

3. Хирт Дж., Лоте И. Теория дислокаций. М.: Атомиздат, 1972. 599 с.
4. Теодосиу К. Упругие модели дефектов в кристаллах. М.: Мир, 1985. 352 с.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 343 с.
6. Лебедев Н.Н., Скальская И.П., Уфлянд Я.С. Сборник задач по математической физике. М.: ГОСТЕХИЗДАТ, 1955. 420 с.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. М.: Наука, 1970. 327 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
15.V.1997

УДК 539.3

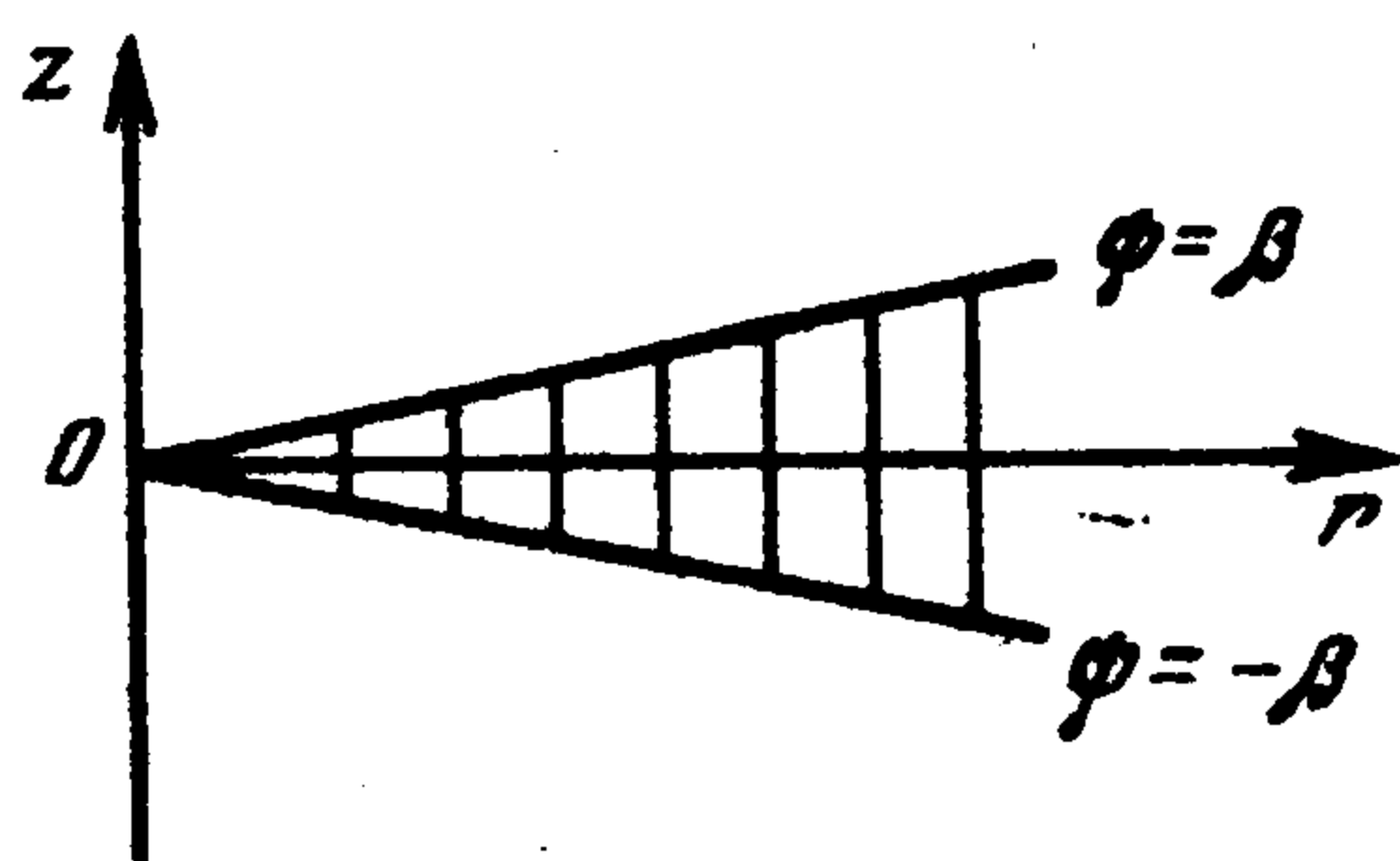
© 1999 г. В.М. Александров, Д.А. Пожарский

К ЗАДАЧЕ О КЛИНОВИДНОМ ШТАМПЕ НА ГРАНИ УПРУГОГО КЛИНА

Численно-аналитическим методом [1] изучается поведение контактных напряжений в особой точке, являющейся пересечением вершины клиновидного штампа не слишком малого угла раствора с ребром упругого пространственного клина при разных типах граничных условий на другой его грани. Установлено согласование численных результатов с полученными ранее асимптотическим при малых углах раствора штампа методом [2] по вещественным показателям особенности. Объясняется причина, по которой численно-аналитическим методом [1] не удается найти известную особенность с показателем $-3/2 + i\omega$ [2, 3]. Подтвержден вывод [2] о возникновении при малых углах упругого клина, одна грань которого жестко закреплена, членов порядка $r^{-3/2 - \omega_1 - i\omega_2}$, $0 < \omega_1 < 1/2$, которые приводят к более сильным осцилляциям контактных давлений в окрестности вершины штампа. Показан механизм возникновения новых осциллирующих членов для упругого клина с одной свободной от напряжений гранью. Как частный случай исследовано взаимовлияние двух одинаковых клиновидных штампов на полупространстве.

Пусть в одну грань упругого пространственного клина угла раствора α ($0 < \alpha < 2\pi$) вдавливаются клиновидный в плане штамп, так что область контакта Ω – бесконечный клин (фигура) угла раствора 2β ($0 < \beta < \pi/2$), описываемый в полярных координатах ρ, ψ ($r = \rho \cos \psi, z = \rho \sin \psi$, ось z совпадает с ребром упругого клина) неравенствами $0 \leq \rho < \infty, |\psi| < \beta$. Основание штампа описывается функцией $f(\rho, \psi)$, $(\rho, \psi) \in \Omega$. На другой грани упругого клина выполняется одно из следующих граничных условий: а) отсутствие напряжений, б) скользящая заделка, в) жесткая заделка. Неизвестной является функция нормальных контактных напряжений $q(\rho, \psi)$, $(\rho, \psi) \in \Omega$, отнесенных к $\theta = G/(1 - \nu)$, где G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

Для исключения решений контактной задачи с бесконечной энергией далее будем считать, что к функциям $q(\rho, \psi)$ и $f(\rho, \psi)$ применимо преобразование Меллина по переменной ρ и



Фиг. 1

$$\int_{-\beta}^{\beta} d\psi \int_0^{\infty} q(\rho, \psi) \rho d\rho < \infty, \quad \int_{-\beta}^{\beta} d\psi \int_0^{\infty} f(\rho, \psi) \rho d\rho < \infty \quad (1)$$

Интегральное уравнение контактных задач а, б, в после применения интегрального преобразования Меллина получим в виде [2]

$$\int_{-1}^1 q_s(\xi) K_s(\beta\xi, \beta x) d\xi = f_s(x), \quad |x| \leq 1 \quad (2)$$

$$K_s = K_s(t, p) = \frac{1}{2 \cos \pi s} P_{s-1/2}(-\cos(t-p)) + K_s^*(t, p) \quad (3)$$

$$K_s^*(t, p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \operatorname{sh} \pi u (W_j(u) - \operatorname{cth} \pi u) [R_+(-s, u, t) R_+(s, u, p) + R_-(-s, u, t) R_-(s, u, p)] du +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{sh} \frac{\pi u}{2} W_j(u) \left[R_+(s, u, p) B_j^u \left\{ \operatorname{ch} \frac{\pi y}{2} R_+(-s, y, t) \right\} + \right.$$

$$\left. + R_-(s, u, p) B_j^u \left\{ \operatorname{ch} \frac{\pi y}{2} R_-(-s, y, t) \right\} \right] du \quad (|\operatorname{Re} s| < 1/2) \quad (4)$$

где введены новые функции и независимая переменная по формулам

$$x = \psi / \beta, \quad q_s(x) = q_s^*(\psi), \quad f_s(x) = f_s^*(\psi) / \beta$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} q_s^*(\psi) \rho^{-s-3/2} ds = q(\rho, \psi), \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f_s^*(\psi) \rho^{-s-1/2} ds = f(\rho, \psi) \quad (5)$$

а также использованы обозначения (1.3), (1.6) [2]. В формулах (1.3) [2] следует исправить следующие опечатки: в знаменателе $W_1(u)$ вместо последнего знака должен быть плюс; нужно убрать обе двойки в выражении для $W_{\pm}(u)$; в формуле для $g_2(t)$ знаменатель должен иметь вид $\operatorname{ch} 2\alpha t - \cos 4\alpha$; в первой строке выражения для $g_3(t)$ должно быть $tf_3(t)$ вместо $ft_3(t)$, а в третьей строке $-\sin \alpha$ вместо $\sin \theta$.

В (4) значения $m = 1, 2, 3$ отвечают задачам *a, б, в* соответственно. В (5) Γ — прямая в плоскости комплексного переменного s , параллельная мнимой оси и пересекающая действительную ось немного левее точки $s = 1/2$.

Как было доказано [1], показатель особенности функции контактных давлений $q(\rho, \psi)$ при $\rho \rightarrow 0$ связан с точками спектра интегрального оператора в левой части уравнения (2). Полюсами s_k функции $q_s(\xi)$, очевидно, будут те значения параметра s , при которых могут существовать нетривиальные решения у соответствующего однородного уравнения, т.е. точки спектра интегрального оператора (2). При этом s_k не зависят от ξ .

Для нахождения s_k проводится дискретизация уравнения (2) по схеме метода Бубнова — Галеркина: решение ищется в виде разложения по системе базисных функций $v_m(\xi)$

$$q_s(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} t_m(s) v_m(\xi) \quad (6)$$

а для определения $t_m = t_m(s)$ невязка раскладывается по второму базису $\{u_l\}_{l=0}^{\infty}$; в результате относительно неизвестных возникает бесконечная система

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{lm} t_m = f_l, \quad l = 0, 1, \dots$$

$$a_{lm} = (K_s v_m, w_l) |_{L_2} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 K_s(\beta \xi, \beta x) v_m(\xi) w_l(x) d\xi dx$$

$$f_l = \int_{-1}^1 f_s(x) w_l(x) dx \quad (7)$$

Здесь $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$ — система проекторов на базис $\{u_l\}_{l=0}^{\infty}$, т.е. $(u_l, w_k) |_{L_2} = \delta_{kl}$, где δ_{kl} — символ Кронекера.

Функция $q_s(\xi)$ при $\xi = \pm 1$ имеет слабую особенность вида $(1 - \xi^2)^{-1/2}$. Для регуляризации исходной некорректной задачи — интегрального уравнения (2) — необходимо учесть эту особенность в координатных функциях. Поэтому естественно в качестве базисных выбрать системы функций [1]

$$v_m(\xi) = \frac{T_m(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}}; \quad u_l(x) = c_l T_l(x), \quad c_0 = 1, \quad c_l = 2 \quad (l \geq 1) \quad (8)$$

где $T_m(x)$ – полиномы Чебышева первого рода. Во второй системе особенность не вводится, так как правая часть и невязка – гладкие функции. В силу условия ортогональности полиномов Чебышева получим, что

$$w_k(x) = \frac{T_k(x)}{\pi\sqrt{1-x^2}} \quad (9)$$

Используя разложение функции Лежандра вида [1]

$$\frac{1}{2\cos\pi s} P_{s-1/2}(-\cos(t-p)) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k(s) e^{ik(t-p)}$$

$$G_k(s) = \frac{\Gamma(0,5s+0,5|k|+0,25)\Gamma(-0,5s+0,5|k|+0,25)}{2\Gamma(0,5s+0,5|k|+0,75)\Gamma(-0,5s+0,5|k|+0,75)} \quad (10)$$

и значение интеграла [4]

$$\int_{-1}^1 e^{\pm iax} \frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi e^{\pm im\pi/2} J_m(a) \quad (11)$$

для элементов матрицы системы (7) $a_{lm} = a_{lm}(s)$ ($l, m = 0, 1, \dots$) найдем

$$a_{lm}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(s) J_m(\beta n) J_l(\beta n) \cos\left(\frac{l-m}{2}\pi\right) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 K_s^*(\beta x, \beta y) \frac{T_m(x) T_l(y)}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}} dx dy \quad (12)$$

Штрих у знака суммы означает, что первый член ($n = 0$) ряда в (12) берется с коэффициентом $1/2$. Если при $s = s_k$ определитель $D(s)$ бесконечномерной матрицы с элементами (12) обращается в нуль, то $q(\rho, \psi) \sim \rho^{-\gamma}$, $\gamma = 3/2 + s_k$ при $\rho \rightarrow 0$. При $\beta > 0,1 \pi$ и не слишком малых α (для которых сделаны расчеты ниже) достаточно урезать матрицу с элементами (12) до размерности 4–5, чтобы обеспечить 3 верные значащие цифры для нулей ее определителя на действительной оси [1].

Заметим, что при $s \in \mathbb{R}$ функции $R_{\pm}(s, u, t)$ (3) принимают действительные значения; для вычисления значений функций Лежандра, входящих в выражения для $R_{\pm}(s, u, t)$, удобно использовать их представление через гипергеометрическую функцию [4].

Вместо суммирования рядов Неймана $B_{\pm,2,3}^u$, входящих в формулы (1.3) [2], численно решались интегральные уравнения Фредгольма второго рода, аналитические решения которых представляются этими рядами. Такие уравнения Фредгольма можно найти в [5]. Для их решения применялся метод механических квадратур с использованием квадратурной формулы Гаусса по 32 узлам [6].

В таблице для задач *a, б, в* даны значения наибольшего показателя особенности γ , соответствующего вещественным нулям $D(s)$, $s \in (-3/2; -1/2)$ в зависимости от углов α и β (в градусах); все расчеты проведены при $\nu = 0,3$.

Для задачи *a* при $\alpha = 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ$ и тех же значениях 2β , что даны в таблице, значения γ отличаются менее чем на 6% от соответствующих значений, приведенных в последней колонке таблицы, которые (клин на полупространстве) хорошо соответствуют кривой, изображенной на рис. 4,2 в [1] при $\epsilon = 0$.

По теореме о неявных функциях зависимость $s_k(\alpha, \beta)$ – корней уравнения $D(s) = 0$ от α и β аналитическая. Следовательно, при непрерывном изменении α и β эти корни вычерчивают в плоскости s непрерывные кривые.

Как показывают расчеты, для задачи *a* при $2\beta = \pi$ и $\alpha \approx 100^\circ$ на интервалах $s \in (-3/2; -1/2)$ вблизи точки $s = -1/2$ появляются два дополнительных нуля ADs ($\gamma_1 = 0,98, \gamma_2 = 0,96$), которые, если зафиксировать α и уменьшать угол 2β , сливаются в двукратный корень, дающий особенность порядка $\rho^{-\gamma}(C_1 + C_2 \ln \rho)$, а затем сходят с действительной оси и становятся комплексно сопряженными, что приводит к осцилляциям функции контактных давлений при $\rho \rightarrow 0$ и отрыву кончика штампа от упругого основания.

Для задачи *в* при достаточно острых углах α замечены нули $D(s)$ при $s \in (0; 1/2)$; например, при $\alpha = 0,1\pi, 2\beta = 45^\circ, s_1 = 0,45, s_2 = 0,47$. Соединяясь и выходя в комплексную область, эти нули приводят к наиболее сильной особенности порядка $\gamma = \omega_1 + i\omega_2 + 3/2, \omega_3 \in (0; 1/2)$, что подтверждает результаты, полученные [2] асимптотическим методом.

Задача	2β	α						
		45	90	135	180	225	270	315
а	45	0,999	0,985	0,862	0,788	—	—	—
	90	0,999	0,987	0,740	0,703	—	—	—
	135	0,999	0,990	0,632	0,611	—	—	—
б	45	0,448	0,528	0,447	0,390	0,411	0,422	0,412
	90	0,224	0,295	0,224	0,180	0,194	0,204	0,195
	135	0,158	0,080	0,246	0,416	0,353	0,310	0,350
в	45	0,626	0,685	0,704	0,711	0,714	0,719	0,721
	90	0,555	0,602	0,622	0,629	0,632	0,637	0,640
	135	0,520	0,542	0,555	0,559	0,561	0,565	0,567

Задача б, очевидно, эквивалентна задаче о симметричном вдавлении двух одинаковых клиновидных штампов в разные грани клина вдвое большего угла раствора. В частности, сравнение последней колонки таблицы для задачи а (один штамп на полупространстве) и колонки $\alpha = 90^\circ$ для задачи б (два штампа на полупространстве) позволяет оценить степень взаимовлияния двух клиновидных штампов на полупространстве: здесь возникают более слабые особенности, чем для одного штампа.

Заметим, что в случае двух клиновидных штампов с плоским основанием на полупространстве известно точное решение контактной задачи, полученное В.Л. Рвачевым ([7], с. 206). Однако в решении В.Л. Рвачева отсутствуют найденные выше особенности при $\rho \rightarrow 0$. Причина этого недостатка решения — обращение в бесконечность энергии деформации (интеграла по области контакта от произведения функций контактного давления и нормального перемещения). Здесь исключаются такие решения, так как к функции $f(\rho, \psi) = \text{const}$ (штамп с плоским основанием) нельзя применить преобразование Меллина по ρ , кроме того, нарушаются условия (1).

Хотя изложенный выше численный метод малоэффективен при $\beta \rightarrow 0$, его результаты для вещественных корней хорошо стыкуются с результатами, полученными [2] асимптотическим методом. Для не слишком малых β существование корня на интервале $s \in (-3/2; -1/2)$ вещественной оси обеспечивается тем, что при $s = -3/2$ и $s = -1/2$ функция $D(s)$ имеет многократные полюсы, так как они однократны для каждого элемента (12) как полюсы гамма-функций, входящих в функцию $G_n(s)$ (10); при $s \in (-3/2; -1/2)$ вблизи этих полюсов $D(s)$ имеет разные знаки (это проверяется численно).

С другой стороны, авторам монографии [1] в случае упругого полупространства так же, как и здесь для клина произвольного угла раствора, при помощи метода Бубнова — Галеркина не удалось найти чисто мнимый корень уравнения $D(s) = 0$, приводящий к особенности $\gamma = 3/2 + i\theta_*$, обнаруженной для полупространства [3] и для клина [2]. По-видимому, это можно объяснить следующим образом. Поскольку обычно значение θ_* достаточно велико [2], а элементы матрицы (12) сильно убывают при $\text{Im } s \rightarrow \infty$, для вычисления определителя $D(s)$ приходится увеличивать порядок урезанной матрицы и фактически находить предел суммы бесконечно большого числа слагаемых бесконечно малых величин, для чего численно-аналитический метод [1] оказывается не самым удачным. Тем не менее можно утверждать, что особенность $\gamma = 3/2 + i\theta_*$ в случае, например, упругого полупространства, как следует из формул (1.13) [3], присутствует по крайней мере до значения $\lambda = 2$ (угол штампа $57,3^\circ$), когда с точностью до $O(\lambda^{-6} \ln^3 \lambda)$ $\theta_* = 4,72$; при $\lambda \rightarrow 1$ $\theta_* \rightarrow 2,28$; при дальнейшем уменьшении λ , когда асимптотический метод [3] перестает действовать, можно предположить, что либо $\theta_* \rightarrow \infty$ при $2\beta \rightarrow \pi$, либо корень, приводящий к данной осциллирующей особенности, встретившись с другим таким корнем, уходит из рассматриваемой полосы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00133).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
2. *Александров В.М., Пожарский Д.А.* О контактных напряжениях в вершине клиновидного штампа, выходящей на ребро упругого пространственного клина // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 1. С. 135–141.
3. *Александров В.М., Бабешко В.А.* О давлении на упругое полупространство штампа клиновидной формы в плане // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 1. С. 88–93.
4. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
5. *Лубягин И.А., Пожарский Д.А., Чебаков М.И.* Обобщение задач Буссинеска и Черрути для случая упругого пространственного клина // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 1. С. 58–62.
6. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наук. думка, 1986. 543 с.
7. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л.А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.

Москва, Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
13.III.1997