

УДК. 539.3

© 1999 г. С.В. Сизов

ДВИЖЕНИЕ ВИНТОВОЙ ДИСЛОКАЦИИ В КЛИНОВИДНОЙ ОБЛАСТИ

Рассматривается задача об антиплоской деформации для клиновидной области, содержащей равномерно движущуюся винтовую дислокацию. Получено общее решение задачи с использованием интегральных преобразований Лапласа и Конторовича – Лебедева. В процессе решения выяснилось, что рассматриваемый метод пригоден для раствора клина большего π . Также рассматривается предельный случай, когда в качестве клиновидной области служит полуплоскость. Для этого случая удастся значительно упростить полученное решение.

Ранее рассматривались задачи о нестационарном движении краевой дислокации в полуплоскости [1], о взаимодействии движущейся винтовой дислокации и цилиндрического включения [2] и задача о движении винтовой дислокации в полосе [3].

1. Постановка задачи. Рассмотрим клиновидную область $-\varphi < \theta < \varphi$ (θ – полярный угол), которая содержит равномерно движущуюся вдоль луча $\theta = 0$ со скоростью v винтовую дислокацию. На границе области задано условие жесткой заделки

$$u_0(r, \theta, z, t)|_{\theta=\pm\varphi} = 0, t > 0 \tag{1.1}$$

где $u_0 = (u_{r0}, u_{\theta 0}, u_{z0})$ – вектор перемещений. Будем искать решение в виде

$$u_0 = u^{dis} + u$$

где вектор перемещения u^{dis} – описывает движение винтовой дислокации в плоскости, а u – влияние границы клина. Уравнения, описывающие движение винтовой дислокации, имеют вид [4]

$$u_r^{dis} = 0, u_\theta^{dis} = 0$$

$$u_z^{dis}(r, \theta, t) = \begin{cases} \xi(r, \theta, t) - \eta(r, \theta, t), & 0 < \theta < \pi \\ -(\xi(r, \theta, t) - \eta(r, \theta, t)), & -\pi < \theta < 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\xi(r, \theta, t) = \frac{b}{2\pi} \operatorname{arctg} \zeta(r, \theta, t), \eta(r, \theta, t) = \frac{b}{2} H(\zeta(r, \theta, t))$$

$$\zeta(r, \theta, t) = \frac{\gamma r \sin \theta}{r \cos \theta - a - vt}, \gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

где b – величина вектора Бюргерса, c – скорость распространения поперечных волн, $a > 0$ – расстояние от начала координат до вершины дислокации в момент времени $t = 0$, $H(x)$ – функция Хевисайда, а ветвь arctg выбрана так, что $\operatorname{arctg}(z) \in (-\pi/2, \pi/2)$.

В силу граничных условий (1.1) и формул (1.2), достаточно определить третью компоненту вектора перемещений $u = (u_r, u_\theta, u_z)$, так как две другие равны нулю. Искомая функция $u_z = w(r, \theta, t)$ должна в рассматриваемой области удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{1.3}$$

$$r > 0, t > 0, -\varphi < \theta < \varphi$$

а на границе области – следующим условиям:

$$w(r, \theta, t)|_{\theta=+\varphi} = -w(r, \theta, t)|_{\theta=-\varphi} = -(\xi(r, \varphi, t) - \eta(r, \varphi, t)) \quad (1.4)$$

Кроме того, потребуем выполнения условия

$$w(r, \theta, t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty \quad (1.5)$$

означающего, что со временем влияние дислокации на границы клиновидной области уменьшается.

2. Решение. Решение задачи будем искать в виде $w = w^a + w^h$, функции w^a и w^h удовлетворяют внутри клина уравнению (1.3), а на границе следующим условиям:

$$w^a(r, \theta, t)|_{\theta=+\varphi} = -w^a(r, \theta, t)|_{\theta=-\varphi} = f(r, t) = -\xi(r, \varphi, t) \quad (2.1)$$

$$w^h(r, \theta, t)|_{\theta=+\varphi} = -w^h(r, \theta, t)|_{\theta=-\varphi} = \eta(r, \varphi, t) \quad (2.2)$$

Можно показать, что функция

$$\hat{w}_{\lambda p}^a = K_{i\lambda} \left(\frac{p}{c} r \right) \lambda \operatorname{sh}(\pi\lambda) \frac{2}{\pi^2} \left(A(\lambda, p) \frac{\operatorname{sh}(\lambda\theta)}{\operatorname{sh}(\lambda\varphi)} + B(\lambda, p) \frac{\operatorname{ch}(\lambda\theta)}{\operatorname{ch}(\lambda\varphi)} \right) e^{-pt} \quad (2.3)$$

где $A(\lambda, p)$, $B(\lambda, p)$ – некоторые неизвестные функции, p – вещественный и положительный параметр, является частным решением уравнения (1.3). Проинтегрировав уравнение (2.3) по λ и p от 0 до $+\infty$, получим решение уравнения (1.3), зависящее от произвольных функций $A(\lambda, p)$, $B(\lambda, p)$:

$$w^a(r, \theta, t) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi^2} \lambda \operatorname{sh}(\pi\lambda) \left(A(\lambda, p) \frac{\operatorname{sh}(\lambda\theta)}{\operatorname{sh}(\lambda\varphi)} + B(\lambda, p) \frac{\operatorname{ch}(\lambda\theta)}{\operatorname{ch}(\lambda\varphi)} \right) K_{i\lambda} \left(\frac{p}{c} r \right) e^{-pt} d\lambda dp \quad (2.4)$$

Для определения функций $A(\lambda, p)$ и $B(\lambda, p)$ воспользуемся граничными условиями (2.1)

$$w^a(r, \theta, t)|_{\theta=\pm\varphi} = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi^2} \lambda \operatorname{sh}(\pi\lambda) (\pm A(\lambda, p) + B(\lambda, p)) K_{i\lambda} \left(\frac{p}{c} r \right) e^{-pt} d\lambda dp = \pm f(r, t) \quad (2.5)$$

(берутся одновременно либо верхние, либо нижние знаки).

Применяя к функции $f(r, t)$ обратное преобразование Лапласа и прямое преобразование Конторовича – Лебедева, получим

$$f(r, t) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi^2} \lambda \operatorname{sh}(\pi\lambda) \hat{f}(\lambda, p) K_{i\lambda} \left(\frac{p}{c} r \right) e^{-pt} d\lambda dp \quad (2.6)$$

где

$$\hat{f}(\lambda, p) = \int_0^{+\infty} g(r, p) K_{i\lambda} \left(\frac{p}{c} r \right) \frac{dr}{r}, \quad g(r, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} f(r, t) e^{pt} dt \quad (2.7)$$

Приравнявая подынтегральные функции в (2.5) и (2.6), находим неизвестные функции:

$$A(\lambda, p) = \hat{f}(\lambda, p), \quad B(\lambda, p) = 0$$

Перейдем к анализу полученного решения. Применяя формулу 5.8 (17) [5], получим

$$g(r, p) = \frac{b}{2\pi p} \exp\left(-\frac{a}{v} p\right) \exp\left(\frac{r \cos \varphi}{v} p\right) \exp\left(\frac{\gamma r \sin \varphi}{v} p\right) \quad (2.8)$$

Предпоследний множитель в правой части неограниченно возрастает при $0 < \varphi < \pi/2$, при $r \rightarrow +\infty$. Преобразование Конторовича – Лебедева в этом случае неприменимо, поэтому ограничимся рассмотрением клина с углом раствора $\pi/2 < \varphi < \pi$. Можно проверить, что функция $g(r, p)$ удовлетворяет достаточным условиям применимости преобразования Конторовича – Лебедева [6]

$$|g(r, p)| r^{-1} \ln \frac{1}{r} \in L_1\left(0, \frac{1}{2}\right), \quad |g(r, p)| r^{-1/2} \in L_1\left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \quad (2.9)$$

Отметим, что, когда $\pi/2 < \varphi < \pi$, в силу граничных условий (2.2), функция $w^h \equiv 0$, и следовательно, $w = w^a$.

Формулу (2.8) перепишем в виде

$$g(r, p) = \frac{b}{4\pi i} \exp\left(-\frac{a}{v} p\right) (\exp(-rz) - \exp(-r\bar{z})), \quad z = -\frac{p}{v} (\cos \varphi + i\gamma \sin \varphi)$$

Для вычисления интеграла (2.7) воспользуемся свойствами преобразования Лапласа

$$\int_0^{+\infty} \exp(-zr) K_{i\lambda} \left(\frac{p}{c} r\right) \frac{dr}{r} = \int_z^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp(-sr) K_{i\lambda} \left(\frac{p}{c} r\right) dr ds \quad (2.10)$$

Используя выражение для изображения по Лапласу для функции $K_{i\lambda}(rp/c)$ (формула 4.16(24) [5]) и вычисляя внешний интеграл в (2.10), получим

$$\hat{f}(\lambda, p) = \frac{b\pi}{4\pi i} \frac{1}{\lambda \operatorname{sh}(\pi\lambda)} \exp\left(-\frac{a}{v} p\right) \left(\cos\left(\lambda \operatorname{arcch} \frac{cz}{v}\right) - \cos\left(\lambda \operatorname{arcch} \frac{c\bar{z}}{v}\right)\right)$$

где $\operatorname{Im}(\operatorname{arcch} \omega) = \operatorname{Im}(\ln(\omega + \sqrt{\omega^2 - 1})) \in (-\pi, \pi)$.

3. Случай полуплоскости. Рассмотрим в качестве клиновидной области полуплоскость. В этом случае граничные условия (2.1) принимают вид

$$w(r, \theta, t)|_{\theta=\pi/2} = -w(r, \theta, t)|_{\theta=-\pi/2} = f(r, t) = -\frac{b}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\gamma r}{-a - vt}$$

Применяя формулу обратного преобразования Лапласа для функции $f(r, t)$, получим

$$g(r, p) = \frac{b}{2\pi p} \exp\left(-\frac{a}{v} p\right) \sin\left(rp \frac{\gamma}{v}\right) \quad (3.1)$$

Для функции $g(r, p)$ условие (2.9) не выполняется, но формула Конторовича – Лебедева остается в силе:

$$\hat{f}(\lambda, p) = \frac{b}{4p} \exp\left(-\frac{a}{v} p\right) \frac{\sin(\lambda s)}{\lambda \operatorname{ch}(\pi\lambda/2)}; \quad s = \operatorname{arcsh} \frac{c\gamma}{v} > 0$$

Применяя к решению формулу обратного преобразования Конторовича – Лебедева (формула 12.1(2) [7]) и используя преобразование Лапласа (формула 4.5(4) [5]), получим

$$w(r, \theta, t) = \frac{b}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{r\gamma \sin \theta}{r \cos \theta + a + vt} \quad (3.2)$$

Для перемещения $u_{z0}(x, y, t)$ в декартовой системе координат получим

$$u_{z0}(x, y, t) = \frac{b}{2\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{y\gamma}{x + a + vt} + \operatorname{arctg} \frac{y\gamma}{x - a - vt} \right) \quad (3.3)$$

Аналогичный результат дает метод отражений. Можно проверить, что решение (3.3) верно как при $v > 0$, так и при $v < 0$.

Итак, в случае, когда исходная конфигурация совпадает с упругой полуплоскостью, напряжение на границе равно

$$\sigma_{xz}|_{x=0} = -\frac{\mu b}{2\pi} \frac{2y\gamma}{(y\gamma)^2 + (a + vt)^2}$$

где μ – модуль сдвига. При $v > 0$ абсолютное значение σ_{xz} на границе убывает при $t \rightarrow +\infty$ как $O(t^{-2})$. Таким образом, если известны напряжения в произвольной точке границы в разные моменты времени, то определяется как направление равномерно движущейся винтовой дислокации, так и ее положение относительно точки наблюдения.

Автор благодарит М.В. Паукшто за постановку задачи и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Markenscoff X., Clifton R.J. The nonuniformly moving edge dislocation // J. Mech. and Phys. Solids. 1981. V. 29. № 3. P. 253–262.
2. Prasad S.B. Interaction between moving screw dislocation and an elastic circular cylindrical inclusion // Ganita. 1995. V. 46. № 1–2. P. 73–80.

3. Хирт Дж., Лоте И. Теория дислокаций. М.: Атомиздат, 1972. 599 с.
4. Теодосиу К. Упругие модели дефектов в кристаллах. М.: Мир, 1985. 352 с.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 343 с.
6. Лебедев Н.Н., Скальская И.П., Уфлянд Я.С. Сборник задач по математической физике. М.: ГОСТЕХИЗДАТ, 1955. 420 с.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. М.: Наука, 1970. 327 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
15.V.1997

УДК 539.3

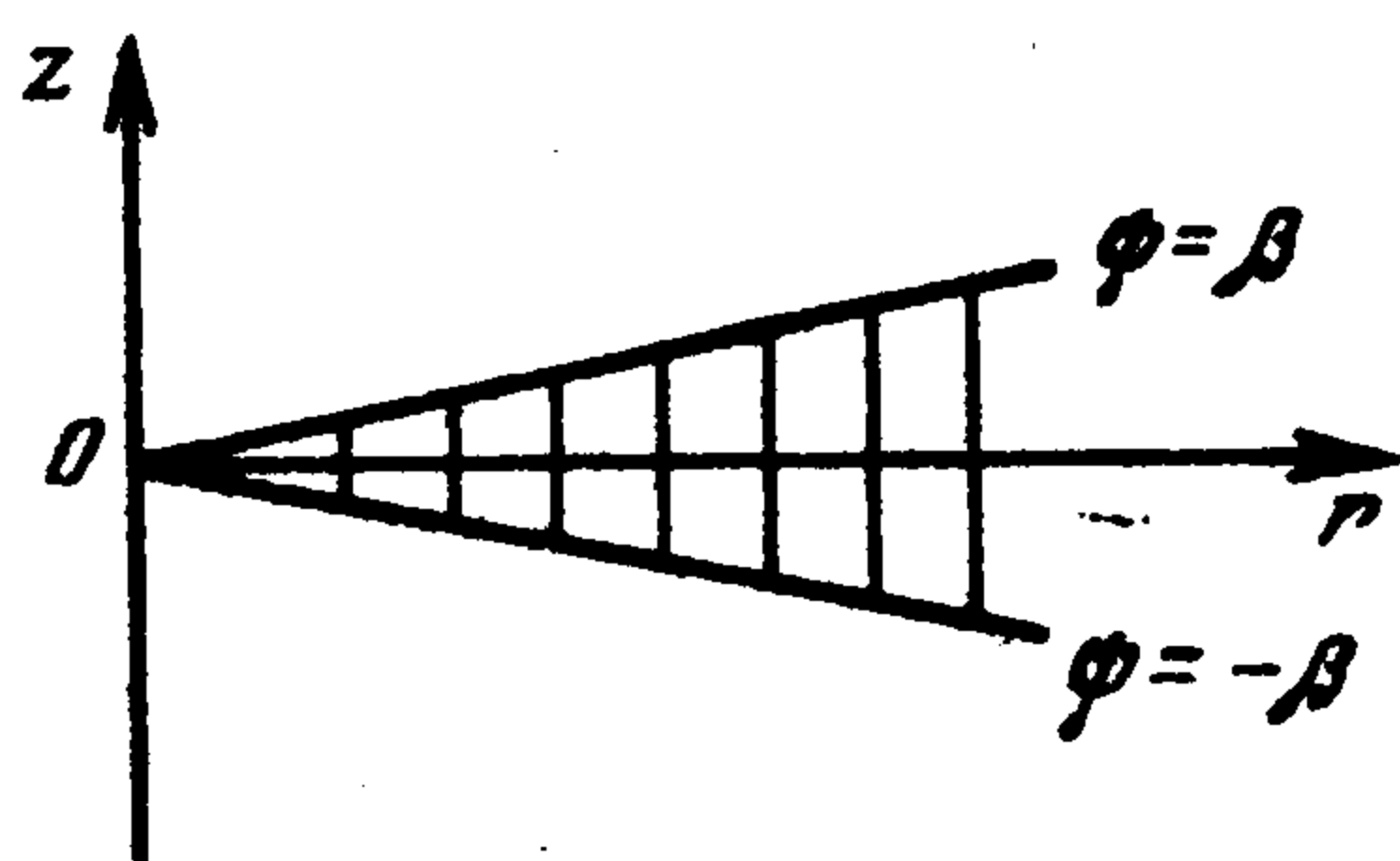
© 1999 г. В.М. Александров, Д.А. Пожарский

К ЗАДАЧЕ О КЛИНОВИДНОМ ШТАМПЕ НА ГРАНИ УПРУГОГО КЛИНА

Численно-аналитическим методом [1] изучается поведение контактных напряжений в особой точке, являющейся пересечением вершины клиновидного штампа не слишком малого угла раствора с ребром упругого пространственного клина при разных типах граничных условий на другой его грани. Установлено согласование численных результатов с полученными ранее асимптотическим при малых углах раствора штампа методом [2] по вещественным показателям особенности. Объясняется причина, по которой численно-аналитическим методом [1] не удается найти известную особенность с показателем $-3/2 + i\omega$ [2, 3]. Подтвержден вывод [2] о возникновении при малых углах упругого клина, одна грань которого жестко закреплена, членов порядка $r^{-3/2 - \omega_1 - i\omega_2}$, $0 < \omega_1 < 1/2$, которые приводят к более сильным осцилляциям контактных давлений в окрестности вершины штампа. Показан механизм возникновения новых осциллирующих членов для упругого клина с одной свободной от напряжений гранью. Как частный случай исследовано взаимовлияние двух одинаковых клиновидных штампов на полупространстве.

Пусть в одну грань упругого пространственного клина угла раствора α ($0 < \alpha < 2\pi$) вдавливаются клиновидный в плане штамп, так что область контакта Ω – бесконечный клин (фигура) угла раствора 2β ($0 < \beta < \pi/2$), описываемый в полярных координатах ρ, ψ ($r = \rho \cos \psi, z = \rho \sin \psi$, ось z совпадает с ребром упругого клина) неравенствами $0 \leq \rho < \infty, |\psi| < \beta$. Основание штампа описывается функцией $f(\rho, \psi)$, $(\rho, \psi) \in \Omega$. На другой грани упругого клина выполняется одно из следующих граничных условий: а) отсутствие напряжений, б) скользящая заделка, в) жесткая заделка. Неизвестной является функция нормальных контактных напряжений $q(\rho, \psi)$, $(\rho, \psi) \in \Omega$, отнесенных к $\theta = G/(1 - \nu)$, где G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

Для исключения решений контактной задачи с бесконечной энергией далее будем считать, что к функциям $q(\rho, \psi)$ и $f(\rho, \psi)$ применимо преобразование Меллина по переменной ρ и



Фиг. 1

$$\int_{-\beta}^{\beta} d\psi \int_0^{\infty} q(\rho, \psi) \rho d\rho < \infty, \quad \int_{-\beta}^{\beta} d\psi \int_0^{\infty} f(\rho, \psi) \rho d\rho < \infty \quad (1)$$

Интегральное уравнение контактных задач а, б, в после применения интегрального преобразования Меллина получим в виде [2]

$$\int_{-1}^1 q_s(\xi) K_s(\beta\xi, \beta x) d\xi = f_s(x), \quad |x| \leq 1 \quad (2)$$