ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 63. Вып. 1, 1999

УДК 531.36

© 1999 г. А.С. Андреев, С.В. Павликов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ НЕАВТОНОМНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Исследуется асимптотическая устойчивость и неустойчивость по части переменных нулевого решения функционально-дифференциального уравнения запаздывающего типа посредством предельных уравнений и функционала Ляпунова, имеющего знакопостоянную производную. На основе полученных теорем решается задача о стабилизации управляемых механических систем с запаздывающей обратной связью. В качестве примеров решаются задачи об одно- и трехосной стабилизации вращательного движения твердого тела с запаздыванием в системе регулирования.

1. Основные определения. Предельные уравнения. Пусть R^m и R^p – линейные действительные пространства m- и p-векторов с нормами $|\mathbf{y}|$ и $|\mathbf{z}|$, R^n – линейное действительное пространство n-векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_m, z_1, z_2, ..., z_p) = (\mathbf{y}, \mathbf{z})$ с нормой $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| + |\mathbf{z}|$, $n = m + p$; $h > 0$ – некоторое действительное число, $C^{(n)}$ – банахово пространство непрерывных функций $\varphi : [-h, 0] \to R^n$ с нормой $\|\varphi\| = \sup(|\varphi(s)|, -h \leqslant s \leqslant 0)$, $C_H^{(m)} = \{\varphi_{(y)} \in C^{(m)} : \|\varphi_{(y)}\| < H < +\infty\}$, $\overline{C}_l^{(m)} = \{\varphi_{(y)} \in C^{(m)} : \|\varphi_{(y)}\| \leqslant l\}$ (для $\overline{C}_r^{(p)}$ аналогично). Обозначим: $\varphi = (\varphi_{(y)}, \varphi_{(z)})$. Для непрерывной функции $\mathbf{x} :]-\infty, +\infty[\to R^n$ и каждого $t \in R$ функция $\mathbf{x}_t \in C^{(n)}$ определяется равенством $\mathbf{x}_t(s) = \mathbf{x}(t + s)$ для $-h \leqslant s \leqslant 0$.

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение с конечным запаздыванием

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_t), \quad \mathbf{f}(t, 0) = 0 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{f} : R^+ \times \Lambda \to R^n$, $\Lambda = C_H^{(m)} \times C^{(p)}$ – непрерывное отображение, удовлетворяющее $\mathbf{z}$-продолжимости решений уравнения (1.1), т.е. каждое решение уравнения (1.1) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha, \varphi)$, $\mathbf{x}_\alpha(\alpha, \varphi) = \varphi$, определено для всех $t \geqslant \alpha$, для которых $|\mathbf{y}(t, \alpha, \varphi)| \leqslant H_1 < H$. Это условие означает, что ни одна из координат $z_j(t, \alpha, \varphi)$ за конечное время не уходит в бесконечность [1].

Предположим, что правая часть (1.1) удовлетворяет также следующим предположениям.

Предположение 1.1. Для каждой пары r, l, $0 < r < H$, $l > 0$ существует $M = M(r\, l)$, такое, что для $(t, \varphi) \in R^+ \times \overline{C}_r \times \overline{C}_l$ выполняется неравенство

$$|\mathbf{f}(t, \varphi)| \leqslant M \tag{1.2}$$

При этом предположении можно доказать следующую лемму [2, 3].

Лемма 1.1. Пусть выполняется предположение 1.1, и $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha, \varphi)$ – решение (1.1), определенное и ограниченное для всех $t \geqslant \alpha - h$. Тогда семейство функций $\{\mathbf{x}_t(\alpha, \varphi) : t \geqslant \alpha\}$ предкомпактно.

Предположение 1.2. Функция $\mathbf{f}(t, \varphi)$ удовлетворяет условию Липшица по φ на каждом компактном множестве $K \subset \Lambda$, т.е. существует $l = l(K)$, такое что для любых φ_1, $\varphi_2 \in K$ выполняется неравенство

$$|\mathbf{f}(t, \varphi_2) - \mathbf{f}(t, \varphi_1)| \leqslant l \, ||\varphi_2 - \varphi_1|| \tag{1.3}$$

При таком условии решение (1.1) для каждой начальной точки $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times \Lambda \mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha, \varphi)$ существует, единственно и непрерывно зависит от начальных данных [4].

Предположение 1.3. Функция $\mathbf{f}(t, \varphi)$ равномерно непрерывна на каждом множестве $R^+ \times K$, где $K \subset \Lambda$ – произвольное компактное множество из Λ, так что $\forall K \subset \Lambda$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists m = m(K)$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, так что $\forall$ (t_1, φ_1), $(t_2\, \varphi_2) \in R^+ \times K$, $|t_2 - t_1| \leqslant \delta$, $||\varphi_2 - \varphi_1|| \leqslant \delta$ имеет место соотношение

$$|\mathbf{f}(t_2, \varphi_2) - \mathbf{f}(t_1, \varphi_1)| < \varepsilon$$

При этом уравнение (1.1) будет предкомпактным в некотором пространстве F непрерывных функций $\mathbf{f} : R^+ \times \Gamma \to R^n$, где Γ – некоторое множество в Λ, содержащее $\{\mathbf{x}_t(\alpha, \varphi), \varphi \in \Lambda, t \geqslant \alpha + h\}$ каждого решения (1.1) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha, \varphi)$ [3].

Определение 1.1 Функция $\mathbf{f}^* : R^+ \times \Gamma \to R^n$ называется предельной к $\mathbf{f}$, если существует последовательность $t_n \to +\infty$, такая, что $\{\mathbf{f}(t + t_n, \varphi)\}$ равномерно сходится к $\mathbf{f}^*(t, \varphi)$ в F. Уравнение

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{x}_t) \tag{1.4}$$

называется предельным к (1.1).

Взаимосвязь решений уравнений (1.1) и (1.4) определяется следующей теоремой [2, 3].

Теорема 1.1 Пусть функция $\mathbf{f}^* : R^+ \times \Gamma \to R^n$ – предельная к $\mathbf{f}$ в F относительно последовательности $t_n \to +\infty$, а последовательности $\{\alpha_n \in R^+\}$ и $\{\varphi_n \in \Gamma\}$ таковы, что $\alpha_n \to \alpha \in R^+$, $\varphi_n \to \varphi \in \Gamma$ при $n \to \infty$. Тогда, если $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, t_n + \alpha_n, \varphi_n)$ – решения уравнения (1.1), а $\mathbf{x}^*(t, \alpha, \varphi)$ – решение уравнения $\dot{\mathbf{x}}(t) = f^*(t, \mathbf{x}_t)$, определенное для $t \in [\alpha - h, \beta[$, то последовательность функций $\mathbf{x}(t_n + t, t_n + \alpha_n, \varphi_n)$ сходится к $x^*(t, \alpha, \varphi)$ равномерно по $t \in [\alpha - h, \gamma]$ для каждого $\gamma < \beta$.

2. Теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости по части переменных при предположении ограниченности решений по неконтролируемым координатам. Исследуем задачу об устойчивости уравнения (1.1) относительно части переменных $(x_1, \ldots, x_m) = (y_1, \ldots, y_m)$ с применением предельных уравнений и предельных функционалов.

Пусть $V(t, \varphi) : R^+ \times \Lambda \to R$ – некоторый функционал, определенный и непрерывный по совокупности аргументов [3]. Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha, \varphi)$ – некоторое решение (1.1), определенное для всех $t \geqslant \alpha - h$. Тогда для $V(t) = V(t, \mathbf{x}_t(\alpha, \varphi))$ можно определить верхнюю правостороннюю производную

$$\dot{V}(\alpha, \varphi) = \lim_{h \to 0^+} \sup \frac{1}{h}(V(\alpha + h) - V(\alpha))$$

Допустим, что для производной $\dot{V}$ имеет место оценка

$$\dot{V}(t, \varphi) \leqslant -W(t, \varphi) \leqslant 0, \quad \forall (t, \varphi) \in R \times \Lambda$$

где непрерывный функционал $W = W(t, \varphi)$ ограничен и равномерно непрерывен на каждом множестве $R^+ \times K$, K – компакт из Λ.

Определение 2.1. Пусть $t_n \to +\infty$ – некоторая последовательность. Для каждого $t \in R$ и $c \in R$ определим множество $V_\infty^{-1}(t, c) \subset \Lambda$ следующим образом: точка

$\varphi \in V_\infty^{-1}(t,c)$, если существует последовательность $\{\varphi_n \in \Gamma, \varphi_n \to \varphi\}$, такая, что $\lim_{n\to+\infty} V(t+t_n, \varphi_n) = c$.

Как и в случае $\mathbf{f}(t, \varphi)$, при условии относительно $W(t, \varphi)$ семейство сдвигов $\{W^\tau(t, \varphi), \tau \in R^+\}$ предкомпактно в некотором функциональном пространстве непрерывных функционалов $F = \{G : R \times \Gamma \to R\}$ с метризуемой компактно открытой топологией.

Определение 2.2. Функционал $W^* \in F_G$ называется предельным к W, если существует последовательность $t_n \to +\infty$, такая что $\{W^{(n)}(t, \varphi) = W(t_n + t, \varphi)\}$ сходится к $W^*(t, \varphi)$ в F_G. При этом множество $V_\infty^{-1}(t,c)$, определяемое той же последовательностью $t_n \to +\infty$, определим как соответствующее W^*.

Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha, \varphi)$ – решение уравнения (1.1), определенное для всех $t \geqslant \alpha - h$, $\mathbf{x}_t^{(n)}(\alpha,\varphi) = \mathbf{x}(t_n + s, \alpha, \varphi)$ $(-h \leqslant s \leqslant 0)$. Положительное предельное множество $\Omega^+(\mathbf{x}_t(\alpha, \varphi))$ в пространстве C_H есть множество $\Omega^+ = \{\varphi^* \in C_H : \exists t_n \to +\infty, n \to \infty, \mathbf{x}_t^{(n)}(\alpha,\varphi) \to \varphi^* \text{ при } n \to \infty\}$.

Имеют место следующие результаты о локализации $\Omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$, несложно выводимые из [2, 3].

Теорема 2.1 Предположим, что

1) $V(t, \varphi) : R^+ \times \Lambda \to R$ – непрерывный функционал, ограниченный снизу на каждом компакте $K \subset \Lambda$, т.е. $V(t, \varphi) \geqslant m(K)$ $\forall (t, \varphi) \in R^+ \times K$, его производная

$$\dot V(t,\varphi) \leqslant -W(t,\varphi) \leqslant 0, \quad \forall (t,\varphi) \in R^+ \times \Lambda$$

2) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha, \varphi)$ – решение (1.1), такое, что $|\mathbf{y}(t,\alpha,\varphi)| \leqslant \tau < H$, $|\mathbf{z}(t,\alpha,\varphi)| \leqslant \tau_1 < +\infty$ для всех $t \geqslant \alpha - h$.

Тогда имеется $c = c_0 \geqslant m$, при котором для каждой предельной точки $\varphi^* \in \Omega^+(\mathbf{x}_t(\alpha,\varphi))$ существуют предельная совокупность $(\mathbf{f}^*, W^*)$ с $V_\infty^{-1}(t,c)$ и решение $\mathbf{x}^*(t, 0, \varphi^*)$ уравнения $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{x}_t)$ такие, что множество $\{\mathbf{x}_t^*(0,\varphi^*) : t \in R\} \subset \Omega^+(\mathbf{x}_t(\alpha,\varphi))$ и $\{\mathbf{x}_t^*(0,\varphi^*) : t \in R\} \subset \{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0 = \text{const})\} \cap \{W^*(t,\varphi) = 0\}$.

Следствие 2.1. Если в условиях теоремы 2.1 предположить также, что для каждого $c_0 > c_1$ найдется некоторая предельная пара $(\mathbf{f}^*, W^*)$ с множеством $V_\infty^{-1}(t,c)$, такие, что множество $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0 = \text{const} > c_1\} \cap \{W^*(t,\varphi) = 0\}$ не содержит решений $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{x}_t)$, тогда дополнительно к утверждению теоремы 2.1 имеет место соотношение

$$\lim_{t\to+\infty} V(t, \mathbf{x}_t(\alpha,\varphi)) = c_0 = \text{const} \leqslant c_1.$$

Эти результаты позволяют доказать следующие теоремы, в которых $\omega : R^+ \to R^+$ – функция типа Хана [1].

Теорема 2.2. Предположим, что

1) решения уравнения (1.1) из некоторой окрестности N точки $\mathbf{x} = 0$ ограничены по $\mathbf{z}$;

2) существует непрерывный функционал $V : R^+ \times \Lambda \to R^+$, такой, что

$$V(t,0) \equiv 0, \quad V(t,\varphi) \geqslant \omega_1(|\varphi_{(y)}(0)|), \quad \dot V(t,\varphi) \leqslant -W(t,\varphi) \leqslant 0$$

для всех $(t,\varphi) \in R^+ \times \Lambda$;

3) для каждой предельной пары $(\mathbf{f}^*, W^*)$ с множеством $V_\infty^{-1}(t,c)$ множество $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = \text{const} \geqslant 0\} \cap \{W^*(t,\varphi) = 0\}$ не содержит решений уравнения $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{x}_t)$, кроме решений $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (\mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t))$, таких, что $\mathbf{y} = 0$.

Тогда решение (1.1) $\mathbf{x} = 0$ асимптотически y-устойчиво.

Доказательство. Из условия 2 теоремы следует y-устойчивость нулевого решения (2.1) [5]. Следовательно, для каждого числа $H_1 < H$ найдется $\delta = \delta(H_1\ \alpha) > 0$, такое, что из $\|\varphi\| \leqslant \delta$ следует $|\mathbf{y}|(t,\alpha,\varphi)|\leqslant H_1$, $\forall t \geqslant \alpha$. Отсюда и из условия 1 теоремы следует, что каждое решение (1.1) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha, \varphi)$ из окрестности $N \cap \{\|\mathbf{x}\| \leqslant \delta\}$ будет таким, что

$$|\mathbf{y}(t,\alpha,\varphi)| \leqslant H_1 < H, \quad |\mathbf{z}(t,\alpha,\varphi)| \leqslant l < +\infty, \quad \forall t \geqslant \alpha$$

Тогда из условий 2 и 3, применяя теорему 2.1, получаем, что $\lim_{t\to+\infty}\mathbf{y}(t, \alpha, \varphi) = 0$.

Теорема доказана.

Используя следствие 2.1, докажем следующую теорему.

Теорема 2.3. Предположим, что

1) выполняются условия 1 и 2 теоремы 2.2;

2) существует предельная пара $(\mathbf{f}^*, W^*)$ с множеством $V_\infty^{-1}(t,c)$, такие, что для каждого значения $c_0 > 0$ множество $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0 = \text{const} > 0\} \cap \{W^*(t,\varphi) = 0\}$ не содержит решений уравнения $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{x}_t)$.

Тогда решение (1.1) $\mathbf{x} = 0$ асимптотически $\mathbf{y}$-устойчиво равномерно по φ.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 2.2, получаем, что для каждого решения (1.1) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha, \varphi)$, определенного для всех $t \leqslant \alpha$, из окрестности $N \cap \{\|\mathbf{x}\| \leqslant \delta\}$, будет выполняться неравенство $|\mathbf{y}(t,\alpha,\varphi)| \leqslant r < H$, $|\mathbf{z}(t,\alpha,\varphi)| \leqslant l < +\infty$, $\forall t \geqslant \alpha$.

Далее из условия 2 теоремы, согласно следствию 2.1, вдоль каждого решения $\mathbf{x}(t, \alpha, \varphi)$ из области $N \cap \{\|\mathbf{x}\| \leqslant \delta\}$ имеем: $V(t, \mathbf{x}_t(\alpha, \varphi))$ монотонно убывая, стремится к нулю при $t \to +\infty$.

Пусть область $\Lambda_1 \subset \Lambda$ содержится в области устойчивости $\mathbf{x} = 0$ для произвольно данного $\alpha \geqslant 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольно малое число. Можно показать, что множество $K(\alpha, \alpha + h) = \{\mathbf{x}_{\alpha+h}(\alpha, \varphi) : \varphi \in \Lambda_1\}$ в силу предположения 1.1 компактно. Из свойства $V(t, \mathbf{x}_t(\alpha, \varphi)) \to 0$, $t \to +\infty$, непрерывности V и непрерывной зависимости решений от начальных условий следует, что найдется число $T = T(\varepsilon, \alpha + h) > 0$, такое, что

$$V(\alpha+h+T,\ x_{\alpha+h+T}(\alpha+h,\varphi)) < \omega_1(\varepsilon)$$

для всех $\varphi \in K(\alpha, \alpha + h)$. Следовательно, из определения множества $K(\alpha, \alpha + h)$ и условия 1 теоремы получаем, что для всех $t \geqslant \alpha + h + T$, $\varphi \in \Lambda_1$ выполнено неравенство $V(t, \mathbf{x}_t(\alpha, \varphi)) < \omega_1(\varepsilon)$. Следовательно, $|y_t(\alpha,\varphi)| < \varepsilon$, $\forall t \geqslant \alpha$.

Теорема доказана.

Теорема 2.4. Предположим, что

1) решения уравнения (1.1) из некоторой окрестности N точки $\mathbf{x} = 0$ ограничены по $\mathbf{z}$;

2) существует ограниченный снизу непрерывный функционал $V : R^+ \times \Lambda \to [m, +\infty)$, принимающий в любой малой окрестности $\mathbf{x} = 0$ отрицательные значения, такой, что

$$V(t,0) \equiv 0, \quad \dot{V}(t,\varphi) \leqslant -W(t,\varphi) \leqslant 0$$

для всех $t \in R^+, \varphi \in \Lambda$;

3) для каждого значения $c_0 < 0$ существует предельная пара $(\mathbf{f}^*, W^*)$ с множеством $V_\infty^{-1}(t,c)$, такие, что множество $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0\} \cap \{W^*(t,\varphi) = 0\}$ не содержит решений уравнения $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{x}_t)$.

Тогда решение (1.1) $\mathbf{x} = 0$ $\mathbf{y}$-неустойчиво.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha, \varphi)$ – решение (1.1) с начальной точкой (α, φ), $\varphi \in N$, $V(\alpha, \varphi) < 0$. Покажем, что решение $\mathbf{x}(t, \alpha, \varphi)$ таково, что для произвольного H_1, $0 < H_1 < H$ найдется значение $t^* > \alpha$, при котором $|\mathbf{y}(t^*, \alpha, \varphi)| = H_1$.

Допустим противное: для данного решения $|\mathbf{y}(t, \alpha, \varphi)| < H_1$ при всех $t \geqslant \alpha$. Тогда согласно условию 1 теоремы $|\mathbf{z}(t, \alpha, \varphi)| \leqslant l < +\infty$. Согласно условию 2 существует число $c_0 < 0$, такое, что $\lim_{t\to+\infty} V(t, \mathbf{x}_t(\alpha, \varphi)) = c_0 < 0$. По теореме 2.1 существует решение $\mathbf{x}^*(t) \subset \Omega^+(\mathbf{x}_t(\alpha, \varphi))$ уравнения $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{x}_t)$, такое, что

$$\mathbf{x}^*(t) \subset \{V_\infty^{-1}(t, c) : c = c_0\} \cap \{W^*(t, \varphi) = 0\}, \ \ \forall t \in R$$

Это противоречит условию 2, что и доказывает теорему.

Теорема 2.5. Предположим, что

1) решения уравнения (1.1) из некоторой окрестности N точки $\mathbf{x} = 0$ равномерно ограничены по $\mathbf{z}$;

2) существует непрерывный функционал $V : R^+ \times \Lambda \to R^+$, ограниченный и равномерно непрерывный на каждом множестве $R^+ \times K$ ($K \subset \Lambda$ – компакт), такой, что

$$\omega_1(|\varphi_{(\mathbf{y})}(0)|) \leqslant V(t, \varphi) \leqslant \omega_2(\|\varphi\|), \ \ V(t, 0) \equiv 0$$

$$\dot{V}(t, \varphi) \leqslant -W(t, \varphi) \leqslant 0, \ \ (t, \varphi) \in R^+ \times \Lambda$$

3) каждая предельная совокупность $(\mathbf{f}^*, V^*, W^*)$ такова, что множество $\{V^*(t, \varphi) = c > 0\} \cap \{W^*(t, \varphi) = 0\}$ не содержит решений уравнения $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{x}_t)$.

Тогда решение (1.1) $\mathbf{x} = 0$ равномерно асимптотически y-устойчиво.

Доказательство. Из условия 2 теоремы следует, что нулевое решение (1.1) равномерно $\mathbf{y}$-устойчиво [4]. При этом каждое решение (1.1) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha, \varphi)$ из области $\Lambda_0 = \{\|\varphi\| \leqslant H_0 = \omega_2^{-1}(\omega_1(H_1)), \ H_1 < H\}$ ограничено по $\mathbf{y}$, т.е. $|\mathbf{y}(t, \alpha, \varphi)| \leqslant H_1 < H$ при всех $t \geqslant \alpha$. Из условия 1 теоремы решения следует, что решение (1.1) из окрестности $N_0 = N \cap \Lambda_0$ точки $\mathbf{x} = 0$ таковы, что

$$|\mathbf{y}(t, \alpha, \varphi)| \leqslant H_1 < H, |\mathbf{z}(t, \alpha, \varphi)| \leqslant l < +\infty, \forall t \geqslant \alpha$$

Как и в теореме 2.3, получаем, что вдоль каждого решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha, \varphi)$ из N_0 функционал $V(t, \mathbf{x}_t(\alpha, \varphi))$, монотонно убывая, стремится к нулю при $t \to +\infty$.

Покажем, что $V(t, \mathbf{x}_t(\alpha, \varphi)) \to 0$ при $t \to +\infty$ равномерно по $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times N_0$. Это свойство, как следует из условия 2 теоремы, является достаточным для доказательства.

Предположим противное, а именно: существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для произвольной последовательности $t_k \to +\infty$ найдется последовательность $(\alpha_k, \varphi_k) \in R^+ \times N_0$, для которой

$$V(\alpha_k + t_k, \ \mathbf{x}_{\alpha_k + t_k}(\alpha_k, \varphi_k)) \geqslant \varepsilon_0$$

При этом, очевидно, для $t \in [\alpha_k, \alpha_k + t_k]$ имеет место неравенство

$$V(t, \mathbf{x}_t(\alpha_k, \varphi_k)) \geqslant \varepsilon_0 \tag{2.1}$$

Положим $\beta_k = \alpha_k + t_k/2$. Пусть, без ограничения общности, последовательности $\{\mathbf{f}^{(k)}(t, \varphi) = \mathbf{f}(\beta_k + t, \varphi)\}$, $\{V^{(k)}(t, \varphi)\}$, $\{W^{(k)}(t, \varphi)\}$ сходятся соответственно к $\mathbf{f}^*(t, \varphi)$, $V^*(t, \varphi)$, $W^*(t, \varphi)$. По теореме 1.1 последовательность $\mathbf{x}(\beta_k + t, \ \beta_k, \psi_k), \psi_k = \mathbf{x}_{\beta_k}(\alpha_k, \varphi_k)$ сходится равномерно по $t \in [0, T]$ к решению $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(t, 0, \psi)$ уравнения $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{x}_t)$.

Для $V^*(t, \varphi)$ согласно (2.1) получаем, что

$$V^*(t, \mathbf{x}_t^*(t, 0, \psi)) \geq \varepsilon_0 > 0 \tag{2.2}$$

при всех $t \geq 0$, $\psi \in \overline{C}_{H_1}^{(m)} \times \overline{C}_l^{(p)}$.

С другой стороны, из условия 2 теоремы следует

$$V(t+\beta_k, \mathbf{x}_{t+\beta_k}(\beta_k, \psi_k)) - V(\beta_k, \mathbf{x}_{\beta_k}(\beta_k, \psi_k)) \leq -\int_{\beta_k}^{t+\beta_k} W(s, \mathbf{x}_s(\beta_k, \psi_k))ds =$$

$$= -\int_0^t W(s+\beta_k, \mathbf{x}_{s+\beta_k}(\beta_k, \psi_k))ds \leq 0, \quad t \geq 0$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $k \to +\infty$, получаем

$$V^*(t, \mathbf{x}_t^*(0, \psi)) - V^*(0, \psi) \leq -\int_0^t W^*(s, \mathbf{x}_s^*(0, \psi))ds \leq 0$$

Отсюда следует, что функция $V^*(t, \varphi)$ вдоль решения $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(t, 0, \psi)$ уравнения $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{x}_t)$ монотонно убывает, удовлетворяя неравенству (2.1).

Из условия 3 теоремы следует, что каждая предельная к $(\mathbf{f}^*, V^*, W^*)$ совокупность $(\mathbf{f}^{**}, V^{**}, W^{**})$ такова, что множество $\{V^{**}(t, \varphi) = c = \mathrm{const} > 0\} \cap \{W^{**}(t, \varphi) = 0\}$ не содержит решений уравнения $\dot{x} = f^{**}(t, x_t)$. Следовательно, $V^*(t, \mathbf{x}_t^*(0, \psi))$, монотонно убывая, стремится к нулю при $t \to +\infty$. Это противоречит неравенству (2.2), что и доказывает теорему.

Результаты этого раздела развивают и обобщают результаты работ [1–11].

3. Стабилизация управляемых механических систем. Рассмотрим управляемую механическую систему, стесненную голономными стационарными связями и описываемую n обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_n$, на которую, кроме сил управления $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, действуют диссипативные силы, так что движение системы описывается уравнениями

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = u_i - \sum_{j=1}^n f_{ij}\dot{q}_j(t) \quad \left(T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j\right) \tag{3.1}$$

где T – кинетическая энергия системы, $\|f\|$ – положительно определенная матрица.

Рассмотрим задачу о стабилизации положения равновесия $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} = 0$ системы (3.1) по скоростям и координатам при наличии обратной запаздывающей связи. Покажем, что эта задача решается управлением u в виде

$$u_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}(q_1(t - r_{i1}(t)), \ldots, q_n(t - r_{in}(t)) \tag{3.2}$$

где $\Pi = \Pi(\mathbf{q})$ – определенно-положительная функция, такая, что

$$\Pi(0) = 0, \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)^2 \geq \omega(\|\mathbf{q}\|)$$

функции $r_{ij}(t)$ являются ограниченными, $0 < r_{ij} \leq h$, и равномерно непрерывными при $t \in R^+$.

Предельная к (3.1) система имеет аналогичный вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}(q_1(t - r_{i1}^*(t)), \ldots, q_n(t - r_{in}^*(t)) - \sum_{j=1}^n f_{ij}\dot{q}_j(t) \tag{3.3}$$

Предполагаем, что $\|f\|$ – положительно определенная матрица, μ – минимальное собственное значение матрицы $\|f\|$, при этом

$$c_0 = \max_{i,j}\left|\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_i \partial q_j}\right| < \frac{\mu}{hn}$$

Возьмем функционал Ляпунова в виде

$$V(t,\dot{q}_t,q_t) = T(q_1(t),...,q_n(t)) + \Pi(q_1(t),...,q_n(t)) + \int_{-h}^{0}\int_{s}^{0}\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}\dot{q}_j(t+u)\dot{q}_i(t+u)duds$$

Видно, что этот функционал удовлетворяет условиям

$$\omega_1(|\mathbf{q}(t)|) + \omega_2(|\dot{\mathbf{q}}(t)|) \leqslant V \leqslant \omega_1(\|\mathbf{q}_t\|) + \omega_2(\|\dot{\mathbf{q}}_t\|)$$

Для производной $\dot{V}$ получаем оценку

$$\dot{V}(t,\dot{\mathbf{q}}_t,\mathbf{q}_t) \leqslant -\int_{-h}^{0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mu}{h} - c_0 n\right)\left(\dot{q}_i^2(t) + \dot{q}_i^2(t+s)\right)ds \leqslant 0 \tag{3.4}$$

Положим функционал $W(t,\dot{\mathbf{q}}_t)$ равный величине, заключенной между знаками неравенства в (3.4). Тогда множество $\{\mathbf{W}^*(t,\dot{\mathbf{q}}_t)=0\} \equiv \{\dot{\mathbf{q}}(t)\equiv 0\}$.

Подставив значение $\dot{\mathbf{q}} = 0$ в уравнение (3.3), получаем, что множество $\{W^*(t,\dot{\mathbf{q}}_t)=0\}$ не содержит решений уравнения (3.3), кроме $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} = 0$.

Используя теорему 2.5, получаем, что управление (3.2) обеспечивает стабилизацию положения равновесия $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} = 0$ до равномерной асимптотической устойчивости.

Аналогичным образом можно показать, что если координаты $q_{m+1}, ..., q_n$ – угловые (mod2π), то управление (3.2), где $\Pi = \Pi(\mathbf{q})$ – определенно-положительная функция по $q_1, ..., q_m$ и

$$\Pi(0) = 0\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}\right)^2 \geqslant \omega\left(\sum_{i=1}^{m} q_i^2\right)$$

обеспечивает стабилизацию положения равновесия $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} = 0$ по $\dot{q}_1,...,\dot{q}_n,q_1,...,q_m$.

Полученные результаты развивают результаты работ [9, 12, 13].

4. Примеры. *Задача синтеза управляющего момента, обеспечивающего асимптотическую устойчивость заданной трехосной ориентации твердого тела с переменными моментами инерции, вращающегося вокруг неподвижной точки.* Пусть $OXYZ$ – неподвижная система координат, $Oxyz$ – система координат, неизменно связанная с телом, оси Ox, Oy, Oz сохраняют неизменные направления в теле и выбираются из задачи ориентации $Oxyz$ относительно $OXYZ$. Вращательное движение тела относительно центра масс может быть описано динамическими уравнениями Эйлера

$$(\dot{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M} \tag{4.1}$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ – угловая скорость тела в проекциях на оси Ox, Oy, Oz; $\mathbf{I}(t)$ – главный тензор инерции в осях $Oxyz$, предполагаемый положительно определенной ограниченной матрицей; $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)^T$ – момент, вызванный действием внешних сил и смещениями подвижных масс тела.

В качестве кинематических уравнений выберем уравнения в параметрах Родрига–Гамильтона [14]

$$2\dot{\lambda}_0 = -\lambda_1\omega_1 - \lambda_2\omega_2 - \lambda_3\omega_3 \tag{4.2}$$

$$2\dot{\lambda}_1 = \lambda_0\omega_1 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2 \ (1\ 2\ 3)$$

Совпадение базисов $OXYZ$ и $Oxyz$ соответствует кватернионам $Ł = (1, 0, 0, 0)$ и $Ł = (-1, 0, 0, 0)$.

Решим задачу о трехосной стабилизации как задачу о нахождении момента **M**, создаваемого системой регулирования с запаздыванием, обеспечивающего равномерную асимптотическую устойчивость положения равновесия

$$\omega = 0, \quad Ł = (1, 0, 0, 0) \tag{4.3}$$

Покажем, что решение поставленной задачи достигается определением момента **M** в виде

$$\mathbf{M} = -\mathbf{R}(t)\boldsymbol{\omega} - \alpha\overline{\boldsymbol{\lambda}}(t - r(t)), \quad \overline{\boldsymbol{\lambda}} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T, \quad r(t) \leqslant h, h > 0 \tag{4.4}$$

где $\alpha > 0$ – произвольное число, $\mathbf{R}(t)$ – ограниченная матрица, выбираемая из условия, что $(2\mathbf{R}(t) - \dot{\mathbf{I}}(t))$ – положительно-определенная матрица.

Уравнения (4.1) тогда перепишутся в виде

$$(\dot{\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = -\mathbf{R}(t)\boldsymbol{\omega} - \alpha(\overline{\boldsymbol{\lambda}}(t) - \int_{-r(t)}^{0} \dot{\overline{\boldsymbol{\lambda}}}(s)ds). \tag{4.5}$$

Если эти уравнения разрешить относительно $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, то предельные к ним уравнения будут иметь вид

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \{\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{A}^*(t)\boldsymbol{\omega}\} + \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{B}^*(t) - \alpha \mathbf{C}^*(t)(\overline{\boldsymbol{\lambda}}(t) - \int_{-r^*(t)}^{0} \dot{\overline{\boldsymbol{\lambda}}}(s)ds) \tag{4.6}$$

где $\{\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{A}^*(t)\boldsymbol{\omega}\}$ – квадратичные относительно $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ формы, $\mathbf{B}^*(t)$, $\mathbf{C}^*(t)$ – матрицы, при этом $\det(\mathbf{C}^*(t)) \geqslant c = \text{const} > 0$.

Обозначим через a минимальное собственное значение матрицы $(2\mathbf{R}(t) - \dot{\mathbf{I}}(t))$. Пусть $a > 3h\alpha$. Тогда для некоторого c_0 имеем $a = hc_0 + 3h\alpha$.

Возьмем функционал Ляпунова в виде

$$V = \boldsymbol{\omega}(t)^T \mathbf{I}(t)\boldsymbol{\omega}(t) + 2\alpha((1 - \lambda_0(t))^2 + \lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t) + \lambda_3^2(t)) +$$
$$+ \int_{-h}^{0}\int_{s}^{0} \frac{3}{2} a(\omega_1^2(t+u) + \omega_2^2(t+u) + \omega_3^2(t+u))duds$$

Этот функционал определенно-положителен, допускает бесконечно малый высший предел в точке (4.3), имеет производную в силу (4.5)

$$\dot{V} \leqslant -\alpha h \boldsymbol{\omega}^T(t)\boldsymbol{\omega}(t) \leqslant 0$$

Множество $\{\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0\}$ содержит лишь те решения уравнений (4.2) и (4.6), для которых $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_0 = +1$ или $\lambda_0 = -1$. На основании теоремы 2.5 положение равновесия (4.3) равномерно асимптотически устойчиво.

Задача об одноосной ориентации твердого тела при помощи управляющих моментов. Рассматривается твердое тело, имеющее неподвижную точку O. Пусть $OXYZ$ – инерциальная система координат, $Oxyz$ – система координат, жестко связанная с телом, ψ – угол прецессии, θ – угол нутации, φ – угол собственного вращения. Движение такого тела можно описать в углах Эйлера уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = u_\psi, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = u_\theta, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = u_\varphi \tag{4.7}$$

$$T = \frac{1}{2}(A(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi)^2 + B(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi)^2 + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2)$$

Определим управление $u = (u_\psi, u_\theta, u_\varphi)^T$ таким образом, чтобы обеспечить стабилизацию оси Ox вдоль оси OZ, т.е. стабилизацию множества движений $\{\dot\varphi = \dot\theta = 0, \dot\psi = \text{const}, \varphi = \theta = \pi/2\}$. Покажем, что задача решается управлением вида

$$
\begin{aligned}
u_\psi &= 0 \\
u_\theta &= -k_{11}\dot\theta - k_{12}\dot\varphi - a\sin\varphi(t - r_1(t))\cos(\theta(t - r_2(t)) \\
u_\varphi &= -k_{21}\dot\theta - k_{22}\dot\varphi - a\cos\varphi(t - r_1(t))\sin(\theta(t - r_2(t))
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

где $\|k_{ij}\|$ – положительно-определенная матрица, μ – минимальное собственное значение этой матрицы, $r_i(t)$ – равномерно непрерывные функции при $t \in R^+$, при этом $0 < r_i(t) \leqslant h = \text{const}$, $0 < a < \mu/2h$.

Предельные к (4.7) уравнения имеют аналогичный вид с правыми частями, предельными к значениям (4.8).

Рассмотрим функционал Ляпунова

$$
V = T + \alpha(1 - \sin\varphi\sin\theta) + \frac{1}{2h}\int_{-h}^{0}\int_{s}^{0} (k_{11}\dot\theta^2(t+u) + 2k_{12}\dot\varphi(t+u)\dot\theta(t+u) + k_{22}\dot\varphi^2(t+u))du ds
$$

Для производной этого функционала находим

$$
\dot V \leqslant -W \leqslant 0
$$

$$
W = \int_{-h}^{0} \left(\frac{\mu}{2h} - a\right)(\dot\theta^2(t) + \dot\theta^2(t+s) + \dot\varphi(t)^2 + \dot\varphi^2(t+s))ds
$$

Множество $\{W^* = 0\} = \{\dot\varphi = \dot\theta = 0\}$ содержит из решений предельного уравнения (4.8) только

$$
\dot\theta = \dot\varphi = 0, \quad \varphi = \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot\psi = \text{const}.
$$

По теореме 2.5 получаем стабилизацию оси Ox вдоль оси OZ или асимптотическую устойчивость положения равновесия

$$
\dot\psi = \dot\theta = \dot\varphi = 0, \quad \varphi = \theta = \pi/2
$$

по $(\dot\theta, \dot\varphi, \theta, \varphi)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
2. *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономного функционально-дифференциального уравнения // Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением. Новосибирск: Наука, 1991. С. 36–40.
3. *Андреев А.С., Хусанов Д.Х.* Предельные уравнения в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 34. С. 435–440.
4. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
5. *Калистратова Т.А.* Об устойчивости по части переменных систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1986. № 5. С. 32–37.
6. *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы относительно части переменных // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 707–713.

7. *Андреев А.С.* Об исследовании частичной асимптотической устойчивости и неустойчивости на основе предельных уравнений // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 253–259.
8. *Андреев А.С.* Об исследовании частичной асимптотической устойчивости // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 539–547.
9. *Воротников В.И.* Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991, 287 с.
10. *Воротников В.И.* К теории устойчивости по отношению к части переменных // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 553–561.
11. *Озиранер А.С., Румянцев В.В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных // ПММ. 1974. Т. 36. Вып. 2. С. 364–384.
12. *Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.* О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования. // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
13. *Осипов Ю.С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 5. С. 605–618.
14. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.

Ульяновск

Поступила в редакцию
15.I.1998