

УДК 624.131+539.215

© 1999 г. В.Б. Глаговский, Б.М. Нуллер

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ КОНСОЛИДАЦИИ ДЛЯ ПОЛОСЫ

Рассматривается плоская смешанная краевая задача линейной теории безынерционной двухфазной консолидации [1]. Полоса, лежащая на гладком, недеформируемом, непроницаемом для жидкости основании, находится под давлением полубесконечного проницаемого штампа. Материал твердой фазы и жидкость сжимаемы. При помощи преобразований Лапласа по времени и пространственной координате задача сводится к уравнению Винера – Хопфа. Исследуются общие закономерности распределения корней характеристических уравнений, соответствующих различным однородным условиям на гранях полосы. На основе полученных результатов строится эффективное решение в кратных интегралах, имеющих экспоненциальную сходимость по всем переменным. Исследуются временные процессы осадки штампа и выдавливания жидкости.

Рассматриваемая задача является базовой для метода кусочно-однородных решений, который можно применять к задачам о конечных штампах, трещинах и включениях в прямоугольнике, полосе, плоскости. Поскольку уравнения консолидации по форме совпадают с уравнениями связанной термоупругости, путем пересчета коэффициентов полученное решение можно использовать для изучения соответствующих термоупругих задач.

Число аналитических решений краевых задач теории консолидации невелико. Основным задачам посвящены работы [1–7], получено [8] приближенное решение задачи о давлении штампа на полуплоскость, насыщенную несжимаемой жидкостью, построено [9] решение задачи о консолидации в тонком слое.

1. Постановка задачи. Процесс консолидации двухфазной линейно-деформируемой изотропной пористой среды будем описывать уравнениями Био [1, 6]

$$G\Delta \mathbf{u}^* + G(1 - 2\nu)^{-1} \text{grad div } \mathbf{u}^* - H_1 \text{grad } p^* = 0 \tag{1.1}$$

$$k\Delta p^* = H_1 \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{u}^* + (H_2 + H_3) \frac{\partial p^*}{\partial t}$$

где \mathbf{u}^* – вектор упругих перемещений твердой фазы, p^* – поровое давление, t – время, G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, k – коэффициент фильтрации, $H_1 = 1 - c$, $H_2 = (H_1 - f)c_2^{-1}$, $H_3 = fc_3^{-1}$, $c = c_1c_2^{-1}$, $c_1 = \frac{2}{3}G(1 + \nu)(1 - 2\nu)^{-1}$, f – пористость, c_1, c_2, c_3 – соответственно модули объемного сжатия скелета, однородного изотропного материала твердой фазы и поровой жидкости при учете растворенного в ней газа.

Для исследования плоской деформации выпишем лежащие в основе системы (1.1) уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} = 0, \quad \sigma_x^* = \sigma_{xs}^* - fp^* \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y} = 0, \quad \sigma_y^* = \sigma_{ys}^* - fp^*$$

обобщенный закон Гука для твердой и жидкой фаз

$$\sigma_x^* = 2G \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{div} \mathbf{u}^* + e_x^* \right) - H_1 p^* \quad (1.3)$$

$$\sigma_y^* = 2G \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{div} \mathbf{u}^* + e_y^* \right) - H_1 p^*, \quad \mathbf{u}^* = (u_x^*, u_y^*) \quad (1.4)$$

$$p^* = \kappa_1 \theta^* + \kappa_2 \operatorname{div} \mathbf{u}^*, \quad \kappa_1 = (H_2 + H_3)^{-1}, \quad \kappa_2 = -H_1 \kappa_1 \quad (1.5)$$

$$\tau_{xy}^* = G e_{xy}^* \quad (1.6)$$

формулы Коши

$$e_x^* = \partial u_x^* / \partial x, \quad e_y^* = \partial u_y^* / \partial y, \quad e_{xy}^* = \partial u_x^* / \partial y + \partial u_y^* / \partial x$$

закон Дарси – Герсеванова

$$\mathbf{v}^* = -k \operatorname{grad} p^*, \quad \mathbf{v}^* = f(\mathbf{v}_a^* - \partial \mathbf{u}^* / \partial t), \quad \mathbf{v}^* = (v_x^*, v_y^*) \quad (1.7)$$

и уравнение сплошности

$$\operatorname{div} \mathbf{v}^* = -\partial \theta^* / \partial t, \quad \theta^* = H_1 \operatorname{div} \mathbf{u}^* + (H_2 + H_3) p^* \quad (1.8)$$

Скорость \mathbf{v}^* равна расходу поровой жидкости, протекающей в единицу времени через единичную площадку сечения пористой среды относительно твердой фазы, направление \mathbf{v}^* совпадает с направлением нормали к сечению; \mathbf{v}_a^* – истинная средняя скорость жидкости в эйлеровых координатах, θ^* – изменение первоначального объема жидкости в единице объема пористой среды после деформации. Под напряжениями σ_{xs}^* , σ_{ys}^* понимаются силы, приложенные к скелету единичной площадки пористой среды соответствующего направления, напряжения в скелете больше в $(1-f)^{-1}$ раз.

Применяя к уравнениям (1.1) преобразование Лапласа по времени и двустороннее преобразование Лапласа по координате x

$$f(\mu) = \int_0^\infty f^*(t) e^{-\mu t} dt, \quad f^*(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} f(\mu) e^{\mu t} d\mu \quad (1.9)$$

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-sx} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \hat{f}(s) e^{sx} ds$$

где L_j – прямая $\operatorname{Re} \mu = \chi_j$, $\chi_j > 0$ ($j = 1, 2$), получим (опуская далее знак \wedge)

$$u_x'' + \alpha s^2 u_x + (\beta + 1) s u_y' - H_1 s p = 0$$

$$\alpha u_y'' + s^2 u_y + (\beta + 1) s u_x' - H_1 p' = 0 \quad (1.10)$$

$$p'' + [s^2 - \lambda(H_2 + H_3)] p - \lambda H_1 (s u_x + u_y') = 0$$

$$\alpha = 2(1-\nu)(1-2\nu)^{-1}, \quad \beta = 2\nu(1-2\nu)^{-1}, \quad \lambda = \mu k^{-1}$$

где u_x , u_y и p – трансформанты вектора перемещений и давления, штрих – производная по y . При этом в соответствии с принципом "закрытой системы" предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ жидкость не успевает вытечь из пор и начальное условие имеет вид $\theta^*(x, y, 0) \equiv 0$.

Выпишем трансформанты напряжений

$$\sigma_x = G(\alpha s u_x + \beta u'_y) - H_1 p, \quad \sigma_y = G(\beta s u_x + \alpha u'_y) - H_1 p \quad (1.11)$$

$$\tau = G(u'_x + s u_y)$$

При трансформировании уравнения (1.2)–(1.7) теряют звездочки. Других изменений они не претерпевают, и для краткости будут использованы в дальнейшем без оговорок. Уравнение (1.8) трансформируется в уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\mu \theta, \quad \theta = H_1 \operatorname{div} \mathbf{u} + (H_2 + H_3)p \quad (1.12)$$

Выпишем общее решение системы (1.10)

$$\begin{aligned} 2Gu_x &= D_1 \sin sy + D_3(y\eta_1 s \sin sy - \eta_3 \cos sy) + D_5 2Gs \sin qy - \\ &- D_2 \cos sy - D_4(y\eta_1 s \cos sy + \eta_3 \sin sy) - D_6 2Gs \cos qy \\ 2Gu_y &= D_1 \cos sy + D_3 y \eta_1 s \cos sy + D_5 2Gq \cos qy + \\ &+ D_2 \sin sy + D_4 y \eta_1 s \sin sy + D_6 2Gq \sin qy \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$p = D_3 s \cos sy + D_5 \lambda \eta_2 \sin qy + D_4 s \sin sy - D_6 \lambda \eta_2 \cos qy$$

$$\eta_j = (\beta + j)\eta + H_1, \quad \eta = (H_2 + H_3)GH_1^{-1}, \quad j = 1, 2, 3$$

$$q^2 = s^2 - \lambda H_4, \quad H_4 = H_2 + H_3 + H_1^2 (\alpha G)^{-1}$$

Постоянные D_1, \dots, D_6 в (1.13) определяются граничными условиями при $y = 0, y = 1$, которые складываются из условий упругости в перемещениях и напряжениях для скелета и условий фильтрации в давлениях и скоростях для поровой жидкости, а также из производных этих величин. В частности, это могут быть условия контакта полосы со штампами, балками, стрингерами, винклеровским или дренажным слоем. Указанные группы условий в общем случае не зависят одна от другой и могут быть поставлены в различных комбинациях, порождая соответствующие характеристические уравнения $N_m(\mu, s) = 0$ для собственных чисел $s_k(\mu)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), обладающие рядом общих свойств.

Рассмотрим задачу о давлении на полосу $-\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq 1$ полубесконечного проницаемого жесткого штампа $x \geq 0, y = 1$, при отсутствии контактного трения на обеих границах $y = 0$ и $y = 1$. Предполагая, что полоса опирается на жесткое непроницаемое основание, выпишем основные

$$y = 0: u_y = 0, \quad \tau = 0, \quad \partial p / \partial y = 0; \quad y = 1: \tau = 0, \quad p = 0 \quad (1.14)$$

и смешанные граничные условия

$$y = 1: \sigma_y = R(x, \mu), \quad x < 0; \quad u_y = Q(x, \mu), \quad x \geq 0 \quad (1.15)$$

где $R(x, \mu), Q(x, \mu)$ – трансформанты пригрузки $R^*(x, t)$ и осадки штампа $Q^*(x, t)$ соответственно.

Удовлетворяя условиям (1.14), можно записать (1.13) в виде

$$\begin{aligned} 2Gu_x &= C(s)[\eta_1 \eta_2 s \cos q(y \sin s \sin sy + \cos s \cos sy) + \\ &+ \lambda^{-1} 2Gs \cos s(q \sin q \cos sy - s \sin s \cos qy) - \eta \eta_2 \sin s \cos q \cos sy] \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$2Gu_y = C(s)[\eta_1 \eta_2 s \cos q(y \sin s \cos sy - \cos s \sin sy) -$$

$$-\lambda^{-1} 2Gs q \cos s(\sin q \sin sy - \sin s \sin qy) - \eta_2^2 \sin s \cos q \sin sy]$$

$$p = C(s) \eta_2 s \sin s(\cos q \cos sy - \cos s \cos qy)$$

где $C(s)$ – произвольная функция.

Удовлетворим условиям (1.15). Подставив в них выражения (1.16), получим два уравнения

$$\sigma^+(s) + \sigma^-(s) = -C(s)sN_1(s)/2 \quad (1.17)$$

$$u^+(s) + u^-(s) = -\eta_2^2 G^{-1} C(s) N_2(s) / 2$$

где

$$\sigma^+(s) = \int_0^{\infty} \sigma_y(x, 1) e^{-sx} dx, \quad \sigma^-(s) = \int_{-\infty}^0 R(x) e^{-sx} dx \quad (1.18)$$

$$u^+(s) = \int_0^{\infty} Q(x) e^{-sx} dx, \quad u^-(s) = \int_{-\infty}^0 u_y(x, 1) e^{-sx} dx$$

Индексы плюс и минус означают аналитичность функций в правой и левой полуплоскостях соответственно.

Характеристические функции однородных краевых задач (1.13)–(1.15) определяются выражениями

$$N_1(s) = N_1(\mu, s) = \eta_1 \eta_2 \cos q(2s + \sin 2s) + 4G\lambda^{-1} s \cos s(q \sin q \cos s - s \sin s \cos q) \quad (1.19)$$

$$N_2(s) = N_2(\mu, s) = \sin^2 s \cos q$$

Исключив в (1.17) функцию $C(s)$, получим уравнение Винера – Хопфа

$$\sigma^+(s) + \sigma^-(s) = K(s)[u^+(s) + u^-(s)], \quad s \in L_2 \quad (1.20)$$

$$K(s) \equiv K(\mu, s) = G\eta_2^{-2} s N_1(s) N_2^{-1}(s)$$

2. Исследование характеристических функций.

Теорема 1. Если $s = i\beta$, $\beta \neq 0$, – чисто мнимый параметр, то все корни характеристических уравнений $N_m(\mu, s) = 0$ ($m = 1, 2, \dots$) лежат на луче $\operatorname{Re} \mu \leq 0$, $\operatorname{Im} \mu = 0$.

Доказательство. Пусть $\chi = \varepsilon + i\delta$ – значение параметра μ , $s = i\beta$ – простой корень уравнения $N_m(\chi, s) = 0$, $u = u(\beta, y, \chi) e^{i\beta x}$ – какая-либо компонента однородного решения. Тогда вещественная u^r и мнимая u^i части функции u

$$u^r = u^r(\beta, y, \chi) \cos \beta x - u^i(\beta, y, \chi) \sin \beta x \quad (2.1)$$

$$u^i = u^r(\beta, y, \chi) \sin \beta x + u^i(\beta, y, \chi) \cos \beta x$$

не удовлетворяют уравнению (1.12), содержащему комплексный параметр $\mu = \chi$, поэтому не являются решениями задачи. Однако всем другим уравнениям и однородным граничным условиям они удовлетворяют.

Рассмотрим интеграл по границе $\partial\Omega$ прямоугольника $\Omega = \{x, y: a \leq x \leq b, -1 \leq y \leq 1\}$

$$L^{rr} = -\int_a^b f^{rr}(x, -1) dx + \int_{-1}^1 g^{rr}(b, y) dy + \int_a^b f^{rr}(x, 1) dx - \int_{-1}^1 g^{rr}(a, y) dy \quad (2.2)$$

$$f^{rr}(x, y) = [C(\tau^r u_x^r + \sigma_y^r u_y^r) + k p^r \partial p^r / \partial y](x, y, \chi)$$

$$g^{rr}(x, y) = [C(\sigma_x^r u_x^r + \tau^r u_y^r) + k p^r \partial p^r / \partial x](x, y, \chi)$$

где C – произвольная действительная постоянная, $b = a + 2\pi\beta^{-1}$.

В силу (2.1) справедливо равенство $g^{rr}(b, y) = g^{rr}(a, y)$, следовательно, второй и четвертый интегралы (2.2) взаимно уничтожаются. Первый и третий интегралы равны нулю, поскольку функции $f(x, \pm 1)$ – это суммы произведений действительных частей компонент однородного решения, обращающихся в нуль на границах $y = \pm 1$. Таким образом, $L^{rr} = 0$.

С другой стороны, согласно формуле Грина

$$\int_{\partial\Omega} -P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

записав L^r в виде криволинейного интеграла по замкнутому контуру $\partial\Omega$, из (2.2) имеем

$$C \left[\frac{\partial \tau^r}{\partial y} u_x^r + \tau^r \frac{\partial u_x^r}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y^r}{\partial y} u_y^r + \sigma_y^r \frac{\partial u_y^r}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x^r}{\partial x} u_x^r + \sigma_x^r \frac{\partial u_x^r}{\partial x} + \frac{\partial \tau^r}{\partial x} u_y^r + \tau^r \frac{\partial u_y^r}{\partial x} \right] +$$

$$+ k \left[\left(\frac{\partial p^r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p^r}{\partial y} \right)^2 + p^r \Delta p^r \right] dx dy \quad (2.3)$$

Введем вектор-функции $w^\alpha = (e_x^\alpha, e_y^\alpha, \theta^\alpha, e_{xy}^\alpha)$, $\sigma^\alpha = (\sigma_x^\alpha, \sigma_y^\alpha, p^\alpha, \tau^\alpha)$, компоненты которых – вещественные или мнимые части рассматриваемого однородного решения. Пусть $(\sigma^\alpha, w^\gamma)$ – их скалярные произведения, индексы α и γ могут принимать значения r и i . Подставив (1.5) в (1.3) и (1.4), получим $\sigma^\alpha = Aw^\alpha$, где A – квадратная матрица $\{a_{ik}\}$ размером 4×4 ,

$$a_{11} = a_{22} = 2G(1-\nu)(1-2\nu)^{-1} - H_1 \kappa_2, \quad a_{12} = 2G\nu(1-2\nu)^{-1} - H_1 \kappa_2 \quad (2.4)$$

$$a_{13} = a_{23} = -H_1 \kappa_1, \quad a_{33} = \kappa_1, \quad a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0, \quad a_{44} = G, \quad a_{ki} = a_{ik}$$

Так как матрица A симметрическая, то $(Aw^\alpha, w^\gamma) = (w^\alpha, Aw^\gamma)$ и, следовательно, имеет место "формула Бетти"

$$(\sigma^\alpha, w^\gamma) = (w^\alpha, \sigma^\gamma) \quad (2.5)$$

Согласно (1.2) в (2.3) слагаемые с множителями u_x^r и u_y^r в сумме равны нулю, слагаемые с множителем τ^r в сумме дают $\tau^r e_{xy}^r$. Из уравнений (1.7), (1.12) следует, что $p^r \Delta p^r = k^{-1} p^r (\epsilon \theta^r - \delta \theta^i)$. В итоге величину L^r можно представить в виде

$$L^r = \iint_{\Omega} \left\{ C(\sigma_0^r, w_0^r) + k \left[\left(\frac{\partial p^r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p^r}{\partial y} \right)^2 + k^{-1} p^r (\epsilon \theta^r - \delta \theta^i) \right] \right\} dx dy \quad (2.6)$$

$$\sigma_0^r = (\sigma_x^r, \sigma_y^r, \tau^r), \quad w_0^r = (e_x^r, e_y^r, e_{xy}^r)$$

Так как величина C произвольна и $L^r = 0$, то

$$\iint_{\Omega} (\sigma_0^r, w_0^r) dx dy = 0 \quad (2.7)$$

Положим $C = \epsilon$. Тогда из (2.6) и из равенства

$$(\sigma^r, w^r) = (\sigma_0^r, w_0^r) + p^r \theta^r \quad (2.8)$$

следует

$$L^r = \iint_{\Omega} \left\{ \epsilon (\sigma^r, w^r) + k \left[\left(\frac{\partial p^r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p^r}{\partial y} \right)^2 - \frac{\delta}{k} p^r \theta^i \right] \right\} dx dy \quad (2.9)$$

Из (2.4) и (1.5) для любых соответственных напряжений и деформаций, не обра-

щающихся одновременно в нуль, имеем

$$\begin{aligned} (\sigma, w) &= a_{11}(e_x^2 + e_y^2) + 2a_{12}e_x e_y + 2a_{13}(e_x + e_y)\theta + a_{33}\theta^2 + a_{44}e_{xy}^2 = \\ &= 2G(e_x^2 + e_y^2) + \frac{2G\nu}{1-2\nu}(e_x + e_y)^2 + \kappa_1[H_1(e_x + e_y) - \theta]^2 + Ge_{xy}^2 > 0 \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.7), (2.8) следует

$$\iint_{\Omega} (\sigma^r, w^r) dx dy > 0, \quad \iint_{\Omega} p^r \theta^r dx dy > 0 \quad (2.10)$$

Рассматривая интеграл L^{ii} и повторяя рассуждения (2.2)–(2.10), получим оценку

$$\iint_{\Omega} p^i \theta^i dx dy > 0 \quad (2.11)$$

Далее аналогично (2.9) выводятся равенства

$$L^{ri} = \iint_{\Omega} \left\{ \varepsilon(\sigma^r, w^i) + k \left[\frac{\partial p^r}{\partial x} \frac{\partial p^i}{\partial x} + \frac{\partial p^r}{\partial y} \frac{\partial p^i}{\partial y} + \frac{\delta}{k} p^r \theta^r \right] \right\} dx dy = 0 \quad (2.12)$$

$$L^{ir} = \iint_{\Omega} \left\{ \varepsilon(\sigma^i, w^r) + k \left[\frac{\partial p^i}{\partial x} \frac{\partial p^r}{\partial x} + \frac{\partial p^i}{\partial y} \frac{\partial p^r}{\partial y} - \frac{\delta}{k} p^i \theta^i \right] \right\} dx dy = 0 \quad (2.13)$$

Вычитая (2.13) из (2.12) и учитывая формулу (2.5), получим

$$\frac{\delta}{k} \iint_{\Omega} (p^r \theta^r + p^i \theta^i) dx dy = 0$$

что в силу неравенств (2.10), (2.11) возможно только при $\delta = 0$. Так как $L^{rr} = 0$, $k > 0$ и $\delta = 0$, то из (2.9), (2.10) следует, что $\varepsilon \leq 0$; знак равенства достигается при $\partial p^r / \partial x = \partial p^r / \partial y \equiv 0$.

Пусть $s = i\beta$ — n -кратный корень уравнения $N_m(\chi, s) = 0$. Тогда компоненты одного из n соответствующих однородных решений (вычета в n -кратном полюсе (1.9)) имеют прежнюю форму $u = u(\beta, y, \chi) e^{i\beta x}$ и как функции y при $s \neq 0$, очевидно, одновременно не обращаются в тождественный нуль. Таким образом, этот случай сводится к уже рассмотренному случаю простого корня. Теорема доказана.

Следствие 1. Если $\mu = \varepsilon + i\delta$, $\delta \neq 0$, то функции $N_m(\mu, s)$ не имеют чисто мнимых нулей $s = i\beta$, $\beta \neq 0$.

Лемма 1. Функция $K(\mu, s)$ четна по s .

Лемма 2. Функция $K(0) \equiv K(\mu, 0)$ обладает следующими свойствами:

- а) $K(0) \neq 0$ при любом $\mu = i\delta$, $\delta \neq 0$;
- б) $K(0) > 0$ при вещественных $\mu > 0$.

Доказательство. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} K(0) &= 4G\eta_2^{-2}(\eta_1\eta_2 - G\lambda^{-1}q^0 \operatorname{th} q^0), \quad q^0 = \sqrt{\lambda H_4} \\ K(0) &\rightarrow 2K_0, \quad \lambda \rightarrow 0; \quad K(0) \rightarrow 4G\eta_1\eta_2^{-1}, \quad \lambda \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$K_0 = 2G\eta_2^{-2}(\eta_1\eta_2 - GH_4) = G(1-\nu)^{-1} > 0; \quad \partial K(0) / \partial \lambda > 0$$

Отсюда следуют утверждения леммы.

Лемма 3. При фиксированном μ и $r \rightarrow \infty$

$$K(ir) = K_0 r + i\chi(r) + O(re^{-2r}), \quad \chi(r) = O(r^{-1}) \quad (2.15)$$

Теорема 2. При комплексных значениях $\mu = \epsilon + i\delta$, $\delta \neq 0$ индекс κ функции $K_2(s) = K(s) \operatorname{tg} \pi s (K_0 s)^{-1}$ (2.16)

на мнимой оси равен нулю.

Доказательство. Согласно условию, в силу лемм 1, 2 и следствия 1 функция $K_2(s)$ на мнимой оси непрерывна, четна, не имеет нулей и полюсов. Отсюда следует, что ее индекс в смысле главного значения Коши существует и равен нулю. Учитывая асимптотику (2.15), имеем

$$\ln K_2(ir) = r^{-1} + i\chi(r) + O(re^{-2|r|}), \quad \chi(r) = O(r^{-2}), \quad |r| \rightarrow \infty$$

$$\arg K_2(\pm i\infty) = \lim_{r \rightarrow \pm\infty} \operatorname{Im} \ln K_2(ir) = \lim_{r \rightarrow \pm\infty} [\operatorname{arctg} \chi(r)r^{-1}] = 0$$

Следовательно, $\kappa = 0$ и в обычном смысле.

3. Построение решения. Построим каноническое решение однородного уравнения

$$\sigma_0^+(s) = K(s)u_0^-(s), \quad s \in L_2 \quad (3.1)$$

Учитывая лемму 3, следствие 1 и теорему 2, функцию $K(s)$ можно факторизовать известным способом [10]. В результате получим

$$u_0^-(s) = \frac{\Gamma(1/2-s)}{\Gamma(1-s)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln K_2(r)}{r-s} dr \right\} \quad (3.2)$$

$$\sigma_0^+(s) = K_0 \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1/2+s)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln K_2(r)}{r-s} dr \right\}, \quad s \neq i\beta$$

При этом интеграл, вычисляемый как главное значение по Коши, имеет экспоненциальную сходимость. Общее решение уравнения (1.20) можно выписать в форме Ф.Д. Гахова [11].

Построим общее решение для случая отсутствия пригрузки и $Q(x, \mu) = -Q(\mu)$ в более простой форме [12]. Согласно (1.20) имеем

$$\sigma^+(s) = K(s)[u^+(s) + u^-(s)], \quad u^+(s) = -Q(\mu)s^{-1} \quad (3.3)$$

где $Q(\mu)$ – трансформанта заданной зависимости осадки штампа от времени.

Из условия конечности энергии под краем штампа, $\sigma_y(x, 1) \sim Ax^\varphi$, $\varphi > -1$ при $x \rightarrow +0$, имеем $\sigma^+(s) \sim A\Gamma(\varphi + 1)s^{-\varphi-1}$ при $s \rightarrow \infty$ [12]. Учитывая оценку $\sigma_0^+(s) = O(s^{1/2})$ при $s \rightarrow \infty$, по теореме Лиувилля получим

$$\sigma^+(s) = -\frac{Q(\mu)\sigma_0^+(s)}{su_0^-(0)}, \quad u_0^-(0) = \sqrt{\frac{K_0}{K(0)}} \quad (3.4)$$

Таким образом, решение поставленной задачи дается формулами (1.9), (1.16), где

$$C(s) = 2Q(\mu)G\eta_2^{-2} \frac{u_0^-(s)}{su_0^-(0)N_2(s)} \quad (3.5)$$

Покажем способ эффективного вычисления полученного решения при выполнении обратных преобразований (1.9). Рассмотрим поровое давление

$$p^*(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} p(x, y) e^{\mu t} d\mu \quad (3.6)$$

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} C(s)\eta_2 s \sin s (\cos q \cos sy - \cos s \cos qy) e^{sx} ds$$

При $x > 0$, используя (1.19) и (3.5), функцию $p(x, y)$ можно записать в виде

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \frac{2GQ(\mu)}{\eta_2 u_0^-(0)} \int_{L_2} \frac{u_0^-(s) (\cos q \cos sy - \cos s \cos qy)}{\sin s \cos q} e^{sx} ds \quad (3.7)$$

Учитывая, что подынтегральная функция мероморфна и замыкая контур интегрирования полуокружностью в левой полуплоскости $\operatorname{Re} s \leq \chi_2$, представим $p(x, y)$ в виде суммы рядов по вычетам в нулях функций $\sin s$ и $\cos q$:

$$p(x, y) = \frac{2GQ(\mu)}{\eta_2 u_0^-(0)} \left\{ u_0^-(0) \left(1 - \frac{chq^0 y}{chq^0} \right) + \sum_{n=-1}^{\infty} u_0^-(n\pi) \left[(-1)^n \cos n\pi y - \frac{\cos q_n y}{\cos q_n} \right] e^{n\pi x} + \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-1)^n u_0^-(s_n) (n\pi + \pi/2) \cos s_n \cos (n\pi + \pi/2) y}{s_n \sin s_n} e^{s_n x} \right\} \quad (3.8)$$

$$q_n = \sqrt{n^2 \pi^2 - \lambda H_4}, \quad s_n = -\sqrt{(n\pi + \pi/2)^2 + \lambda H_4}, \quad n = -1, -2, \dots$$

Рассмотрим две постановки задачи о погружении штампа: а) мгновенное погружение штампа в начальный момент времени на заданную величину Q_0 , б) погружение штампа по некоторому временному закону, удовлетворяющему условиям $Q^*(0) = 0$, $Q^*(t) \geq 0$, $Q^*(t) \rightarrow Q_0$ при $t \rightarrow \infty$. Заметим, что мгновенное перемещение штампа на заданную величину реально потребовало бы бесконечно больших затрат энергии, что можно обнаружить, используя уравнения динамической теории консолидации. При этом уравнения (1.1), не содержащие инерционных членов, естественно, не позволяют получить решение, адекватно описывающее физический процесс при $t \rightarrow 0$.

В первом случае $Q(\mu) = Q_0 \mu^{-1}$, во втором случае при простейшем временном законе $Q^*(t) = Q_0(1 - e^{-\gamma t})$, где произвольный параметр $\gamma > 0$ позволяет моделировать различные режимы нагружения штампа, $Q(\mu) = Q_0 \gamma [\mu(\mu + \gamma)]^{-1}$.

Вернемся к вычислению $p^*(t)$ по формулам (3.6), (3.8). Изменив порядок интегрирования по μ и суммирования рядов в формуле (3.8), рассмотрим первый из рядов (3.8). Замкнем контур интегрирования L_1 налево контуром, состоящим из четверти окружности большого радиуса во втором квадранте, контура L_3 , включающего полупрямую $\operatorname{Re} \mu = \chi_1$, $\operatorname{Im} \mu = \zeta$, $\zeta > 0$, отрезок прямой $\operatorname{Re} \mu = \chi_1$, $-\zeta \leq \operatorname{Im} \mu \leq \zeta$, полупрямую $\operatorname{Re} \mu \leq \chi_1$, $\operatorname{Im} \mu = -\zeta$, и из четверти окружности в третьем квадранте. Внутри рассматриваемого замкнутого контура подынтегральная функция не имеет особых точек, интегралы по дугам окружностей большого радиуса стремятся к нулю в силу леммы Жордана.

Особые точки n -го вычета подынтегральной функции в левой полуплоскости $\operatorname{Re} \mu \leq 0$ можно разделить на три группы. Первая определяется характером приложенной нагрузки и в рассматриваемом случае дает простые полюсы в точках $\mu = 0$ и $\mu = -\gamma$. Вторая группа – это нули $\cos q_n$, которые для любого n могут быть вычислены по формуле

$$\lambda_{nm} = \pi^2 H_4^{-1} [n^2 - (m + 1/2)^2], \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Поскольку начиная с некоторого $|m| > n$, $\lambda_{nm} < 0$, возникают простые полюсы, лежащие на отрицательной половине вещественной оси. Особые точки третьей группы определяются множителем $[u_0^-(0)]^{-1}$, который согласно (3.4), (2.14) может быть записан в виде

$$[u_0^-(0)]^{-1} = 2\sqrt{(1-\nu)\psi(\mu)}, \quad \psi(\mu) = \frac{\eta_1}{\eta_2} - \frac{Gq^0 \operatorname{th} q^0}{\eta_2^2 \lambda} \quad (3.9)$$

Здесь на отрицательной половине вещественной оси подкоренное выражение обращается в нуль в точках $\mu_m = -t_m^2 k H_4^{-1}$ ($m = 1, 2, \dots$), где t_m – корни уравнения

$$\chi t - \operatorname{tg} t = 0, \quad \chi = \eta_1 \eta_2 (G H_4)^{-1}, \quad \chi \geq \alpha \geq 2 \quad (3.10)$$

определяемые асимптотикой

$$t_m = \pi m - \pi/2 - 1/(\chi \pi m) + O(1/m^2)$$

Эти точки являются точками ветвления рассматриваемого множителя, и можно считать, что соответствующие разрезы целиком лежат на отрицательной полуоси.

Таким образом, в левой полуплоскости $\operatorname{Re} \mu \leq 0$ вне луча $\operatorname{Re} \mu \leq 0, \operatorname{Im} \mu = 0$ рассматриваемая функция – аналитическая, и вычисление медленно сходящегося интеграла по контуру L_1 можно заменить вычислением интеграла от экспоненциально убывающей функции на L_3 .

Для второго ряда (3.8) почленное вычисление интегралов по контуру L_1 весьма эффективно: при $\lambda = ir$ быструю сходимость обеспечивает множитель $e^{s_n x}$, так как

$$s_n = -\sqrt{\rho_n} (\cos \theta_n / 2 + i \sin \theta_n / 2), \quad \text{где } \rho_n = \sqrt{(n\pi + \pi/2)^4 + r^2 H_4^2}$$

$$\theta_n = \operatorname{arctg}[r H_4 (n\pi + \pi/2)^{-2}] \text{ и } \theta_n \rightarrow \pi/2 \text{ при } r \rightarrow \infty$$

Аналогично $p^*(x, y, t)$ вычисляются и другие компоненты решения.

4. Анализ решения. Оценим при $x > 0, y = 1$ и $t \rightarrow 0$ поведение функции $\partial p^* / \partial y$, определяющей скорость вытекания жидкости через пронизываемый штамп в начальный момент времени. Согласно (3.8) на границе $y = 1$ при $\mu \rightarrow \infty$ имеем $\partial p / \partial y \sim Q(\mu) \mu^{1/2}$.

По теореме абелева типа отсюда следует, что скорость бесконечна, $\partial p^* / \partial y \sim t^{-1/2}$, $t \rightarrow 0$, при мгновенном погружении штампа и равна нулю, $\partial p^* / \partial y \sim t^{1/2}$, $t \rightarrow 0$, при погружении штампа по экспоненциальному закону.

Определим коэффициент интенсивности нормальных напряжений под краем штампа как функцию времени. Из (3.2), (3.4) получаем

$$\sigma^+(s) \sim -Q(\mu) \sqrt{K_0 K(0)} s^{-1/2} \text{ при } s \rightarrow \infty$$

Отсюда, учитывая связь асимптотик оригинала и трансформанты, получаем

$$\sigma_{ys}(x, 1) \sim -Q(\mu) \sqrt{K_0 K(0)} (\pi x)^{-1/2} \text{ при } x \rightarrow +0$$

Поведение нормальных напряжений под краем штампа во времени дается выражением ($k = 1, 3$)

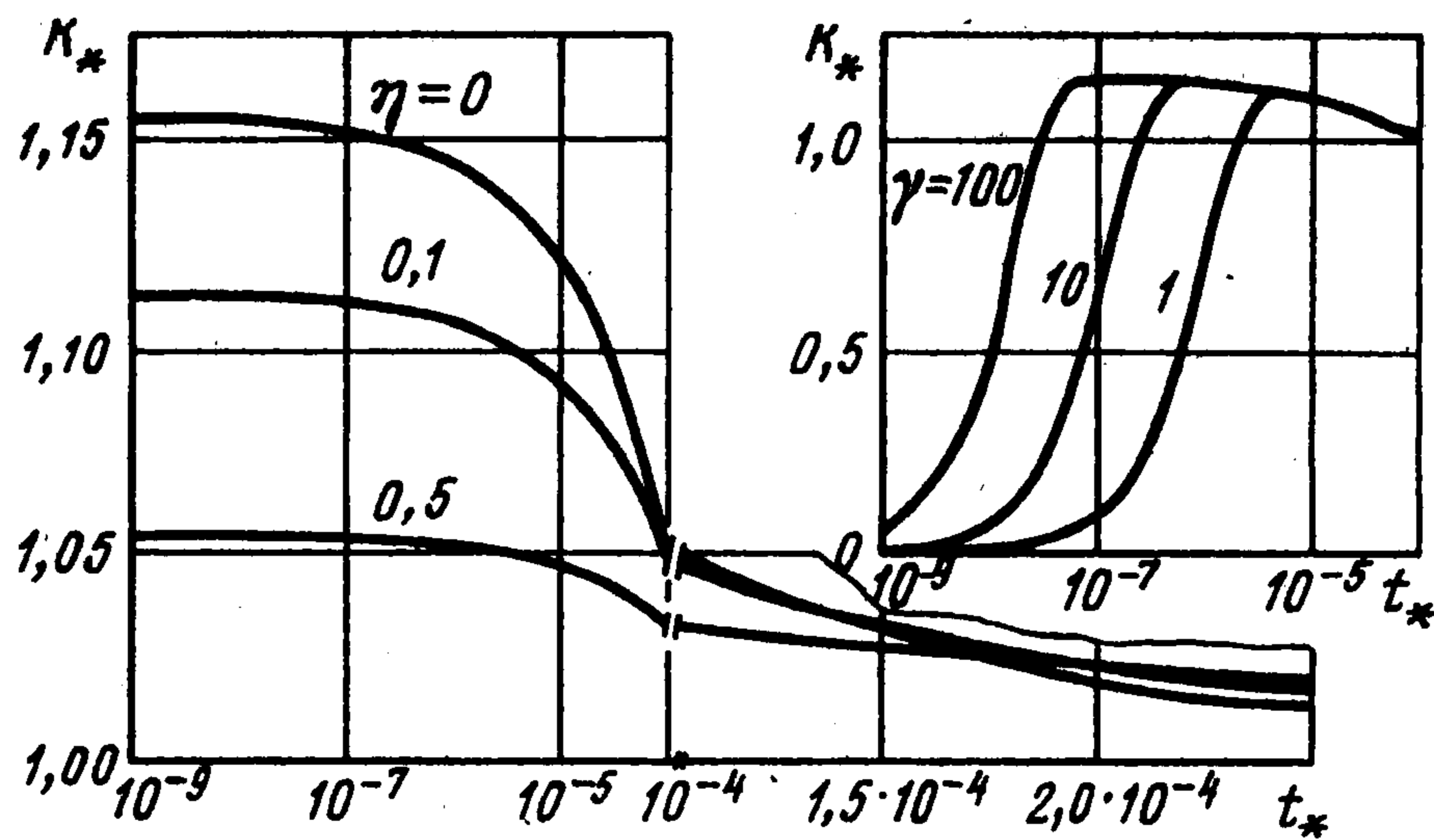
$$\sigma_{ys}^*(x, 1, t) \sim \frac{K_1(t)}{\sqrt{2\pi x}}, \quad K_1(t) = -\frac{2\sqrt{2}G}{\sqrt{1-\nu}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} Q(\mu) \sqrt{\psi(\mu)} e^{\mu t} d\mu \quad (4.1)$$

Можно проверить, что $\psi(\mu) \rightarrow [2(1-\nu)]^{-1}$ при $\mu \rightarrow 0$ и, следовательно, при $t \rightarrow \infty$ согласно (4.1) при $k = 1$ имеем

$$\sigma_{ys}^*(x, 1) \sim \frac{K_1}{\sqrt{2\pi x}}, \quad K_1 = -\frac{2GQ_0}{1-\nu}$$

что совпадает с асимптотикой контактных напряжений под краем штампа в задаче теории упругости, соответствующей задаче консолидации при $t \rightarrow \infty$.

На фигуре приведены графики изменения во времени коэффициентов интенсивности напряжений (4.1) при $G = 1000, \nu = 1/3, c_2 = \infty$ (несжимаемый материал скелета) для задачи о мгновенном погружении штампа при трех значениях параметра η (левая



и нижняя часть фигуры) и для задачи о погружении штампа по экспоненциальному закону при трех значениях параметра γ и $\eta = 0$ (правая верхняя часть фигуры); $t_* = kt[G]$ – безразмерная величина, $[G]$ – размерность G , единицей длины служит толщина полосы, $K_* \equiv K_1(t_*)/K_1$. В первой задаче поведение функции $\sigma_{ys}^*(x, 1, t)$ при малых t и $x \rightarrow 0$ можно определить по асимптотической формуле

$$\sigma_{ys}^*(x, 1, t) \sim \frac{K_1^0}{\sqrt{2\pi x}}, \quad K_1^0 = -\frac{2\sqrt{2GQ_0}}{\sqrt{1-\nu}} \sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_2}}$$

которая дает те же значения $K_1(0)$, что и графики на левой и нижней части фигуры. Сравнение числовых значений функции $K_1(t)$ на фигуре при $\eta = 0$ и $\gamma = 100$ показывает, что они совпадают с точностью до трех значащих цифр уже при $t_* = 1,7 \cdot 10^{-7}$. Этот результат оправдывает более простую постановку задачи с мгновенным погружением штампа, несмотря на бесконечно большую скорость вытекания жидкости при $t \rightarrow 0$.

Пусть штамп вдавливаются в полосу под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $\sigma_0^*(t)$. Тогда контактные напряжения при $x \rightarrow \infty$ принимают значение $\sigma_y^*(x, 1, t) = -\sigma_0^*(t)$, что дает возможность найти временной закон погружения штампа $Q_0^*(t)$. Действительно, вычисляя вычет в полюсе $s = 0$, из (1.9), (1.11), (1.16), (3.5), (3.9) получим

$$\sigma_y(x, 1, \mu) = 4GQ_0(\mu)\psi(\mu), \quad Q_0(\mu) = [4G\psi(\mu)]^{-1}\sigma_0(\mu)$$

В частности, если нагрузка не зависит от времени, $\sigma_0^*(t) = \sigma_0$, то $Q_0(\mu) = [4G\mu\psi(\mu)]^{-1}\sigma_0$. Отсюда и из (1.9), суммируя вычеты в корнях уравнения (3.10), получим формулу осадки штампа

$$u_y^*(1, t) = -\frac{\sigma_0}{2G} \left[(1-\nu) - \frac{\alpha\eta_2}{H_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(-t_m^2 k H_4^{-1} t)}{\chi^2 t_m^2 + 1 - \chi} \right] \quad (4.2)$$

Полная осадка u_y^s равна

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_y^*(1, t) = -\sigma_0(1-\nu)(2G)^{-1}$$

При $t = 0$ ряд в формуле (4.2) суммируется

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\chi^2 t_m^2 + 1 - \chi} = \frac{1}{2\chi(\chi-1)}$$

что позволяет найти начальную осадку

$$u_y^0 = \lim_{t \rightarrow 0} u_y^*(1, t) = -\frac{\sigma_0}{4G} \frac{\eta_2}{\eta_1}, \quad \eta_2 \geq \eta_1 \geq 1$$

Если материал скелета и поровая жидкость несжимаемы, то $\eta_2 = \eta_1 = 1$, $u_y^0 / u_y^s = [2(1-\nu)]^{-1}$. Если несжимаем и сам скелет ($\nu \rightarrow 1/2$), то $u_y^0 = u_y^s$, штамп сразу погружается на полную глубину.

Оценим скорость вытекания жидкости в начальный момент времени. При $x \rightarrow \infty$ имеем

$$v_y^*(x, 1, t) = -k \frac{\partial p^*}{\partial y} \sim \frac{\sigma_0 \sqrt{H_4 k}}{2\sqrt{\pi} \eta_1} t^{-1/2}, \quad t \rightarrow 0$$

Если материал скелета и поровая жидкость несжимаемы, то при $x \rightarrow \infty$

$$v_y^*(x, 1, t) \sim \frac{\sigma_0 \sqrt{(1-2\nu)k}}{2\sqrt{2\pi} \sqrt{(1-\nu)G}} t^{-1/2}, \quad t \rightarrow 0$$

Можно проверить также, что при $x \rightarrow \infty$ $\partial p^* / \partial x = 0$, $\tau^* = 0$; σ_x^* зависит от y , но

$$\int_0^1 \sigma_x^* dy = 0$$

Отметим, что при $x \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow 0$ $p^*(x, 0, t) \rightarrow \sigma_0 (2\eta_1)^{-1}$, т.е. в случае несжимаемого материала скелета и поровой жидкости $p^*(x, 0, t) \rightarrow \sigma_0 / 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation // J. Appl. Phys. 1941. V. 12. № 2. P. 155–165.
2. McNamee J., Gibson R.E. Plane strain and axially symmetric problems of the consolidation of a semi-infinite clay stratum // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1960. V. 13. Pt 2. P. 210–227.
3. Gibson R.E., McNamee J. A three-dimensional problem of the consolidation of a semi-infinite clay stratum // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1963. V. 16. Pt 1. P. 115–127.
4. Derski W. Equations of the consolidation theory for the case of a source of fluid // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Tech. 1965. V. 13. No. 1. P. 37–43.
5. Керчман В.И. Задачи консолидации и связанной термоупругости для деформируемого полупространства // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 1. С. 45–54.
6. Калинин Н.Н., Нуллер Б.М. Уравнения транспорта волокнистого консолидируемого материала и эффект пристенного слоя // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 3. С. 522–525.
7. Глазовский В.Б., Нуллер Б.М. Аналитические решения связанных задач консолидации двухфазной пористой среды для прямоугольных областей // Изв. ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. 1991. Т. 223. С. 31–40.
8. Керчман В.И. Контактная задача теории консолидации водонасыщенной среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 3. С. 102–109.
9. Коваленко Е.В. О расчете тонких пористых покрытий // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 3. С. 469–473.
10. Нуллер Б.М. Контактная задача для упругого клина, подкрепленного стержнем равного сопротивления // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225. № 3. С. 532–534.
11. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
12. Noble B. Methods based on the Wiener – Hopf technique for the solution of partial differential equations. Pergamon press, 1958. (Русский перевод: Нобл Б. Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр.лит., 1962. 279 с.)