

УДК (531.36+531.3):534.1

© 1999 г. Л.Д. Акуленко, С.В. Нестеров, А.М. Шматков

КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ТЯЖЕЛОЙ НЕОДНОРОДНОЙ НИТИ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

Исследуются линейные колебания тяжелой неоднородной нити с учетом произвольного дополнительного натяжения при различных условиях закрепления ее концов. Нить предполагается идеальной и нерастяжимой, а движение происходит в плоскости, которая может вращаться вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью. Предложена общая схема решения начально-краевой задачи. Основное внимание уделено эффективному вычислению собственных частот и форм колебаний. Для конкретных параметрических типов распределения массы нити построены достаточно полные семейства решений, описывающие главные моды колебаний. На их основе конструктивно строятся в терминах параметров системы области устойчивости и неустойчивости плоских колебаний вращающейся тяжелой нити с учетом сосредоточенного натяжения. Обнаружены и прокомментированы новые механические эффекты, которые могут представить интерес для приложений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим малые плоские поперечные колебания вращающейся тяжелой неоднородной нити с учетом произвольного дополнительного натяжения. Условия крепления нити вверху и внизу принимаются в общем виде неоднородных граничных условий третьего рода (упругое закрепление). В результате приходим к краевой задаче

$$\rho(x)\ddot{u} = (W(x)u')' + \rho(x)\omega^2 u + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad u = u(x,t) \quad (1.1)$$

$$W(x)u'(x,t) \mp k_x u(x,t) = \mp h_x(t), \quad x = 0, l \quad (1.2)$$

Здесь u – поперечные смещения элементов нити во вращающейся вокруг вертикальной оси x плоскости; точками обозначены производные по времени t , штрихами – по эйлеровой координате x , l – длина нити. Далее, $\rho(x)$ – линейная плотность, $W(x)$ – полное натяжение в сечении x , ω – угловая скорость вращения плоскости ($\omega = \text{const}$), $f(x, t)$ – распределенная внешняя сила; $k_{0,l}$ – коэффициенты упругости крепления, $h_{0,l}(t)$ – внешние силовые воздействия, сосредоточенные при $x = 0, l$. Функция $\rho(x)$ предполагается непрерывной и отделимой от нуля: $0 < \rho_1 \leq \rho(x) \leq \rho_2 < \infty$; функции $f(x, t)$, $h_{0,l}(t)$ также считаются достаточно гладкими в области их определения.

Считаем далее, что суммарное натяжение нити $W(x)$ в (1.1), (1.2) обусловлено двумя факторами: весом отрезка нити $m(x)g$ и дополнительной сосредоточенной на нижнем конце нагрузкой W_0 , т.е. представимо в виде

$$W(x) = m(x)g + W_0, \quad m(x) = \int_0^x \rho(s)ds, \quad W_0 \geq 0, \quad g > 0 \quad (1.3)$$

Здесь g – ускорение сил тяготения (при необходимости можно учесть его перемен-

ность), W_0 – сосредоточенная на нижнем или (и) верхнем конце ($x = 0$) сила (вес груза, действующего через блок, или сила другой физической природы – упругая, электромагнитная и т.п.). Растяжением нити пренебрегаем, поскольку обычно $W(x) \ll ES(x)$, где E – модуль Юнга материала, $S(x)$ – площадь поперечного сечения. Исследование совместных поперечных и продольных колебаний требует отдельного рассмотрения. Чтобы определить движение системы (1.1)–(1.3), нужно задать начальные распределения смещений и скоростей точек нити

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad \dot{u}(x, 0) = \dot{u}^0(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.4)$$

Функции u^0, \dot{u}^0 (1.4) предполагаются достаточно гладкими для существования сильного (физического) решения начально-краевой задачи (1.1)–(1.4). Требуется построить это решение и исследовать его свойства в зависимости от параметров системы.

Отметим, что исследования колебаний тяжелой нити с учетом дополнительного натяжения (как продольных, так и поперечных) представляют значительный интерес в теоретическом и прикладном аспектах, см. [1–5] и др. Особенно важным при этом оказывается анализ собственных колебаний, в основе которого лежит решение краевой задачи на собственные значения и функции для уравнения с переменными коэффициентами [1–9].

Замечание. Математическая модель колебаний тяжелой нити в произвольной плоскости при отсутствии вращения нити (классический случай) получается из вышеприведенной, если в уравнении (1.1) положить $\omega = 0$. Малые колебания свободной (не стесненной плоскими ограничениями) вращающейся нити в общем случае будут пространственными вследствие наличия сил инерции Кориолиса. Во вращающейся системе они описываются векторными соотношениями (см. (1.1), (1.2), (1.4))

$$\rho(x)\ddot{\mathbf{u}} = (W(x)\mathbf{u}')' + \rho(x)(\omega^2\mathbf{u} - 2[\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}]) + \mathbf{f}(x, t) \quad (1.5)$$

$$W(x)\mathbf{u}'(x, t) \mp k_x \mathbf{u}(x, t) = \mp \mathbf{h}_x(t), \quad x = 0, l$$

Посредством ортогонального преобразования, т.е. переходя к невращающейся системе координат, получим краевую задачу, эквивалентную случаю $\omega = 0$. При этом соответствующим образом должны быть преобразованы векторы $\mathbf{f}, \mathbf{h}_{0,l}, \mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}^0$ в (1.5). Действительно, имеем

$$\rho(x)\ddot{\mathbf{U}} = (W(x)\mathbf{U}')' + \mathbf{F}(x, t, \varphi), \quad \mathbf{u} = \Pi(\varphi)\mathbf{U} \quad (1.6)$$

$$[W(x)\mathbf{U}' \mp k_x \mathbf{U}]_{x=0,l} = \mp \mathbf{H}_{0,l}, \quad \mathbf{H}_{0,l} = \Pi^{-1}(\varphi)\mathbf{h}_{0,l}(t)$$

$$\mathbf{F} = \Pi^{-1}(\varphi)\mathbf{f}, \quad \Pi^{-1}(\varphi) = \Pi(-\varphi) = \Pi^T(\varphi), \quad \varphi = \omega t$$

Здесь $\Pi(\varphi)$ – матрица поворота. В итоге получена система двух краевых задач (1.6). Каждая задача для компонент U_1, U_2 вектора \mathbf{U} может быть исследована независимо, поскольку составляющие векторов $\mathbf{F}, \mathbf{H}_{0,l}, \mathbf{U}^0, \dot{\mathbf{U}}^0$ известны. Однородные краевые задачи и соответствующие им задачи Штурма – Лиувилля не содержат параметр ω перед U, \dot{U} , т.е. эквивалентны случаю $\omega = 0$ в (1.1). Поэтому систему (1.1), (1.2) можно считать более содержательной и общей, чем приведенный выше векторный аналог (1.5), (1.6). Отметим, что эти задачи существенно различаются по постановке и их решения могут быть качественно различными.

Аналогичную (1.6) краевую задачу можно получить введением комплексной переменной $z = u_1 - iu_2$ и заменой $z = w \exp(i\varphi)$. Неизвестная комплексная функция $w(x, t)$ описывается соотношениями вида (1.1), (1.2) (при $\omega = 0$ перед u в уравнении колебаний (1.1)). Конечно, преобразованные функции $f, h_{0,l}$ будут содержать множитель $\exp(-i\varphi)$.

2. Решение начально-краевой задачи. Применим стандартный подход (метод Фурье), основанный на построении решения однородной краевой задачи (1.1), (1.2) (при $f = h_{0,l} \equiv 0$), поскольку она допускает разделение переменных. Для определения

собственных значений (частот) и функций (форм колебаний) получим модифицированную самосопряженную краевую задачу (задачу Штурма–Лиувилля [6–9])

$$(W(x)X')' + \Lambda p(x)X = 0, \quad \Lambda = \lambda + \omega^2 \quad (2.1)$$

$$W(x)X'(x) \mp k_x X(x) = 0, \quad x = 0, l$$

Здесь Λ и $X(x)$ – искомые собственные значение и функция задачи (2.1), λ – параметр разделения. Требуется построить полное счетное семейство ортонормированных функций $\{X_n(x)\}$ (базис) и множество чисел $\{\Lambda_n\}$ [6–9]. Решение этой проблемы представляет основной интерес в прикладном аспекте, см. ниже.

Пусть указанные семейства известны; тогда для коэффициентов Фурье $\Theta_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) получается счетная линейная система независимых уравнений и начальных условий

$$\ddot{\Theta}_n + \lambda_n \Theta_n = f_n(t) + X_n(0)h_0(t) + X_n(l)h_l(t), \quad f_n = (f, X_n) \quad (2.2)$$

$$\Theta_n(0) = (u^0, X_n)_p, \quad \dot{\Theta}_n(0) = (\dot{u}^0, X_n)_p, \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(t) X_n(x)$$

Здесь круглыми скобками обозначены скалярные произведения.

Решение $\Theta_n(t)$ задачи Коши (2.2) строится элементарно посредством простых квадратур. Далее предполагается, что свободные движения нити (при $f = h_{0,l} \equiv 0$) имеют колебательный характер, т.е. минимальное собственное число $\lambda_1 > 0$. Ситуация, когда $\lambda_1 \leq 0$, может представить интерес для приложений, поскольку при этом происходит потеря устойчивости плоских колебаний вращающейся нити. Такое состояние движения означает, что происходит экспоненциальный или линейный рост во времени смещений и скоростей элементов нити. В этом случае необходим учет нелинейных факторов, диссипации и т.п.

В теоретическом и прикладном аспектах представляется наиболее важным высокоточное исследование поведения низших частот свободных колебаний, в частности, первой частоты [6–9]. Достаточно точное вычисление и детальный анализ первого собственного значения λ_1 как функции параметров системы (1.1), (1.2) будет целью дальнейших исследований. Для этого используется эффективный численно-аналитический метод ускоренной сходимости, основанный на вариационном подходе к решению задачи Штурма – Лиувилля (2.1) и установленной дифференциальной связи между собственным значением λ_1 и параметром l – длиной нити [8].

3. Вариационный подход к решению задачи Штурма – Лиувилля. Представим соотношения (2.1) в форме вариационной изопериметрической задачи [6–9]

$$\Phi[X] = \int_0^l W(x)X'^2 dx - W(x)X'X \Big|_0^l \rightarrow \min_X \quad (3.1)$$

$$I[X] = \|X\|^2 = (X, X)_p = 1, \quad [W(x)X'(x) \mp k_x X(x)]_{x=0,l} = 0$$

Абсолютный минимум функционала $\Phi[X] = \Lambda$ задачи (3.1) есть первое собственное число Λ_1 , а соответствующая дифференцируемая функция $X(x, \Lambda)$, на которой он достигается, есть первая собственная функция $X_1(x) = X(x, \Lambda_1)$. При $W(x) \geq W_0 > 0$ решение вариационной задачи существует и единственное, причем $\Lambda_1 > 0$ для всех $k_{0,l} \geq 0$. Лишь в предельном случае $k_{0,l} = 0$ (оба конца нити свободны) значение $\Lambda_0 = 0$ ($\lambda_0 = -\omega^2 \leq 0$), а функция $X_0(x) \equiv 1/\sqrt{m(l)}$, где $m(l)$ – масса нити.

Последующие собственные значения Λ_n и функции $X_n(x)$, где $n \geq 2$ определяются

соотношениями (3.1) и дополнительными условиями ортогональности с весом $\rho(x)$ искомым функций к предыдущим, что можно представить с помощью рекуррентного выражения

$$I_k[X] = (X, X_{k-1}(x))_\rho = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

Функции X_1, X_2, \dots, X_{n-1} в (3.2) считаются известными; они строятся на предыдущих шагах. Общие свойства значений Λ_n в зависимости от индекса n и функций $X_n(x)$ в зависимости от n и x достаточно хорошо изучены [6–9].

Задача Штурма – Лиувилля (2.1) есть соответствующая краевая задача для уравнения Эйлера – Лагранжа. Она определяет необходимые и достаточные условия минимума функционала Φ вариационной задачи (3.1), (3.2); Λ – множитель Лагранжа. Отметим, что терминальное слагаемое в (3.1) также положительно определено при $k_{0,l} > 0$.

С помощью (3.1) можно получить оценку сверху Λ_1^* первого собственного значения (числа) Λ_1 (принцип Релея [6–9])

$$0 < \Lambda_1 \leq \Lambda_1^* = \Phi[\psi] / I[\psi], \quad [W(x)\psi'(x) \mp k_x \psi(x)]_{x=0,l} = 0 \quad (3.3)$$

Здесь $\psi(x)$ – некоторая непрерывно-дифференцируемая "пробная" функция (или функция сравнения), удовлетворяющая краевым условиям (3.3) и выбираемая из общих физических представлений о первой форме колебаний (часто в виде тригонометрических или полиномиальных функций), см. ниже. Вычислительная практика показывает [6–9], что даже при весьма грубом выборе функции $\psi(x)$ выражение (3.3) дает приемлемые результаты: начальная оценка Λ_1^* отличается от точного значения с относительной погрешностью порядка 1%–10%. Такая точность позволяет применить процедуру дальнейшего уточнения Λ_1 с весьма высокой точностью (относительной погрешностью 10^{-4} – 10^{-8}) посредством весьма незначительных вычислительных затрат, см. разд. 4–6. Как отмечалось в разд. 2, для этой цели разработан быстро-сходящийся метод ускоренной (квадратичной) сходимости. Если начальное приближение Λ_1 (а также $\Lambda_2, \Lambda_3, \dots$) недостаточно точно, то могут быть применены другие приемы (методы Релея – Ритца, конечных элементов, продолжения по параметру и др.). Обоснование и оценка скорости сходимости метода Релея – Ритца содержатся в трудах Н.М. Крылова [6] и др. Для вычисления высших собственных значений $\Lambda_n (n \geq 1)$ получены высокоточные асимптотические формулы [9], позволяющие их применять также при сравнительно небольших $n (n \geq 5)$ и дающие в ряде случаев удовлетворительные результаты при $n \geq 2$.

4. Метод ускоренной сходимости. Изложим существо метода (алгоритм) применительно к задаче Штурма – Лиувилля (2.1) с использованием вариационных соотношений (3.1)–(3.3), см. [8]. Ради определенности рассмотрим случай $n = 1$, который представляет специальный интерес для приложений, в частности, при исследовании устойчивости плоских колебаний вращающейся тяжелой нити с учетом дополнительного натяжения. Номер индекса далее опускается с целью сокращения записи.

Итак, пусть каким-либо способом, например методом Релея – Ритца или продолжения по параметру (см. разд. 5, 6), получено приближенное значение Λ^0 (в частности, $\Lambda^0 = \Lambda^*(3.3)$). Тогда для уравнения (2.1) можно поставить задачу Коши [8].

$$(W(x)v')' + \Lambda^0 \rho(x)v = 0, \quad v(0) = \alpha_0 l, \quad v'(0) = \beta_0, \quad \alpha_0 + \beta_0 = 1 \quad (4.1)$$

$$\alpha_0 = d_0(d_0 + k_0)^{-1}, \quad \beta_0 = k_0(d_0 + k_0)^{-1}, \quad d_0 = W_0 l^{-1}$$

Решение $v(x, \Lambda^0), v'(x, \Lambda^0)$ задачи Коши (4.1) далее предполагается известным достаточно точно в численном или аналитическом виде или в виде вычислительной

процедуры. Оно автоматически удовлетворяет нулевому граничному условию (2.1) при $x = 0$. Зависимость функций v, v' от других параметров (k_0, d_0, W_0, g и входящих в $\rho(x)$) не указывается пока для сокращения записи, см. далее.

Вычислим теперь функцию $E(x, \Lambda^0)$ и потребуем обращения ее в нуль при некотором минимальном значении $x = \xi^0 > 0$, т.е. найдем первый положительный корень ξ^0 уравнения

$$E(x, \Lambda^0) = \alpha_l l v(x) v'(x, \Lambda^0) + \beta_l v(x, \Lambda^0) = 0, \quad \alpha_l + \beta_l = 1 \quad (4.2)$$

$$\alpha_l = d_l (d_l + k_l)^{-1}, \quad \beta_l = k_l (d_l + k_l)^{-1}, \quad d_l = W(l) l^{-1}$$

$$v(x) \equiv W(x) W(l)^{-1}, \quad \xi^0 = \xi(\Lambda^0) = \min \arg_x E(x, \Lambda^0) > 0$$

Соотношение для определения ξ^0 (4.2) строится в процессе численного интегрирования задачи Коши (4.1). При достаточно близком Λ^0 к Λ корень ξ^0 существует и является простым. В качестве меры относительной близости δ возьмем числовой параметр ϵ :

$$\epsilon = (l - \xi^0) l^{-1}, \quad 0 \leq |\epsilon| \leq 1, \quad \delta = (\Lambda - \Lambda^0) \Lambda^{-1}, \quad 0 \leq |\delta| \leq 1 \quad (4.3)$$

Величина $\epsilon = 0$ лишь когда $\delta = 0$ и наоборот. Далее для заданного Λ^0 значение корня ξ^0 и параметр ϵ (4.3) предполагаются найденными достаточно точно. В излагаемой процедуре решение задачи (4.1)–(4.3) оказывается одной из основных операций, требующей определенных вычислительных затрат.

Применим методы теории возмущений [10, 11] для приближенного решения исходной задачи Штурма – Лиувилля (2.1). Согласно изложенному ранее [8, 11] получим в первом приближении по ϵ (с погрешностью $O(\epsilon^2)$) уточненное значение $\Lambda^{(1)}$:

$$\Lambda^{(1)} = \Lambda^0 + \epsilon \mu(\xi^0, \Lambda^0), \quad \xi^0 = \xi(\Lambda^0), \quad \mu < 0 \quad (4.4)$$

$$\mu(\xi^0, \Lambda^0) = -\xi^0 W(\xi^0) v'^2(\xi^0, \Lambda^0) \|v_0\|^{-2} - \Lambda^0 \xi^0 \rho(\xi^0) v^2(\xi^0, \Lambda^0) \|v_0\|^{-2}$$

Здесь $\|v_0\|$ – среднеквадратическая норма с весом $\rho(x)$ функции $v_0 = v(x, \Lambda^0)$, определяемая аналогично (2.2) на интервале $0 \leq x \leq \xi^0$. Согласно (4.4) величина $\mu(l, \Lambda) l^{-1}$ есть производная собственного значения Λ по l ; очевидно, что она строго отрицательна. Это означает, что увеличение длины l нити (струны) уменьшает частоту собственных колебаний $(\Lambda - \omega^2)^{1/2}$, а уменьшение ее увеличивает.

Процесс уточнения Λ может быть неограниченно продолжен. Используем теперь уточненное значение $\Lambda^{(1)}$ в качестве начального приближения аналогично Λ^0 в соотношениях типа (4.1)–(4.4); получим вновь уточненное значение $\Lambda^{(2)} = \Lambda^{(1)} + \epsilon^{(1)} \mu(\xi^{(1)}, \Lambda^{(1)})$, где $\epsilon^{(1)}$ отвечает корню $\xi^{(1)} = \xi(\Lambda^{(1)})$; и т.д. В результате приходим к следующей рекуррентной процедуре уточнения собственного значения Λ и функции X , обладающей свойством ускоренной (квадратической) сходимости по отношению к исходному малому параметру ϵ . Этот алгоритм описывается соотношениями

$$\Lambda^{(k+1)} = \Lambda^{(k)} + \epsilon^{(k)} \mu(\xi^{(k)}, \Lambda^{(k)}), \quad \epsilon^{(k)} = (l - \xi^{(k)}) l^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\xi^{(k)} = \xi(\Lambda^{(k)}) = \min \arg_x E(x, \Lambda^{(k)}) > 0, \quad \xi^{(0)} = \xi^0 = \xi(\Lambda^0), \quad \epsilon^{(0)} = \epsilon \quad (4.5)$$

$$E(x, \Lambda^{(k)}) \equiv \alpha_l l v(x) v'(x, \Lambda^{(k)}) + \beta_l v(x, \Lambda^{(k)}) = 0$$

$$(W(x) v')' + \Lambda^{(k)} \rho(x) v = 0, \quad v(0) = \alpha_0 l, \quad v'(0) = \beta_0, \quad v_{(k)} = v(x, \Lambda^{(k)})$$

Функции $v_{(k)}, v'_{(k)}, E$ получаются в результате численного интегрирования задачи Коши (4.5), т.е. задачи (4.1) при $\Lambda^0 = \Lambda^{(k)}$; значение $\Lambda^{(k)}$ предполагается вычисленным

на предыдущем шаге итерации. Процедура (4.5) дает следующие оценки погрешности на $(k+1)$ -м шаге [8]:

$$\begin{aligned} |\Lambda^{(k+1)} - \Lambda| &\leq C_{\Lambda} \varepsilon^{(k+1)}, \quad |\varepsilon^{(k)}| \leq d(c\varepsilon)^{\theta(k)}, \quad \theta(k) = 2^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ \max_x (|X(x, \Lambda) - v(x, \Lambda^{(k)})| + l |X'(x, \Lambda) - v'(x, \Lambda^{(k)})|) &\leq C_X \varepsilon^{(k)} \\ 0 \leq x &\leq \max(l, \xi^{(k)}), \quad C_{\Lambda, X}, c, d = \text{const} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Постоянные $C_{\Lambda, X}$, c , d могут быть оценены эффективно на основе свойств функции $\rho(x)$ и величин l , W_0 , g , $k_{0, l}$. Таким образом, алгоритм (4.5) приводит к ускоренной (квадратичной по ε), сходимости искомых величин согласно (4.6). Процесс вычислений, как показывает вычислительная практика, весьма эффективен: он прост в реализации, помехоустойчив и не приводит к накоплению ошибок округлений. Обычно 2–4 итерации позволяют определить практически точные значения Λ , $X(x)$, $\|X\|$, X' при довольно грубом выборе пробной функции $\psi(x)$ (3.3). Эффективность расчетов существенно увеличивается сочетанием алгоритма ускоренной сходимости с процедурой продолжения по параметрам системы, в зависимости от значений которых строится искомое решение Λ , $X(x)$, см. ниже. Отметим, что точность вычислений согласно (4.5) должна быть согласована с порядком итерации k ; излишне точные вычисления проводить не имеет смысла.

Последующие числа Λ_n и функции $X_n(x)$, $n \geq 2$ определяются по вышеизложенной схеме. Различие заключается в том, что из уравнения $E(x, \Lambda_n^{(k)}) = 0$, см. (4.2), (4.5) вычисляется с требуемой точностью n -й корень $\xi_n(\Lambda_n^{(k)})$, а не первый, как в рассмотренном случае.

Вычисление квадратур для среднеквадратической с весом $\rho(x)$ нормы $\|v_{(k)}\|$ в выражениях (4.4), (4.5) обычно осуществляется высокоточным методом интегрирования функций, определяемых численно решением задач Коши, например методом Симпсона. Этот процесс можно заменить вычислением функций $w = \partial v / \partial \Lambda$, $w' = dw / dx$ путем совместного интегрирования задач Коши для v , v' (4.1) и w , w' вида

$$(W(x)w')' + \Lambda^{(k)}\rho(x)w = -\rho(x)v, \quad w(0) = w'(0) = 0 \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \|v_k\|^2 &\equiv \int_0^{\xi^{(k)}} v^2(x, \Lambda^{(k)})\rho(x)dx = \\ &= W(\xi^{(k)})[w(\xi^{(k)}, \Lambda^{(k)})v'(\xi^{(k)}, \Lambda^{(k)}) - v(\xi^{(k)}, \Lambda^{(k)})w'(\xi^{(k)}, \Lambda^{(k)})] \end{aligned}$$

Вместо интегрирования системы уравнений (4.1), (4.7) при расчетах удобнее пользоваться системами уравнений стандартного вида Коши

$$\begin{aligned} u' &= y/W(x), \quad y' = -\Lambda^{(k)}\rho(x)v, \quad u(0) = \alpha_0 l, \quad y(0) = \beta_0 W_0 \\ w' &= z/W(x), \quad z' = -\Lambda^{(k)}\rho(x)w - \rho(x)v, \quad w(0) = z(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

с соответствующими преобразованиями выражений для $E(x, \Lambda^{(k)})$ и $\|v_{(k)}\|^2$.

В заключение следует отметить, что во всех выражениях (4.4)–(4.7) можно положить $\xi^{(k)} = l$ без потери точности по степеням $\varepsilon^{(k)}$, кроме выражений для определения величины $\varepsilon^{(k)}$, см. (4.3), (4.5).

Рассмотрим конкретные примеры линейной плотности $\rho(x)$ и граничных условий, т.е. значений параметров $\alpha_{0, l}$, $\beta_{0, l}$.

5. Собственные колебания однородной тяжелой вращающейся нити с учетом натяжения. При условии постоянства функции линейной плотности $\rho = \text{const}$ задача Коши (4.5) принимает вид

$$(\sigma(x, \chi)v')' + \gamma v = 0, \quad \gamma = \gamma^{(k)} = \chi \Lambda^{(k)} \Omega^{-2}, \quad v(0) = \alpha_0, \quad v'(0) = \beta_0 \quad (5.1)$$

$$\sigma(x, \chi) = 1 + \chi(x - 1), \chi = mg(W_0 + mg)^{-1}, 0 < \chi \leq 1, \Omega^2 = gl^{-1}$$

Функция v и аргумент $x(0 \leq x \leq 1)$ нормированы на величину l , $m = \rho l$. Уравнение для определения нормированной на l абсциссы $\xi^{(k)}$ (4.5) согласно (5.1) записывается следующим образом:

$$E(x, \gamma^{(k)}, \chi) = \alpha_l \sigma(x, \chi) v'(x, \gamma^{(k)}, \chi) + \beta_l v(x, \gamma^{(k)}, \chi) = 0 \quad (5.2)$$

$$\xi^{(k)} = \xi(\gamma^{(k)}, \chi), \alpha_l, \beta_l \geq 0, \alpha_l + \beta_l = 1$$

Выражения (5.1), (5.2) удобно использовать в процедуре (4.5) с применением метода продолжения по параметру χ , т.е. искать $\gamma = \gamma(\chi)$, $v = v(x, \chi)$. В предельном случае, когда вес нити mg пренебрежимо мал по сравнению с нагрузкой W_0 (масса учитывается только в γ), получается модель однородной струны с упруго закрепленными концами. Задача Коши интегрируется элементарно в тригонометрических функциях. Определение $\gamma(0)$ требует решения трансцендентного уравнения относительно $v = \sqrt{\gamma(0)}$:

$$\operatorname{tg} v = v(\alpha_0 \beta_l + \beta_0 \alpha_l)(v^2 \alpha_0 \alpha_l - \beta_0 \beta_l)^{-1}, \gamma_n = v_n^2, n \geq 1 \quad (5.3)$$

Величина v_n зависит от двух параметров α, β , где $\alpha = (\alpha_0, \alpha_l)$, $\beta = (\beta_0, \beta_l)$ связаны условиями нормировки $\alpha + \beta = (1, 1)$. В частности, при $\alpha_0 = 0, 1$ ($\beta_0 = 1, 0$) и $\alpha_l = 0, 1$ ($\beta_l = 1, 0$) получаются известные элементарные случаи закрепленного или свободного концов. В общей ситуации искомые корни $v_n^* = v_n(\alpha, \beta)$ уравнения (5.3) могут быть найдены численно. Собственные значения $\gamma_n(0)$ и функции $X_n(x, 0)$ имеют вид ($n = 1, 2, \dots$)

$$\gamma_n(0) = v_n^2, X_n(x) = \alpha_0 \cos v_n x + \beta_0 v_n^{-1} \sin v_n x \quad (5.4)$$

Как отмечалось ранее, основной интерес для приложений представляют низшие частоты и формы колебаний, в особенности $n = 1$.

Вычисленное из уравнения (5.3) значение $\gamma(0)$ (5.4) используется далее в качестве начальной оценки γ^0 при $\chi = \chi_1 > 0$, где χ_1 достаточно мало, что устанавливается численным экспериментом. Интегрируя задачу Коши (5.1) при $\gamma = \gamma^0$ и определяя нужный корень $\xi^{(0)} = \xi(\gamma^0, \chi_1)$ из соотношения (5.2), по формулам (4.3), (4.4), (4.7) найдем уточненное значение $\xi^{(1)}(\chi_1)$, а с помощью рекуррентной процедуры – высокоточное приближение $\gamma(\chi_1)$. Далее реализуется процесс продолжения по параметру χ : $0 < \chi_1 < \chi_2 < \dots < \chi_i \leq 1$, где i достаточно велико.

Известно, что уравнение (5.1) приводятся к форме уравнения Бесселя нулевого порядка [1, 3, 12]. Действительно, совершив взаимно однозначную замену аргумента x на θ ; посредством стандартной процедуры получим уравнение указанного вида и его общее решение v_0 :

$$v'' + \theta^{-1} v' + \eta^2 v = 0, v = v(\eta\theta), \eta^2 = 4\gamma\chi^{-1}, 0 < \chi < 1$$

$$v_0 = AJ_0(z) + BN_0(z), z = \eta\theta, A, B = \text{const} \quad (5.5)$$

$$\theta = \sigma^{1/2}(x, \chi), \theta_1 \leq \theta \leq 1, \theta_1 = (1 - \chi)^{1/2}, 0 < \theta_1 < 1$$

Штрих в (5.5) означает производную по θ . Подробные аналитические, числовые и графические данные о функциях Бесселя $J_\nu(z)$ и Неймана $N_\nu(z)$ нулевого ($\nu = 0$) и других порядков приведены в [12]. Используя граничные условия при $\theta = \theta_1, \theta = 1$, см. (5.1), (5.2), получим характеристическое уравнение относительно величины $\eta = \eta(\theta_1, \alpha, \beta)$, которая связана с $\gamma = \gamma(\chi, \alpha, \beta)$ соотношениями (5.5). Это уравнение будет содержать также производные функций J_0, N_0 : $J_0' = -J_1, N_0' = -N_1$ [12].

Отметим, что $\theta_1 \rightarrow 1$ при $\chi \rightarrow 0$ (модель струны), т.е. имеет место вырождение замены $\chi \rightarrow \theta$ (5.5). Эта ситуация рассмотрена выше, см. (5.3), (5.4). Для малых χ ($0 < \chi \ll 1$) к задаче (5.1), (5.2) может быть применен метод регулярных возмущений, порождающее решение которого известно. Приближенное аналитическое исследование не представляет особых трудностей и интереса. Далее изучается общий случай $0 \leq \chi \leq 1$; предельный переход при $\chi \rightarrow 1$ ($\theta_1 \rightarrow 0$) приводит к регулярным особым точкам $x = 0, \theta = 0$ в уравнениях (5.1), (5.5) соответственно. Эта ситуация требует асимптотического анализа, который удобнее проводить на основе уравнения (5.5) и функций J_0, N_0 .

Исследования решения задачи для произвольных допустимых $\alpha_{0,l}, \beta_{0,l}$ представляются весьма громоздкими. Поэтому рассмотрим частные случаи краевых условий, отвечающих предельным значениям $\alpha_{0,l}, \beta_{0,l}$. Основное внимание уделим анализу первой моды колебаний.

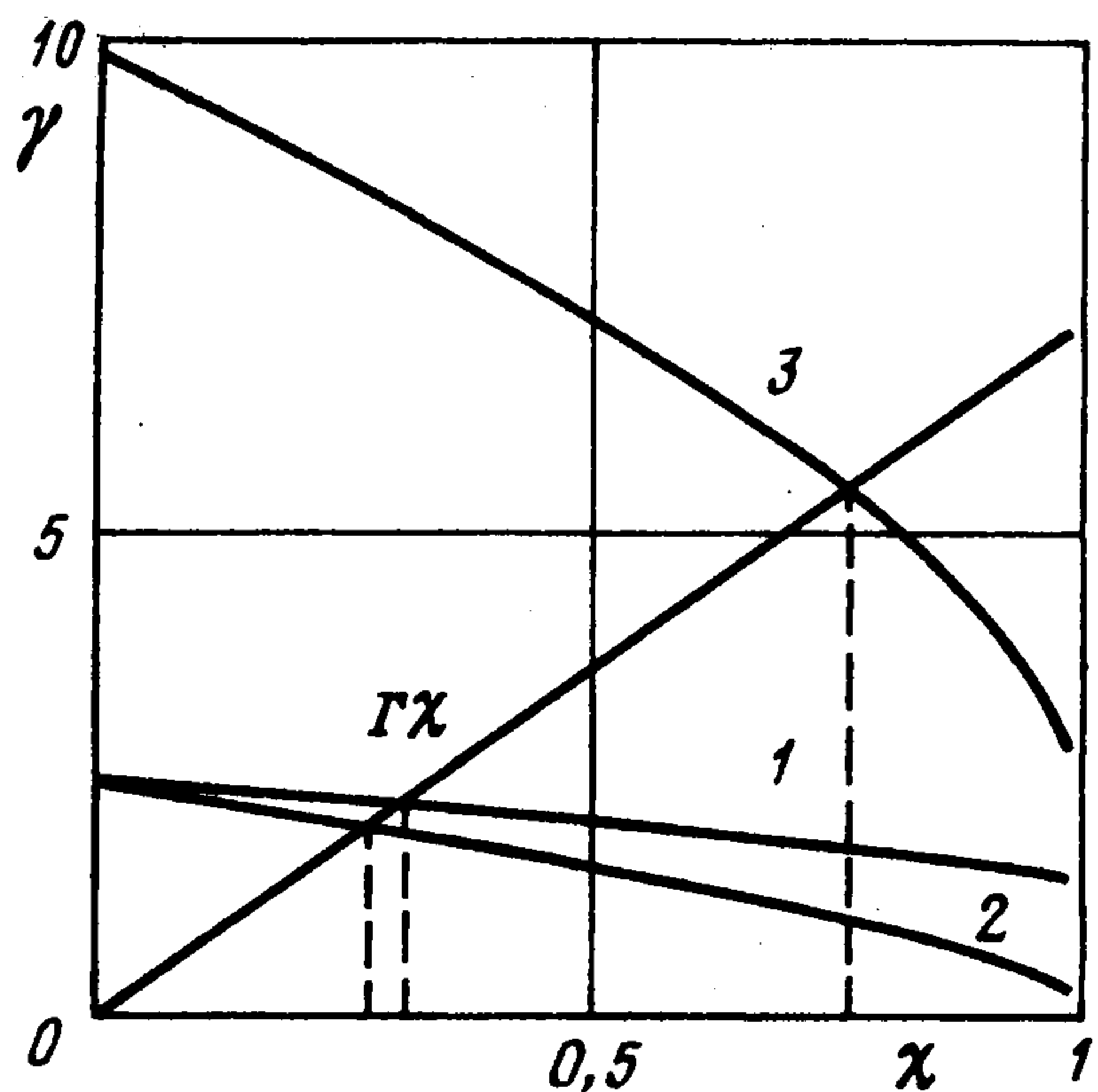
1°. Пусть $\alpha_l = \beta_0 = 0$ ($\alpha_0 = \beta_l = 1$); это – классический случай колебаний тяжелой неоднородной нити (цепи) с дополнительным натяжением. На фиг. 1 (кривая 1) представлена функция $\gamma(\chi)$, имеющая более наглядную, чем $\eta(\theta_1)$, механическую интерпретацию (5.1). Из графика следует, что $\gamma(0) = \pi^2/4$ и $\gamma(\chi)$ монотонно убывает при $\chi \rightarrow 1$; минимальное значение $\gamma(1) = \eta_0^2/4$, где $\eta_0 = \eta(0) \approx 2,4048$ – первый корень функции $J_0(\eta)$ [1, 12]. Асимптотический анализ корня $\eta(\theta)$ при $0 \leq \theta_1 \ll 1$ приводит к приближенному выражению $\eta(\theta_1) \approx \eta_0 + O(\theta_1^2)$, из которого следует, что $\gamma(\chi) = \gamma(1) + O((1-\chi))$, т.е. функция γ стремится линейно к $\gamma(1)$ при $0 \leq 1-\chi \ll 1$. В целом также убывание $\gamma(\chi)$ практически линейно (см. фиг. 1).

Семейство нормированных собственных функций $V(x, \chi) = v/v|v|^{-1}$ представлено штриховыми линиями на фиг. 2; кривым 1–3 отвечают значения $\chi = 0,9999, \chi = 0,9, \chi = 0$. При $\chi = 0$ (кривая 3) имеют место колебания сильно натянутой струны со свободным нижним концом; ситуации $\chi \approx 1$ (кривая 1) соответствуют колебания тяжелой нити без дополнительного натяжения [1], первая форма которых описывается функцией $J_0(\eta_0\theta) = J_0(2\sqrt{\gamma(1)\chi})$. Кривая 2 для промежуточного значения $\chi = 0,9$ приведена с целью наглядности эволюции семейства при изменении χ от $\chi = 0$ до $\chi = 1$.

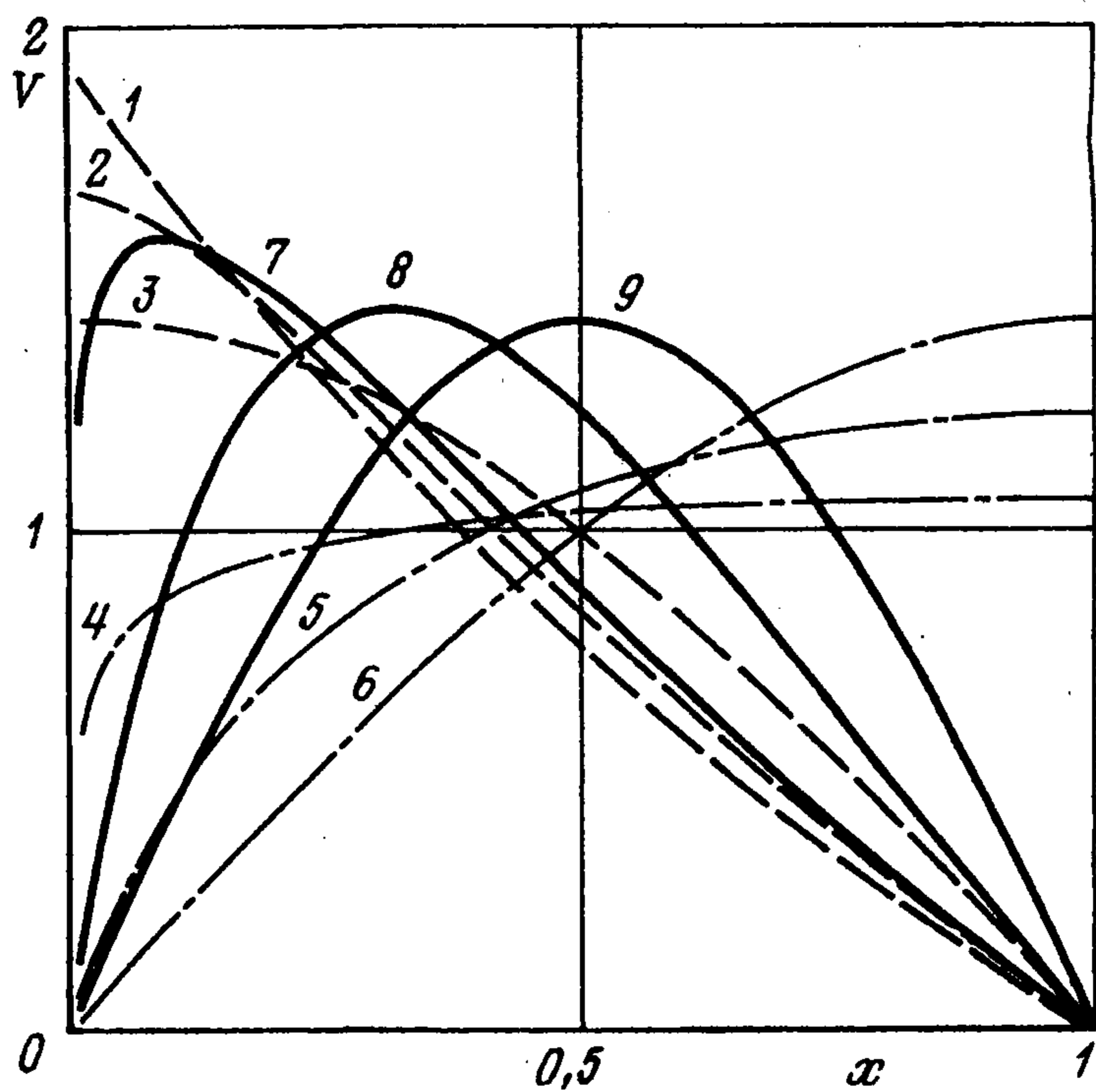
2°. Аналогично вышеизложенному рассмотрим "обратную" ситуацию $\alpha_0 = \beta_l = 0$ ($\alpha_l = \beta_0 = 1$), т.е. верхний конец свободен, а нижний закреплен. График функции $\gamma(\chi)$ представлен на фиг. 1 (кривая 2). Отметим, что при малых χ кривые 1 и 2 близки, но при $\chi \rightarrow 1$ они расходятся и наблюдается качественное различие: $\gamma \rightarrow 0$ при $\chi \rightarrow 1$. Убывание оказывается весьма медленным и при $\chi = 0,9999$ величина $\gamma \sim 0,1$. Асимптотический анализ приводит к оценке $\eta(\theta_1) = O((\ln \theta_1^{-1} - 1/2)^{-1/2})$, $\theta_1 \ll 1$, которая для искомой величины γ преобразуется к виду $\gamma(\chi) \approx O((\ln(1-\chi)^{-1} - 1)^{-1})$, где $0 < 1-\chi \ll 1$.

На фиг. 2 приведены нормированные собственные функции $V(x, \chi)$ (штрихпунктирные линии); кривым 4–6 соответствуют значения χ , приведенные в п. 1°. Кривая 6 аналогична соответствующей кривой для случая 3 колебаний струны со свободным концом. При $\chi \rightarrow 1$ (кривая 4) функция $V(x, \chi)$ сходится в слабом смысле к разрывной функции типа Хевисайда, что свидетельствует о невозможности собственных колебаний нити со свободным верхним концом без дополнительного натяжения. Функции $\gamma(\chi)$ и $V(x, \chi)$ при $0 < \chi \ll 1$ могут быть просто исследованы методом возмущений.

3°. Значительный интерес представляют колебания тяжелой нити с дополнительным натяжением, когда оба конца закреплены, т.е. $\alpha_{0,l} = 0$ ($\beta_{0,l} = 1$). График функции $\gamma(\chi)$ представлен на фиг. 1 (кривая 3). Эта функция довольно быстро убывает от значения $\gamma(0) = \pi^2$ до $\gamma(1) = \eta_0^2/4 \approx 1,4$, причем скорость убывания неограниченно возрастает (по абсолютной величине) при $\chi \uparrow 1$. Сравнение со случаем 1° показывает,



Фиг. 1



Фиг. 2

что кривая 3 остается выше кривой 1 при $0 \leq \chi < 1$. Таким образом, при ненулевом натяжении частота собственных колебаний "струны" больше, чем нити со свободным концом. Асимптотический анализ на основе функций Бесселя и Неймана дает приближенное выражение $\eta(\theta_1) = \eta_0 + O(\ln^{-1}(1 - \chi)^{-1})$, из которого также следует, что кривая 3 будет выше кривой 1 для всех $0 \leq \chi < 1$.

Нормированные собственные функции $V(x, \chi)$ приведены на фиг. 2 (сплошные линии). При $\chi = 0$ (кривая 9) получим классический случай первой моды колебаний однородной сильно натянутой струны. Если $\chi \uparrow 1$ (кривая 7), то собственная функция стремится (в слабом смысле) к разрывной функции, которая при $x > 0$ совпадает по форме с $J_0(2\sqrt{\chi(1-x)})$ (с точностью до нормирующего множителя), см. п. 1°. Однако ясно, что колебания "струны" без дополнительного натяжения невозможны.

4°. Случай свободной (для поперечных смещений) тяжелой натянутой нити ($\beta_{0,l} = 0$, $\alpha_{0,l} = 1$) с очевидностью приводит к нулевым значениям $\eta(\theta_1) = \gamma(\chi) \equiv 0$ для всех допустимых $0 \leq \theta_1, \chi \leq 1$ и форме $V(x, \chi) \equiv 1$, см. (5.1), (5.5). Отличным от нуля будет следующий корень характеристического уравнения, для которого имеем $\eta(0) = 3,8317$ ($J_1(\eta) = 0$).

Исследуем устойчивость колебаний нити для рассмотренных случаев граничных условий п. 1°–4° на основе полученных графиков функций $\gamma(\chi)$ (фиг. 1). Эти значения и семейства нормированных функций $V(x, \chi)$ были построены с помощью метода ускоренной сходимости разд. 4, на основе схемы (5.1), (5.2) и процедуры продолжения по параметру χ . Использование функций Бесселя и Неймана для отыскания искомого решения весьма трудоемко при численной реализации. Вычислительная практика показывает, что быстросходящийся метод построения собственных значений и функций оказывается более эффективным даже в рассмотренном случае "известного точного решения" в специальных функциях (см. далее разд. 6).

Достаточное условие устойчивости плоских колебаний вращающейся тяжелой нити с дополнительным натяжением заключается в выполнении неравенства $\lambda > 0$. Из определения параметра γ (5.1) следует неравенство (условие устойчивости колебаний по выбранной норме)

$$\gamma(\chi) > \Gamma\chi, \quad 0 \leq \chi \leq 1, \quad \Gamma = \omega^2\Omega^{-2}, \quad \gamma = (\lambda + \omega^2)\chi\Omega^{-2} \quad (5.6)$$

Зафиксируем некоторое значение $\Gamma \geq 0$. Тогда устойчивым движениям нити отвечают те значения χ , для которых точки на кривых $\gamma(\chi)$ лежат выше, чем на прямой $\Gamma\chi$. Для случаев 1°–3° такие значения χ , $0 \leq \chi < \chi^* \leq 1$ существуют. Геометрическая

интерпретация условия (5.6) приведена на фиг. 1. Более того, в случаях 1°, 3° при $0 \leq \Gamma < \gamma(1) \approx 1,4$ это неравенство выполняется для всех χ , $0 \leq \chi \leq 1$. При увеличении Γ длина отрезка $0 \leq \chi \leq \chi^*$ уменьшается, причем $\chi^* \rightarrow 0$ при $\Gamma \rightarrow \infty$, что представляется естественным. В случае 4° ($\gamma(\chi) \equiv 0$) всегда имеет место неустойчивость "колебаний": при $\Gamma = 0$ ($\omega = 0$) – вековая, а при $\Gamma > 0$ ($\omega \neq 0$) – экспоненциальная. Эти выводы соответствуют механическим представлениям.

6. Колебания неоднородной нити. С помощью метода ускоренной сходимости разд. 4 исследуем свободные колебания тяжелой неоднородной струны, полная масса которой фиксированна и равна m_* . Как отмечалось, для определенности ограничимся высокоточным вычислением первого собственного значения и функции; рассмотрим два примера.

6.1. Линейно изменяющаяся погонная масса. Пусть линейная плотность ρ , масса m и натяжение W имеют вид

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \rho_0(1 - \kappa(2x - l)l^{-1}) \\ m(x) &= \rho_0 x(1 - \kappa(x - l)l^{-1}), \quad -1 < \kappa < 1, \quad m(l) = \rho_0 l = m_* \\ W(x) &= W_0 + P_0 - P_0[1 - \chi l^{-1}(1 + \kappa - \kappa \chi l^{-1})], \quad P_0 = m_* g \end{aligned} \quad (6.1)$$

Тогда из (6.1) следует, что $m(l) = m_*$ и не зависит от параметра κ , характеризующего коэффициент изменения линейной плотности в допустимых пределах: $\rho(x) > 0$ для всех $0 \leq x \leq l$; при $x = l/2$ или $\kappa = 0$ величина $\rho \equiv \rho_0$ не зависит от значений κ или x . Используя формулы (6.1), перейдем к безразмерному аргументу x и параметрам γ , κ , χ в задаче Штурма–Лиувилля (2.1); получим уравнение вида

$$\begin{aligned} (p(x)X')' + \gamma r(x)X &= 0, \quad \gamma = \chi \Lambda \Omega^{-2}, \quad \Omega^2 = g/l \\ 0 \leq x \leq 1, \quad p(x) &= 1 - \chi(1 - x(1 + \kappa - \kappa x)), \quad -1 < \kappa < 1 \\ r(x) &= 1 - 2\kappa(x - 1/2), \quad \chi = P_0(W_0 + P_0)^{-1}, \quad 0 \leq \chi < 1 \end{aligned} \quad (6.2)$$

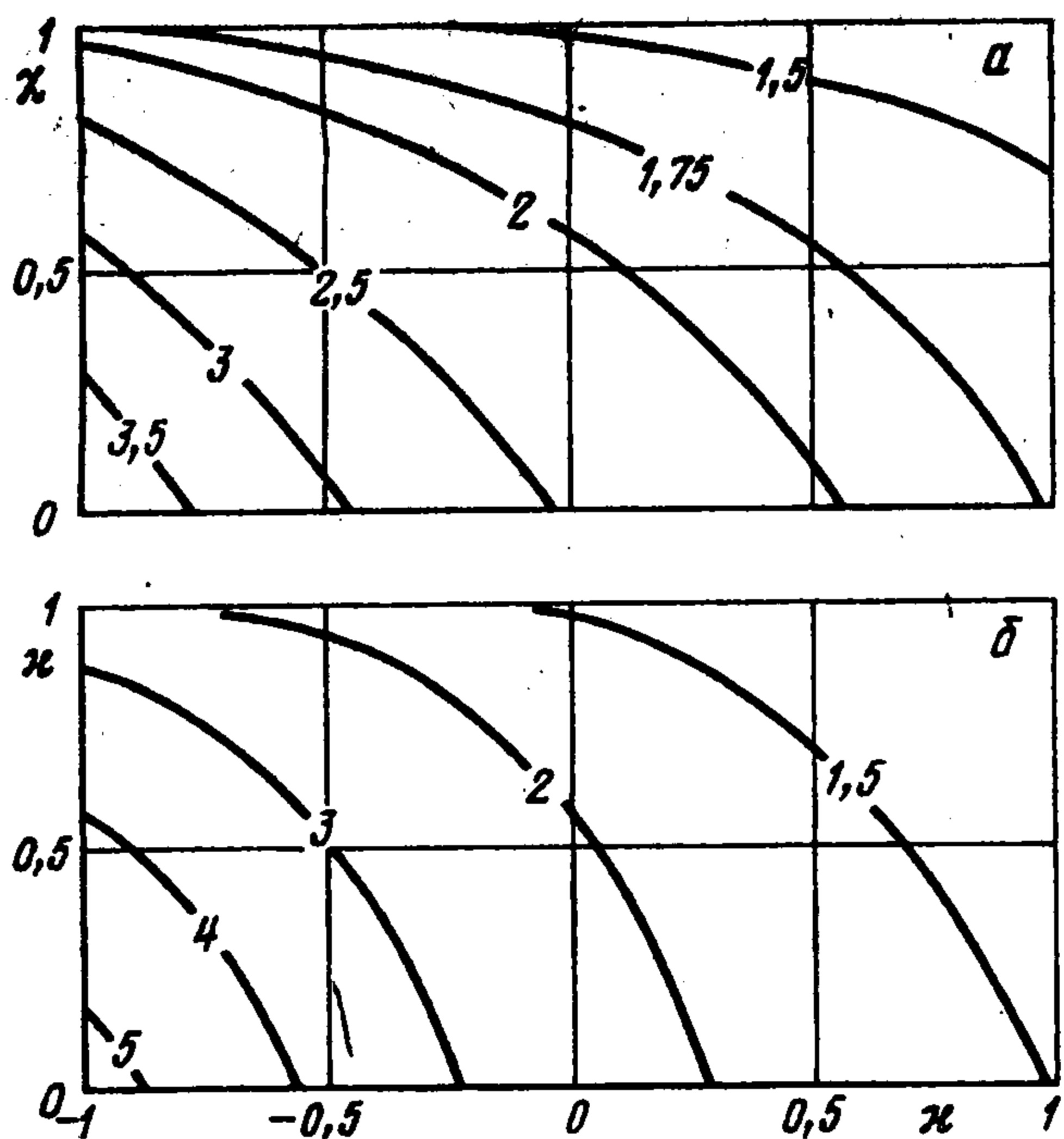
Оно содержит два заданных параметра κ , χ и неизвестный параметр γ , подлежащий определению.

Параметр χ в (6.2) характеризует отношение веса нити P_0 к суммарному натяжению в точке $x = 1$. Отметим, что $|\kappa| < 1$; при $\kappa \rightarrow \pm 1$ может нарушаться условие нерастяжимости. Краевые условия принимают вид

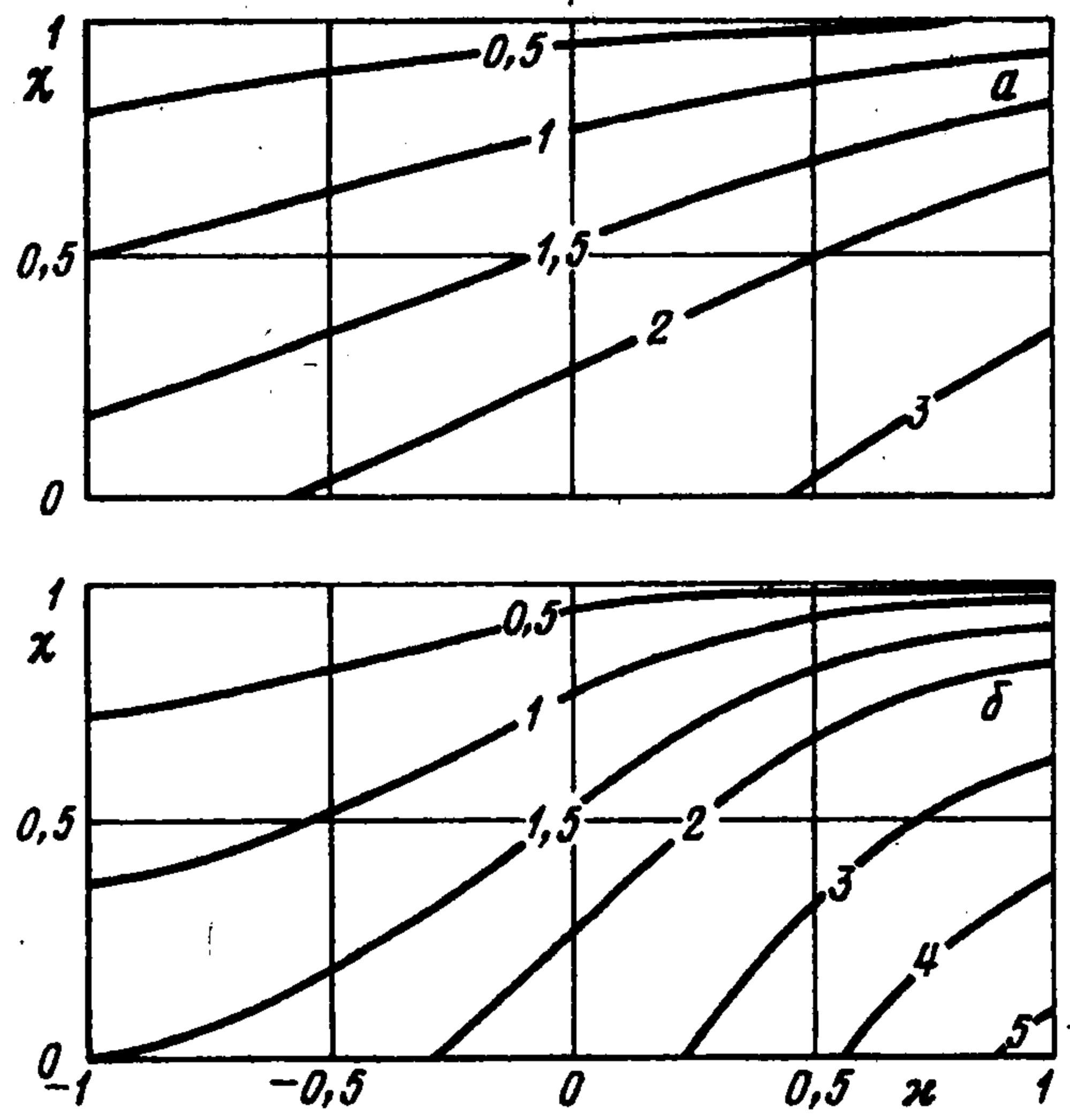
$$\alpha_x p(x)X'(x) \mp \beta_x X(x) = 0, \quad \alpha_x \geq 0, \quad \beta_x \geq 0, \quad \alpha_x + \beta_x = 1, \quad x = 0, 1 \quad (6.3)$$

Далее рассматриваются условия первого рода на одном или обоих концах аналогично п. 1°–3° в разд. 5. При этом собственные значения γ задачи (6.2), (6.3) будут зависеть от двух параметров: $\gamma = \gamma(\kappa, \chi)$. Рассмотренная в разд. 5 задача отвечает случаю $\kappa = 0$. Далее применяются метод ускоренной сходимости (разд. 4) и процедура продолжения по параметрам κ , χ . В качестве начального точного значения γ , используемого также как оценка γ^0 , берется значение $\gamma^0 = \gamma(0, 0) = \pi^2/4$ (случаи 1°, 2°) и $\gamma^0 = \pi^2$ (случай 3°). Случай 4° (оба конца свободны) не рассматривается по указанной в разд. 5 причине (неустойчивость движений). Современные ЭВМ позволяют весьма эффективно с помощью алгоритма ускоренной сходимости строить поверхность $\gamma = \gamma(\kappa, \chi)$ и представлять ее графически в удобной проекции. Однако более предпочтительным для определения численных значений оказывается задание этой поверхности в виде достаточно плотного семейства функций, т.е. частыми сечениями по κ или χ , или линиями уровня, т.е. сечениями по γ . Значения γ в промежуточных точках могут быть достаточно точно аппроксимированы методами интерполяции.

На фиг. 3, а, 4, а, 5, а для рассматриваемых трех типов граничных условий представлены линии уровня поверхности $\gamma = \gamma_{ka}(\kappa, \chi) = c$, $k = 3, 4, 5$ с приведенными над ними значениями c при изменении параметров κ , χ в пределах: $|\kappa| \leq 0,99$, $0 \leq \chi \leq 0,99$. Случай $\kappa = 0$ отвечает рассмотренной в разд. 5 однородной нити. Сравнение семейств



Фиг. 3



Фиг. 4

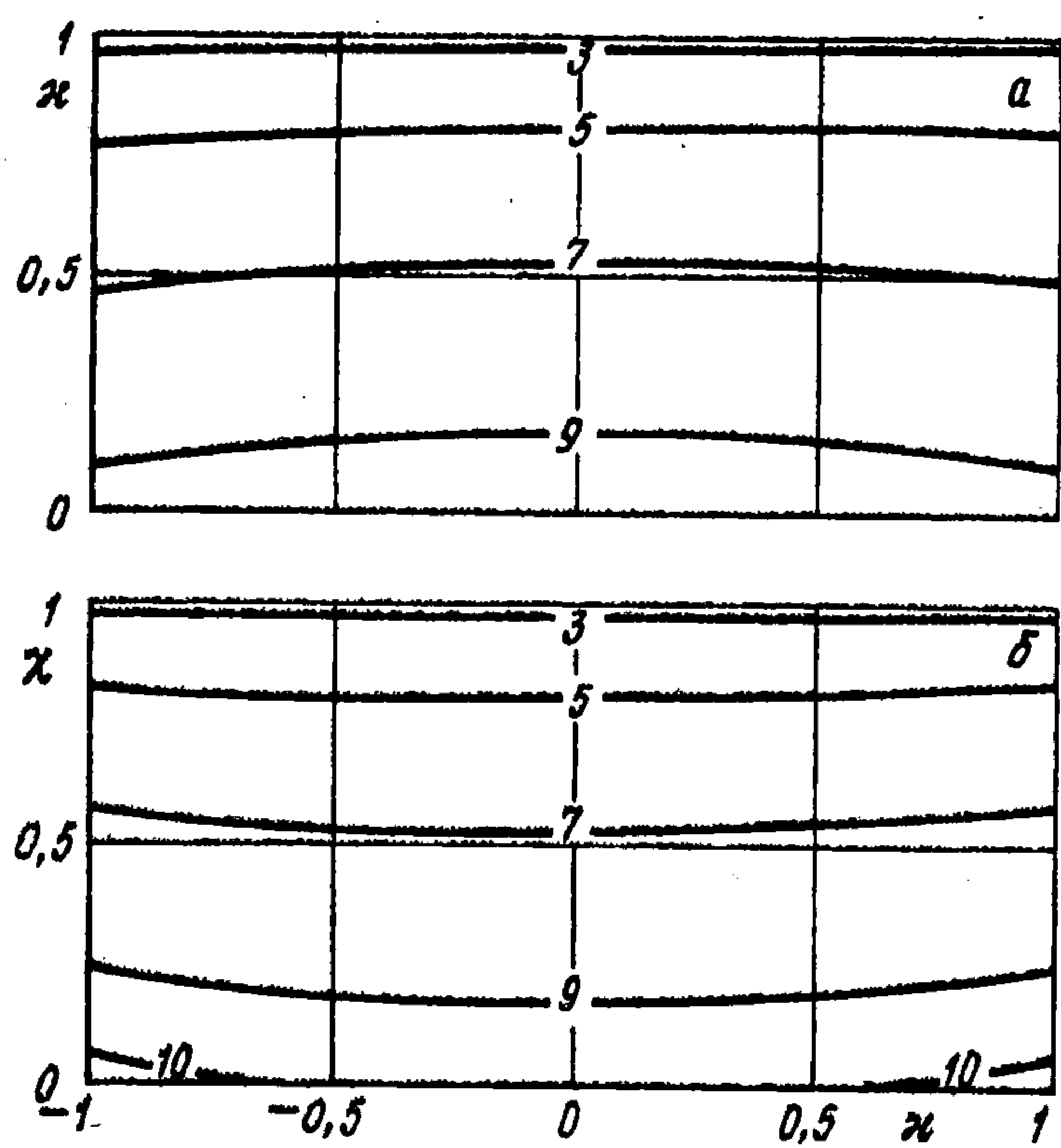
указывает на существенную роль граничных условий (условия закрепления одного или обоих концов). Граничные условия п. 3° разд. 5 (классический случай) приводят к строго положительным значениям $\gamma_{3a}(\kappa, \chi)$ (см. фиг. 3, а), которые монотонно по κ и χ убывают при $\kappa \rightarrow 1, \chi \rightarrow 1$ и монотонно возрастают при $\kappa \rightarrow -1, \chi \rightarrow 0$. Эти выводы отвечают механическим представлениям. В частности, интересно отметить, что при любом фиксированном значении $0 \leq \chi \leq 1$ частота колебаний убывает при возрастании κ от $\kappa = -1$ до $\kappa = 1$. Графики на фиг. 4, а подтверждают значительное влияние граничных условий: при $\kappa \rightarrow 1$ существенная часть нити оказывается закрепленной, что приводит к увеличению частоты колебаний. Отметим, что убывание по χ величины γ при фиксированном значении κ представляется довольно очевидным. Качественное отличие по сравнению с фиг. 3, а состоит в том, что $\gamma_{4a}(\kappa, 1) \equiv 0$, т.е. "частота" колебаний становится мнимой ($\lambda_1 = -\omega^2$). Это соответствует неустойчивости движений нити.

На фиг. 5, а представлены аналогичные сечения в случае краевых условий п. 3° разд. 5 (оба конца закреплены). Кривые весьма близки к симметричным относительно оси $\kappa = 0$, что подтверждает определяющее значение краевых условий. Наблюдается лишь незначительное влияние распределения массы. Отметим, что значения $\gamma_{5a}(\kappa, \chi)$ для всех $|\kappa| < 1, 0 \leq \chi < 1$ превосходят $\gamma_{3,4a}(\kappa, \chi)$, что является следствием влияния краевых условий, см. далее.

6.2. Параболически изменяющаяся линейная плотность. Предположим, что поперечное сечение нити имеет форму круга, радиус которого изменяется линейно с коэффициентом κ , аналогично функции $p(x)$ (6.1). Потребуем, чтобы удовлетворялось условие постоянства объема. Тогда после введения безразмерных аргумента и параметров для функций $p(x)$ и $r(x)$ в (6.2) получаются выражения

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 - \chi [1 - (3(1 + \kappa)^2 x - 6(1 + \kappa)\kappa x^2 + 4\kappa^2 x^3)(3 + \kappa^2)^{-1}] \\ r(x) &= 3(1 - 2\kappa(x - 1/2))^2 (3 + \kappa^2)^{-1}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad |\kappa| < 1, \quad 0 \leq \chi < 1 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Параметр χ в (6.4) имеет тот же смысл, что и в (6.2). Из (6.4) следует, что при $\kappa = 0$ имеет место частный случай однородной тяжелой струны, рассмотренный в разд. 5. В предельном случае $\chi = 0$ ($P_0/W_0 \rightarrow 0$) натяжение $p(x) \equiv 1$, что соответствует модели неоднородной струны переменной линейной плотности $r(x)$. Начальное приближение для γ в методе продолжения по параметрам κ, χ определяется аналогично приведенному в разд. 6.1, а граничные условия имеют вид (6.3). Графики расчетов



Фиг. 5

значений $\gamma_{kb}(\kappa, \chi)$, $k = 3, 4, 5$ приведены на фиг. 3, б, 4, б, 5, б и отвечают указанным в разд. 6.1 типам граничных условий, см. (6.3). Сравнение с соответствующими кривыми, которые обсуждались выше, свидетельствует о качественном совпадении их поведения. Числовые значения для фиксированных κ, χ ($\chi < 1$) могут существенно отличаться. Несколько большие значения на фиг. 3, б (при $\kappa \rightarrow -1$) и фиг. 4, б (при $\kappa \rightarrow 1$) и, наоборот, меньшие (при $\kappa \rightarrow 1$ и $\kappa \rightarrow -1$) объясняются тем, что относительно большая или меньшая часть нити закреплена, т.е. вновь сказывается влияние краевых условий.

Интересно провести сравнение кривых $\gamma_{5a}, \gamma_{5б} = c$ (см. фиг. 5, б и 5, а). Качественное

поведение их совпадает, однако имеется довольно тонкое различие. Небольшой загиб кривых кверху на фиг. 5, б при $|\kappa| \rightarrow 1$ (книзу на фиг. 5, а) может быть объяснен тем, что при распределении масс (6.4) относительно меньшая (а при распределении (6.2) относительно большая) по сравнению со средним значением (отвечающим случаю однородной нити, $\kappa = 0$) часть нити совершает движение при собственных колебаниях.

Исследование устойчивости движений неоднородной нити проводится аналогично приведенному в разд. 5 в соответствии с неравенством (5.6). При $\gamma(\kappa, \chi) > \Gamma\chi$ имеет место устойчивость; в противном случае – неустойчивость (вековая или экспоненциальная).

Аналогично вышеизложенному проводится исследование собственных колебаний и условий их устойчивости и неустойчивости в случае произвольной плотности нити.

Таким образом, разработанный численно-аналитический метод ускоренной сходимости позволяет эффективно определять собственные частоты и формы колебаний тяжелой неоднородной нити с дополнительным натяжением при различных граничных условиях. В случае вращения плоскости колебаний метод позволяет также определить область значений параметров, в том числе скорости вращения, для которых выполняются условия устойчивости или неустойчивости этих движений.

Авторы благодарят Ф.Л. Черноусько за обсуждение результатов работы и замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00221, 96-01-00265).

ЛИТЕРАТУРА

1. Раус Э.Дж. Динамика системы твердых тел. Т. 2. М.: Наука, 1983. 544 с.
2. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей. М.: Машиностроение, 1978. 222 с.
3. Меркин Д.Р. Введение в механику гибкой нити. М.: Наука, 1980. 240 с.
4. Ишлинский А.Ю. Об уравнениях продольных движений каната (упругой нити) переменной длины // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 5. С. 939–941.
5. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Анализ пространственных нелинейных колебаний струны // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 1. С. 88–101.
6. Крылов Н.М. Методы приближенного решения задач математической физики // Избр. труды. Т. 2. Киев: Изд-во АН УССР, 1961. С. 150–203.
7. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях. М.: Мир, 1970. 328 с.

8. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Определение частот и форм колебаний неоднородных распределенных систем с граничными условиями третьего рода // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 547–555.
9. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 550 с.
10. Пуанкаре А. Избранные труды. М.: Наука, Т. 1. 1971. 771 с.; Т. 2. 1972. 999 с.
11. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Эффективный метод исследования колебаний существенно неоднородных распределенных систем // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 466–478.
12. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.

Москва
e-mail: shmatkov @ ipmnet. ru

Поступила в редакцию
4.VI.1998