(j(\boldsymbol{\omega}_0) + \left(\frac{C}{B}-1\right)\langle \mathbf{z}_0, \boldsymbol{\omega}_0\rangle j(\mathbf{z}_0)\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left[-t\left(\frac{C}{B}-1\right)\langle \mathbf{z}_0, \boldsymbol{\omega}_0\rangle j(\boldsymbol{\omega}_0)\right]$$

Следовательно, движение твердого тела является произведением двух вращений: 1) вокруг начального положения (O; $\mathbf{z}_0$) оси симметрии твердого тела; 2) вокруг оси, проходящей через центр масс и направленной вдоль вектора

$$\omega_0 + (C/B-1)\langle \mathbf{z}_0, \boldsymbol{\omega}_0\rangle \mathbf{z}_0.$$

3. Заключение. Рассматривая поворот как элемент семейства неособенных матриц 3×3 с добавлением условия связи $R^TR = RR^T = I$, удается получить простую структуру динамических уравнений твердого тела. Недеформируемость твердого тела принимается во внимание при помощи симметрической матрицы Λ множителей Лагранжа.

Показано, что матрица Λ связана со средним по объему тела значением внутренних напряжений Коши в теле. Простота найденных уравнений позволила наглядно проиллюстрировать решение задачи Эйлера – Пуансо. Полученные уравнения могут быть обобщены на систему твердых тел. Построенный формализм хорошо приспособлен к формированию процедуры построения соответствующих уравнений. В связи с этим заметим, что в настоящее время этот формализм развит для моделирования виртуальной реальности системы многих связанных тел [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кошляков В.Н.* Об уравнениях тяжелого твердого тела, вращающегося около неподвижной точки, в параметрах Родрига – Гамильтона // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 16–25.
2. *Кошляков В.Н.* Об одном случае неустойчивости быстровращающегося тяжелого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 43–50.
3. *Chou J.C.K.* Quaternion kinematic and dynamic differential equations // IEEE Trans. on Roboti. and Automat. 1992. V. 8. № 1. P. 53–64.
4. *Диментберг Ф.М.* Винтовое исчисление и его приложения в механике. М.: Наука, 1965. 199 с.
5. *Cogu G., Coiffet P.* Representation du mouvement des corps regides. Paris: Hermes, 1996.
6. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.
7. *Chevallier D.P.* Groupes de Lie et mecanique des systemes de corps rigides. Mac Graw-Hill, 1984.

8. *Chevallier D.P.* Lie groupes and the mathematical structure of mechanics of multibody systems // Proc. 3rd Int. Workshop on Advances in Robot Kinematics (3ARK). Felloni Ferrara, 1992.
9. *Панов А.П.* Кинематические дифференциальные уравнения для собственных векторов операторов вращения твердого тела // Изв. АН СССР. 1985. МТТ. № 4. С. 26–32.
10. *Панов А.П.* Об операторных кинематических уравнениях вращения твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 44–50.
11. *Панов А.П.* К построению общих решений векторных кинематических уравнений вращения // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 4. С. 52–57.
12. *Isnard F., Dodds G., Vallee C.* Efficient multi-arm closed chain dynamics computation for visualisation // IROS. Grenoble, 1997.

Поступила в редакцию
5.XI.1997

Cedex, Франция