УДК (531.36 + 539.3):534.1

© 1999 г. А.В. Степанов

ГАШЕНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СИСТЕМ ПРИ ПОМОЩИ ГИРОСКОПОВ

Рассматривается гашение свободных колебаний упругой системы общего вида, к которой присоединяется двухстепенной гироскоп. Связь между упругой системой и наружной рамкой гироскопа – жесткая, а между рамками – упруго-вязкая. Параметры этой связи должны быть подобраны так, чтобы свободные колебания, соответствующие первой моде, затухали как можно быстрее. Для случая упругой системы с одной степенью свободы приводится решение задачи в явном виде.

Автором и другими исследователями рассматривались гасители свободных колебаний в виде точечных масс, присоединяемых к упругим системам линейными упруго-вязкими связями [1–4]. Показано, что если гаситель свободный, то декремент затухания свободных колебаний не может быть больше некоторого значения, зависящего от свойств упругой системы, от ориентации и точки прикрепления гасителя; максимум декремента затухания, соответствующего первой моде собственных колебаний упругой системы, по коэффициентам жесткости и вязкости получается: при малой массе гасителя – прямо пропорциональным, а при большей – обратно пропорциональным квадратному корню из этой массы.

Введением дополнительной упругой связи между гасителем и неподвижным основанием можно добиться того, чтобы максимально возможное значение декремента затухания было больше, чем в ее отсутствие. Однако тогда либо коэффициенты жесткости этой дополнительной связи и связи между упругой системой и гасителем должны быть бóльшими, либо один из этих двух коэффициентов должен быть отрицательным. Таким способом можно добиться, вообще говоря, сколь угодно быстрого затухания колебаний, соответствующих наименьшей собственной частоте [5].

В качестве гасителя колебаний может использоваться двухстепенной гироскоп, между рамками которого имеется упруго-вязкая связь. Ниже показано, что такой гаситель может быть более эффективным, чем свободный точечный гаситель эквивалентной инерционной характеристики. Однако с его помощью можно добиться лишь конечного декремента затухания.

Рассмотрим гироскоп, наружная рамка которого соединена жесткой тягой OO_1 с точкой O упругой системы, а внутренняя рамка соединена с наружной пружиной жесткости c и демпфером с коэффициентом вязкого трения h (фигура); A и B – экваториальной и осевой моменты инерции ротора гироскопа, Ω – его угловая скорость. Пусть в положении равновесия вектор $\overrightarrow{OO_1}$ перпендикулярен плоскости наружной рамки, а эта плоскость – плоскости внутренней рамки. Вычислим передаточную функцию этого гироскопа для случая, когда точка O может перемещаться в направлении OO_1.

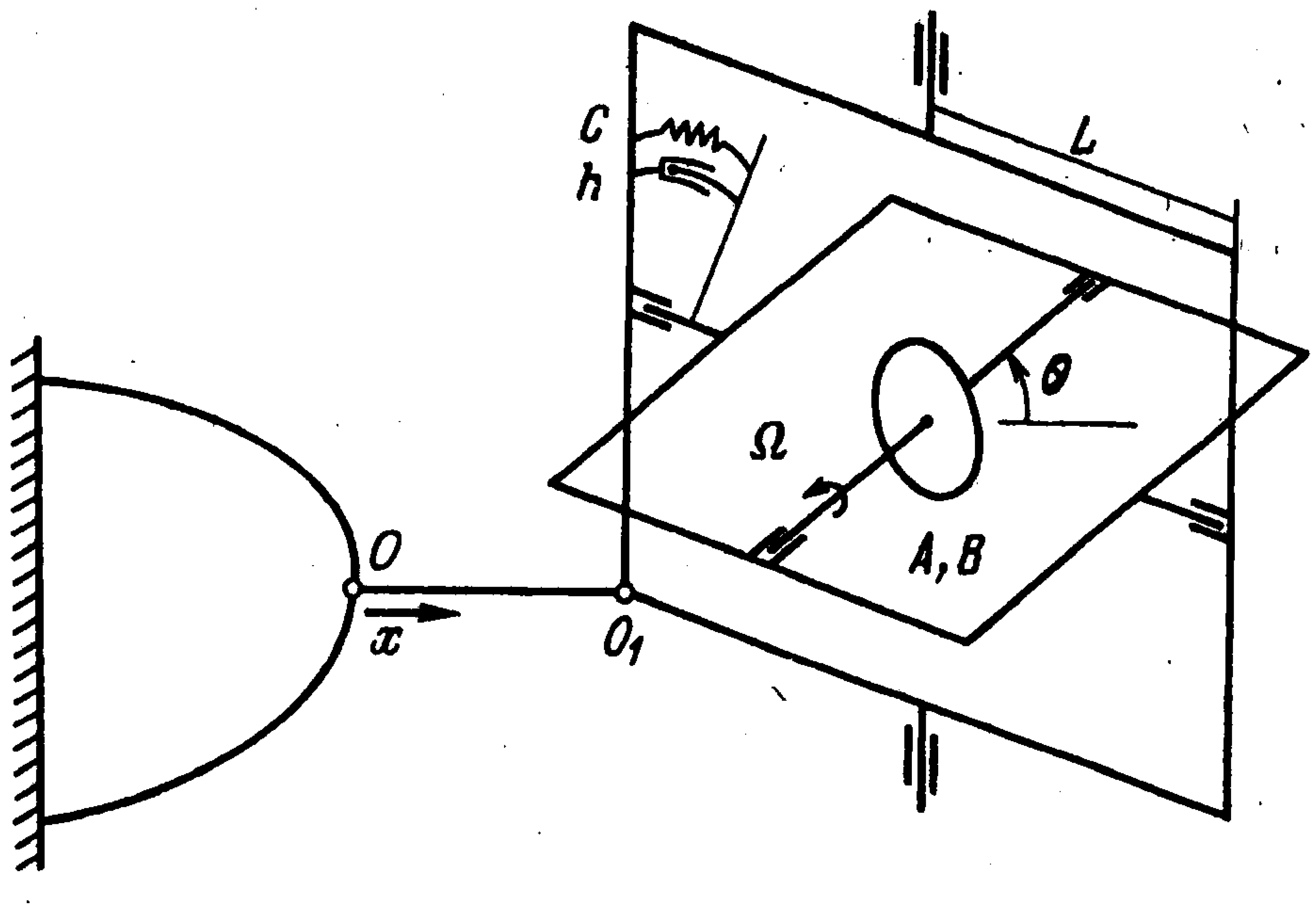
Если x – перемещение этой точки в данном направлении, θ – угол между плоскостью, перпендикулярной плоскости наружной рамки и проходящей через ось внутренней, и плоскостью внутренней рамки (угол нутации), F – сила, действующая со стороны точки O на наружную рамку (x, θ, F – функции времени), $2L$ – ширина наружной рамки, то уравнения движения гироскопа могут быть преобразованы к виду [6]

$$AL^{-1}\ddot{x} + B\Omega\dot{\theta} = LF$$

$$A\ddot{\theta} - B\Omega L^{-1}\dot{x} = -h\dot{\theta} - c\theta \qquad (1)$$

Для $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ (λ – характеристический показатель) частным решением второго уравнения системы (1) будет

$$\theta = B\Omega L^{-1}\lambda(A\lambda^2 + h\lambda + c)^{-1} x_0 e^{\lambda t} \qquad (2)$$



Подставляя выражение (2) в первое уравнение (1), находим

$$F(t) = \varphi(\lambda) x_0 e^{\lambda t}$$

где $\varphi(\lambda)$ – передаточная функция, которую запишем в безразмерном виде

$$\varphi(\lambda) = M\Omega_1^2 f(r), \quad f(r) = \mu r^2[1 + \beta(r^2 - zr + \sigma)^{-1}] \qquad (3)$$

Здесь

$$\mu = \frac{A}{ML^2}, \quad z = \frac{h}{A\Omega_1}, \quad \sigma = \frac{c}{A\Omega_1^2}, \quad r = -\frac{\lambda}{\Omega_1}, \quad \beta = \left(\frac{B\Omega}{A\Omega_1}\right)^2$$

M – масса, Ω_1 – наименьшая собственная частота упругой системы.

Характеристическое уравнение упругой системы, к которой присоединен гироскопический гаситель, имеет вид [3]

$$(r^2 - zr + \sigma)Q(r) + \mu r^2(r^2 - zr + \sigma + \beta)P(r) = 0 \qquad (4)$$

Здесь

$$Q(r) = \prod_{k=1}^{S}\left[1 + \left(\frac{r}{\omega_k}\right)^2\right], \quad P(r) = \gamma(r)Q(r)$$

$$\gamma(r) = \sum_{k=1}^{S}\frac{v_k^2}{r^2 + \omega_k^2}, \quad \omega_k = \Omega_k\Omega_1^{-1}, \quad k = 1,\ 2,\ ...,S$$

($\gamma(r)$ – безразмерная динамическая податливость упругой системы в точке O в направлении OO_1, S – число степеней свободы упругой системы, v_1, v_2, ..., – проекции значений нормированных на ее массу собственных функций в точке O на рассматриваемое направление).

Если теперь ввести параметры и функции

$$p = 1 + \gamma_0\beta\mu(\gamma_0 = \gamma(0)), \quad z_\beta = p^{-1}z, \quad \sigma_\beta = p^{-1}\sigma$$

$$Q_\beta(r) = Q(r) + \mu(r^2 + \beta)P(r)$$

$$P_\beta(r) = \beta\{[r^{-2}[\gamma_0 Q(r) - P(r)] + \gamma_0\mu P(r)\}$$

то (4) эквивалентно уравнению

$$(r^2 - z_\beta r + \sigma_\beta)Q_\beta(r) + \mu r^2(-z_\beta r + \sigma_\beta)P_\beta(r) = 0 \qquad (5)$$

аналогичному характеристическому уравнению упругой системы, к которой упруговязкой связью присоединен точечный гаситель [2].

Можно показать, что при любых неотрицательных β и μ полином $Q_\beta(r)$ имеет S пар чисто мнимых нулей $\pm i\omega_{\beta 1}$, $\pm i\omega_{\beta 2}$, ... и что для $k = 1, 2, ..., S$

$$\lim_{r\to i\omega_{\beta k}} (r^2+\omega_{\beta k}^2)\frac{P_\beta(r)}{Q_\beta(r)} > 0$$

(обозначим этот предел через $\upsilon_{\beta k}^2$); наконец,

$$\sum_{k=1}^{S} \frac{\upsilon_{\beta k}^2}{r^2+\omega_{\beta k}^2} = \frac{P_\beta(r)}{Q_\beta(r)}$$

При достаточно малых μ величина $\upsilon_{\beta k}^2$ близка к $\beta(\upsilon_k\omega_k^{-1})^2$ и

$$\omega_{\beta k} = \omega_k + \frac{1}{2}(\beta\omega_k^{-1} - \omega_k)\upsilon_k^2\mu$$

При $\beta = 0$ (ротор гироскопа не вращается) уравнение (4) распадается на два: $r^2 - zr + \sigma = 0$ и $Q(r) + \mu(r^2+\beta)P(r) = 0$. Корни первого соответствуют затухающим колебаниям внутренней рамки относительно внешней, второго – свободным незатухающим колебаниям упругой системы, к которой при помощи жесткой связи OO_1 присоединена масса

$$m = AL^{-2} = \mu M \tag{6}$$

способная перемещаться в направлении этой связи.

Если рассматривать затухание на наименьшей собственной частоте, то при малых μ условием оптимальности значений σ_β и z_β является наличие у уравнения (5) двойного комплексного корня r, близкого к $i\omega_{\beta 1} \approx i$. При этом

$$\sigma_\beta \approx i,\quad z_\beta \approx 2\upsilon_{\beta 1}\sqrt{\mu},\quad \mathrm{Re}\, r \approx \upsilon_{\beta 1}\sqrt{\mu}/2$$

Если $\beta > 1$, то $\upsilon_{\beta 1} > \upsilon_1$, $\omega_{\beta 1} > \omega_1$, и при помощи рассматриваемого гироскопа можно добиться большего эффекта гашения, чем при использовании точечного гасителя массы m, определяемой формулой (6) [1, 2].

В системе с одной степенью свободы ($S = 1$, $\upsilon_1 = 1$, $\omega_1 = 1$) имеем

$$\upsilon_{\beta 1}^2 = \beta,\quad \omega_{\beta 1}^2 = (1+\beta\mu)(1+\mu)^{-1},\quad p = 1+\beta\mu$$

и оптимальные значения параметров связей (такие, при которых минимальный из всевозможных декрементов затухания максимален) между рамками гироскопа таковы (ср. с [1]):

$$\sigma_\beta = \frac{\omega_{\beta 1}^2}{(1+\upsilon_{\beta 1}^2\mu)^2} = \frac{1}{(1+\mu)(1+\beta\mu)}$$

$$z_\beta = 2\upsilon_{\beta 1}\omega_{\beta 1}\left[\frac{\mu}{(1+\upsilon_{\beta 1}^2\mu)^3}\right]^{1/2} = \frac{2}{1+\beta\mu}\left(\frac{\beta\mu}{1+\mu}\right)^{1/2}$$

$$\sigma = p\sigma_\beta = \frac{1}{1+\mu},\quad z = pz_\beta = 2\left(\frac{\beta\mu}{1+\mu}\right)^{1/2}$$

Соответствующее значение декремента затухания

$$n = \frac{1}{2} \upsilon_{\beta 1} \omega_{\beta 1} [\mu(1 + \upsilon_{\beta 1}^2 \mu)]^{1/2} = \frac{z}{4}$$

Эти формулы справедливы при $\beta\mu \le 4$. При этом условии максимально возможное значение декремента затухания $n_+ = (1+\mu)^{-1/2}$. При больших β имеем

$$n \approx \omega_{\beta 1} (\upsilon_{\beta 1} \sqrt{3\mu})^{-1}; \quad n \to n_+ / \sqrt{3} \text{ при } \beta \to \infty$$

Таким образом, увеличивая угловую скорость ротора гироскопа, можно даже при малых его массах добиться конечного декремента затухания. Аналогичное имеет место и в системах с несколькими степенями свободы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нагаев Р.Ф., Степанов А.В.* Об оптимизации коэффициента затухания свободных колебаний двухмассовой системы // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С. 24–28.
2. *Степанов А.В.* Об оптимальном линейном гасителе первой моды собственных колебаний консервативных систем // Динамика систем. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1982. С. 80–95.
3. *Степанов А.В.* О выводе характеристического уравнения линейной колебательной системы общего вида с затуханием // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 48–52.
4. *Timoshenko S., Young D.H., Weaver W., jr.* Vibration Problems in Engineering. 4th edition. N.Y.: John Wiley and Sons, Inc., 1974. 521 p. Рус. пер.: *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
5. *Степанов А.В.* Об одном способе повышения эффективности гасителей свободных колебаний // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 6. С. 18–20.
6. *Меркин Д.Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
20.IV.1998