

УДК 539.3

© 1999 г. И.Г. Горячева, Ю.Ю. Маховская

### КОНТАКТИРОВАНИЕ УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ КАПИЛЛЯРНОЙ АДГЕЗИИ

Рассматривается задача о внедрении осесимметричного штампа, форма поверхности которого моделируется степенной функцией, в упругое полупространство при наличии в зазоре жидкости, образующей мениск. Результаты используются для анализа зависимостей контактных характеристик и капиллярной силы адгезии от количества жидкости в мениске, величины приложенной нагрузки и формы штампа. Исследуется область применимости упрощенного подхода, при котором не учитываются упругие деформации полупространства вне области контакта.

Наличие водяных паров в атмосфере приводит к образованию тонких пленок жидкости на поверхности твердых тел. При взаимодействии таких поверхностей значительную роль могут играть капиллярные эффекты. Так, экспериментально показано [1, 2], что сила сцепления при взаимодействии магнитного диска с головкой существенно возрастает с увеличением влажности окружающего воздуха, что может привести к повреждению поверхностей.

Для силы капиллярного притяжения между плоскостью и жестким полусферическим выступом радиуса  $R$  была получена [3] формула  $f_a = 4\pi R\sigma \cos \theta$  ( $\sigma$  – поверхностное натяжение жидкости,  $\theta$  – угол смачивания), согласно которой сила адгезии больше для более пологих выступов и не зависит от количества жидкости. При использовании аналогичных соотношений для силы капиллярного притяжения между неровностями взаимодействующих шероховатых поверхностей были выделены три режима контактирования в зависимости от степени заполнения зазора жидкостью [4].

При расчете силы капиллярной адгезии между шероховатыми поверхностями использовалась следующая формула для силы, действующей на отдельный выступ [5]:

$$f_a = 4\pi R\sigma(1 + \delta) \quad (0.1)$$

где  $\delta$  – величина, зависящая от толщины пленки жидкости и смятия выступа. При этом принималась во внимание упругость выступов, но предполагалось, что давление жидкости не влияет на изменение их формы. Такой подход, однако, не позволяет оценить влияние капиллярных эффектов на напряженно-деформированное состояние контактирующих тел.

Данная работа посвящена решению более строго поставленной задачи о капиллярной адгезии при взаимодействии единичной неровности, моделируемой штампами различной формы, с упругим полупространством.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается внедрение силой  $q$  жесткого осесимметричного штампа в упругое полупространство при наличии жидкости, образующей мениск в зазоре между контактирующими телами (фиг. 1). Поверхность штампа описывается гладкой функцией  $f(r) = Ar^{2n}$ , где  $n$  – целое число.

В кольцевой области  $a \leq r \leq b$  на упругое полупространство действует равномерное давление, которое меньше атмосферного на величину

$$p_0 = \sigma(1/R_1 + 1/R_2)$$

где  $\sigma$  – поверхностное натяжение жидкости,  $R_1, R_2$  – радиусы кривизны боковой поверхности мениска. Считая, что угол смачивания равен нулю, а штамп имеет пологую форму, т.е.  $f'(b) \ll 1$ , можно написать

$$R_1 \approx h(b)/2, \quad R_2 \approx b; \quad h(r) = f(r) - f(a) + u(r) - u(a) \quad (1.1)$$

где  $h(r)$  – величина зазора,  $u(r)$  – нормальные смещения границы упругого полупространства. Таким образом, учитывая, что  $h(b) \ll b$ , получим

$$p_0 = 2\sigma/h(b) \quad (1.2)$$

Следует отметить, что на упругое полупространство по окружности  $r = b$  действует также сила натяжения пленки жидкости  $f_s = -2\pi b\sigma$ , которая в силу сделанного выше предположения направлена по касательной к границе упругого полупространства. Простые оценки показывают, что эта сила много меньше силы давления Лапласа  $f_L = -\pi(b^2 - a^2)p_0$ . Действительно,

$$\frac{f_s}{f_L} = \frac{bh(b)}{b^2 - a^2} \sim f'(b) \ll 1$$

В дальнейшем силой  $f_s$  будем пренебрегать.

Полагая атмосферное давление равным нулю, получим следующие условия на границе упругого полупространства:

$$\begin{aligned} r \leq a: & \quad u(r) = -f(r) + c \\ a < r \leq b: & \quad p(r) = -p_0 \\ r > b: & \quad p(r) = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $c$  – величина внедрения штампа. В силу гладкости штампа на границе области контакта должно также выполняться условие

$$p(a) = -p_0 \quad (1.4)$$

Нормальные смещения  $u(r)$  границы упругого полупространства от действия нормальных давлений  $p(r)$  определяются известным выражением [6]

$$u(r) = A[p(r), b]; \quad 0 \leq r \leq b \quad (1.5)$$

$$A[p(r), x] = \frac{4}{p^*} \int_0^x p(r') K\left(\frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'}\right) \frac{r' dr'}{r+r'}, \quad p^* = \frac{\pi E}{1-\nu^2}$$

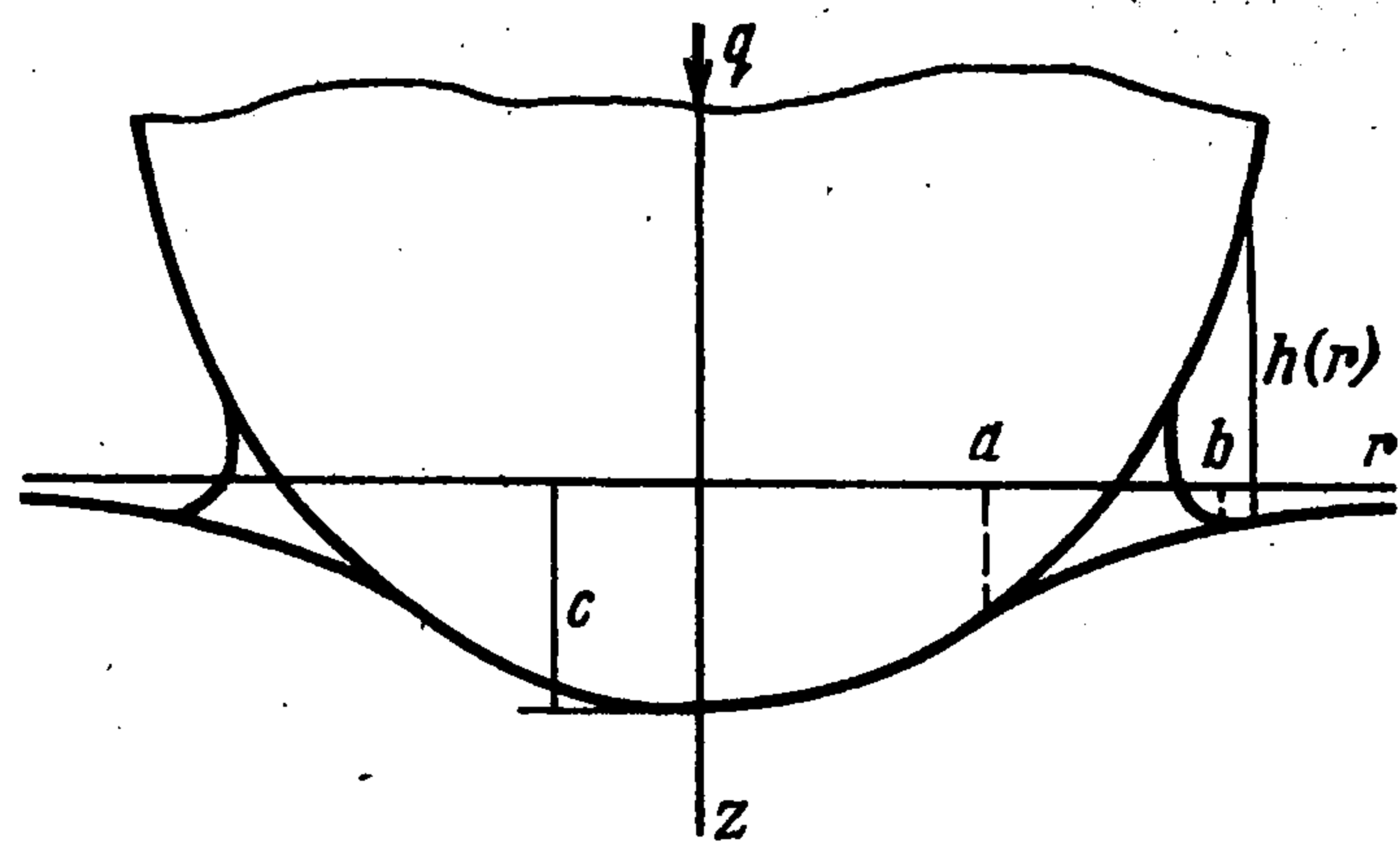
где  $K(x)$  – полный эллиптический интеграл первого рода.

Будем считать, что задан объем жидкости  $v$  в мениске, который связан с геометрией зазора соотношением

$$v = 2\pi \int_a^b rh(r) dr \quad (1.6)$$

И, наконец, из условия равновесия следует

$$q = 2\pi \int_a^b rp(r) dr \quad (1.7)$$



Фиг. 1

Полученные соотношения (1.2)–(1.7) дают возможность определить неизвестные функции  $p(r)$ ,  $u(r)$  и величины  $a$ ,  $b$  и  $p_0$ .

**2. Метод решения.** Представим функцию  $p(r)$  на интервале  $[0, a]$  в виде

$$p(r) = p_1(r) - p_0 \quad (2.1)$$

При этом в точке  $r = a$  выполняется условие  $p_1(a) = 0$ . Тогда из (1.5) с учетом (1.3) для  $0 \leq r \leq b$  получим

$$u(r) + 4P_0 b E(r/b) = A[p_1(r), a], \quad P_0 = p_0/p^* \quad (2.2)$$

При выводе (2.2) использовано значение интеграла [7]

$$\int_0^b K\left(\frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'}\right) \frac{r' dr'}{r+r'} = \begin{cases} bE(r/b), & r \leq b \\ r[E(b/r) - (1 - (b/r)^2)K(b/r)], & r > b \end{cases} \quad (2.3)$$

где  $E(x)$  – полный эллиптический интеграл второго рода.

При учете (2.1) выражение (1.7) принимает вид

$$q + \pi p_0 b^2 = 2\pi \int_0^a r p_1(r) dr \quad (2.4)$$

На основании условий (1.3) выражение (2.2) при  $r \leq a$  можно представить в виде интегрального уравнения

$$A[p_1(r), a] = -f_1(r) + c \quad (2.5)$$

для определения давлений  $p_1(r)$  под штампом, форма которого описывается гладкой функцией

$$f_1(r) = f(r) - 4P_0 b E(r/b) \quad (2.6)$$

Тогда правая часть (2.2) при  $a < r \leq b$  определяет смещения границы упругого полупространства вне области контакта с таким штампом, а правая часть (2.4) соответствует силе, приложенной к этому штампу.

Воспользуемся полученным ранее [8] решением задачи о внедрении осесимметричного штампа заданной формы  $f_1(r)$  в упругое полупространство, на основании которого из соотношений (2.1)–(2.5) получим выражения для нормальных давлений и смещений на границе упругого полупространства

$$p(r) = \pi^2 a^2 p^* \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \int_{r/a}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 a^2 - r^2}} \Delta f_1(axy) dx dy - p_0, \quad r \leq a \quad (2.7)$$

$$u(r) = \frac{2a}{\pi} \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 a^2}} \frac{\partial}{\partial x} (xc - x f_1(axy)) dx dy - 4P_0 b E\left(\frac{r}{b}\right), \quad a < r \leq b \quad (2.8)$$

а также условие для определения внедрения штампа

$$\int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \frac{\partial}{\partial y} (cy - c f_1(ay)) dy = 0 \quad (2.9)$$

Воспользовавшись формулой Л.А. Галина [6] для силы, прижимающей осесимметричный штамп, и учитывая выражение (2.4), будем иметь

$$q = p^* \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^a \Delta f_1(r) r \sqrt{a^2 - r^2} dr - P_0 b^2 \right] \quad (2.10)$$

Разлагая эллиптический интеграл в ряд и учитывая, что  $f(r) = Ar^{2n}$ , преобразуем выражение (2.6) к виду

$$f_1(r) = Ar^{2n} + 2\pi P_0 b \left( \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \right]^2 \frac{1}{2m-1} \left( \frac{r}{b} \right)^{2m} - 1 \right) \quad (2.11)$$

Для определения искомых выражений для давления  $p(r)$  и смещений  $u(r)$ , а также величин внедрения  $c$  и нагрузки  $q$ , подставим выражение (2.11) в соотношения (2.7)–(2.10) и введем безразмерные величины

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad P = \frac{p}{p^*}, \quad Q = A^{2/(2n-1)} \frac{q}{p^*}, \quad K = \frac{\sigma}{p^*}$$

$$U = A^{1/(2n-1)} u, \quad V = A^{3/(2n-1)} v, \quad C = A^{1/(2n-1)} c$$

$$\alpha = A^{1/(2n-1)} a, \quad \beta = A^{1/(2n-1)} b, \quad \gamma = \frac{a}{b}$$

Окончательно получим

$$P(\rho) = \frac{(\beta\gamma)^{2n-1}}{\pi^2} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \sqrt{1-\rho^2} \sum_{k=1}^n \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!} \rho^{2(n-k)} - P_0 \left( 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \rho \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1-\gamma^2}} \right), \quad \rho \leq 1 \quad (2.12)$$

$$U(\rho) = \frac{2}{\pi} (C - (\rho\beta\gamma)^{2n}) \arcsin \frac{1}{\rho} + \frac{2(\beta\rho)^{2n}}{\pi} \sqrt{\rho^2-1} \sum_{k=1}^n \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \rho^{2(n-k)} -$$

$$\begin{cases} 4(P_0\beta) \left\{ E(\gamma\rho) - E\left(\arcsin \frac{1}{\rho}, \gamma\rho\right) \right\}, & 1 < \rho \leq \frac{1}{\gamma} \\ 4P_0\rho\beta\gamma \left\{ E\left(\frac{1}{\rho\gamma}\right) - E\left(\arcsin \gamma, \frac{1}{\rho\gamma}\right) - \right. \\ \left. - \left[ 1 - \left(\frac{1}{\rho\gamma}\right)^2 \right] \left[ K\left(\frac{1}{\rho\gamma}\right) - F\left(\arcsin \gamma, \frac{1}{\rho\gamma}\right) \right] \right\}, & \rho > \frac{1}{\gamma} \end{cases} \quad (2.13)$$

$$C = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} (\beta\gamma)^{2n} - 2\pi P_0\beta\sqrt{1-\gamma^2} \quad (2.14)$$

$$Q = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{4n(\beta\gamma)^{2n+1}}{\pi} - P_0\beta^2 (\pi - 2 \arcsin \gamma + 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}) \quad (2.15)$$

где  $F(x, \psi)$ ,  $E(x, \psi)$  – неполные эллиптические интегралы первого и второго рода.

При выводе соотношений (2.12)–(2.15) были использованы значения интегралов [6, 9, 10]

$$\int_0^1 \frac{y^{2n-1}}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

$$\int_{\rho}^1 \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{x^2-\rho^2}} dx = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \sqrt{1-\rho^2} \sum_{k=1}^n \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!} \rho^{2(n-k)}$$

$$\gamma \int_0^1 \frac{\sqrt{(1/\gamma)^2 - x^2}}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} dx = \begin{cases} E\left(\arcsin \frac{1}{\rho}, \gamma\rho\right), & 1 < \rho \leq \frac{1}{\gamma} \\ \gamma\rho \left[ E\left(\arcsin \gamma, \frac{1}{\gamma\rho}\right) - \left(1 - \left(\frac{1}{\gamma\rho}\right)^2\right) F\left(\arcsin \gamma, \frac{1}{\gamma\rho}\right) \right], & \rho > \frac{1}{\gamma} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \rho^{2n-1} \sqrt{1-\rho^2} d\rho = \frac{(2n-2)!!}{(2n+1)!!} \quad (2.16)$$

и суммы

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} x^{2m} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2.17)$$

а также формулы, полученные путем почленного интегрирования ряда (2.17), и значение интеграла, найденное с помощью интегрирования по частям,

$$\int_0^1 \frac{x^{2m} dx}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \rho^{2m} \left[ \arcsin \frac{1}{\rho} - \sqrt{\rho^2 - 1} \sum_{k=1}^m \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \rho^{-2k} \right]$$

Выражения (2.12), (2.14) и (2.15) при  $P_0 = 0$  совпадают с результатами, полученными ранее [10].

Для определения оставшихся неизвестных параметров задачи  $\gamma$ ,  $\beta$  и  $P_0$ , воспользуемся соотношениями (1.1), (1.2) и (1.6). Преобразуем формулу (1.1) с учетом (2.13) и (2.14). Тогда получим для безразмерной величины зазора  $H = A^{1/(2n-1)}h$  выражение

$$H(\rho) = \left( \rho^{2n} - \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} (\beta\gamma)^{2n} - 2\pi P_0 \beta \sqrt{1-\gamma^2} \right) \left( 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{\rho} \right) + \\ + \frac{2\rho^{2n}}{\pi} \sqrt{\rho^2 - 1} \sum_{k=1}^n \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \rho^{-2k} + 4P_0 \beta \left[ E(\rho\gamma) - E\left(\arcsin \frac{1}{\rho}, \rho\gamma\right) \right] \quad (2.18)$$

Подставляя (2.18) в (1.2) и (1.6) и воспользовавшись значениями интегралов [9]

$$\int_1^{1/\gamma} \rho E(\rho\gamma) d\rho = \frac{1}{3\gamma^2} (2 + \chi)$$

$$\int_1^{1/\gamma} \rho E\left(\arcsin \frac{1}{\rho}, \rho\gamma\right) d\rho = \frac{1}{3\gamma^2} (3\gamma - \gamma^3 + \chi)$$

где

$$\chi = -(1 + \gamma^2)E(\gamma) + (1 - \gamma^2)K(\gamma)$$

а также формулой (2.16) и значением интеграла, полученным с помощью интегрирования по частям,

$$\int_1^{1/\gamma} \rho^{2n+1} \arcsin \frac{1}{\rho} d\rho = \frac{1}{(2n+2)\gamma^{2n+2}} \left[ \arcsin \gamma - \frac{\pi}{2} \gamma^{2n+2} + \right. \\ \left. + \gamma \sqrt{1-\gamma^2} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \sum_{k=0}^n \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \gamma^{2(n-k)} \right]$$

будем иметь квадратное уравнение относительно  $P_0$ , решая которое, получим

$$P_0 = \frac{B_2 - \sqrt{B_2^2 - 4B_1K}}{2B_1} \quad (2.19)$$

$$B_1 = 2\beta(1 - \gamma + \varphi\sqrt{1 - \gamma^2})$$

$$B_2 = \frac{\beta^{2n}}{\pi} \left\{ \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \gamma^{2n} - 1 \right) \varphi + \sqrt{1 - \gamma^2} \sum_{k=1}^n \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \gamma^{2k-1} \right\}$$

$$\varphi = \arcsin \gamma - \pi/2$$

(знак минус перед радикалом выбран потому, что при  $K = 0$  должно выполняться равенство  $P_0 = 0$ ), а также будем иметь уравнение

$$V = 2\beta^{2n+2} \left\{ \frac{(2n)!!(2n-1)}{(2n+1)!!} \gamma^{2n+2} \sqrt{1 - \gamma^2} + \frac{\sqrt{1 - \gamma^2}}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \gamma^{2k+1} + \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \gamma^{2n} - \frac{1}{n+1} \right) \varphi \right\} - \frac{4\pi}{3} P_0 \beta^3 (4 - 3\gamma - \gamma^3 + 3\varphi\sqrt{1 - \gamma^2}) \quad (2.20)$$

Подставляя (2.19) в (2.20), получим уравнение, содержащее неизвестные  $\beta$  и  $\gamma$ . Это уравнение решалось численно относительно  $\beta$  при заданных  $\gamma$ , затем согласно (2.19) определялось безразмерное давление в жидкости  $P_0$ . После этого остальные характеристики задачи находились из соотношений (2.12)–(2.15). Выражение (2.15) служит для определения нагрузки  $Q$ , соответствующей выбранному значению  $\gamma$ . Если задана величина нагрузки  $Q$ , неизвестные величины  $\beta$  и  $\gamma$  могут быть определены на основании решения системы уравнений (2.20) и (2.15).

Если пренебречь упругими деформациями полупространства вне области контакта, т.е. считать, что  $|u(r) - u(a)| \ll |f(r) - f(a)|$  для  $r \geq a$ , то условия (1.2) и (1.6) приводятся к простому виду

$$P_0 = \frac{2K}{\beta^{2n}(1 - \gamma^{2n})} \quad (2.21)$$

$$\beta = \left[ \frac{V(n+1)}{\pi(1 - (n+1)\gamma^{2n} + n\gamma^{2n+2})} \right]^{1/(2n+2)} \quad (2.22)$$

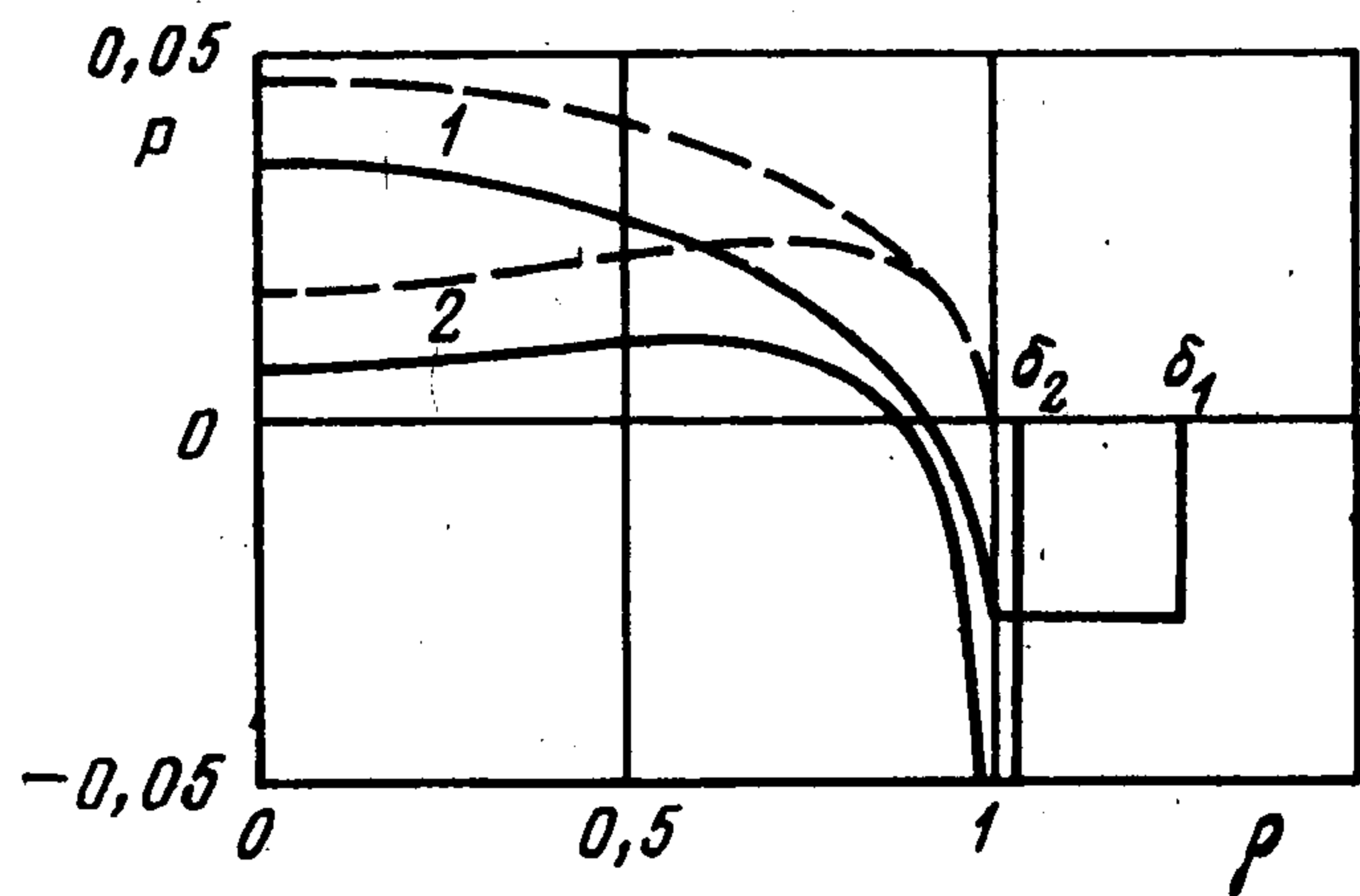
Соотношения (2.21), (2.22) совместно с формулами (2.12)–(2.15) дают аналитическое решение задачи в параметрическом виде.

**3. Результаты расчетов.** Исследовалось решение задачи в зависимости от значений следующих параметров:  $V$ , определяемого объемом жидкости в мениске и геометрией штампа,  $Q$ , характеризующего приложенную к штампу нагрузку и  $K$ , зависящего от поверхностного натяжения жидкости и упругих свойств полупространства. При этом определялись безразмерные функции контактного давления  $P(\rho)$  и смещений границы упругого полупространства  $U(\rho)$ , а также безразмерные величины давления в жидкости  $P_0$ , радиуса области контакта  $\alpha$ , ширины  $(\beta - \alpha)$  кольцевой области, занятой жидкостью, и внедрения  $S$ .

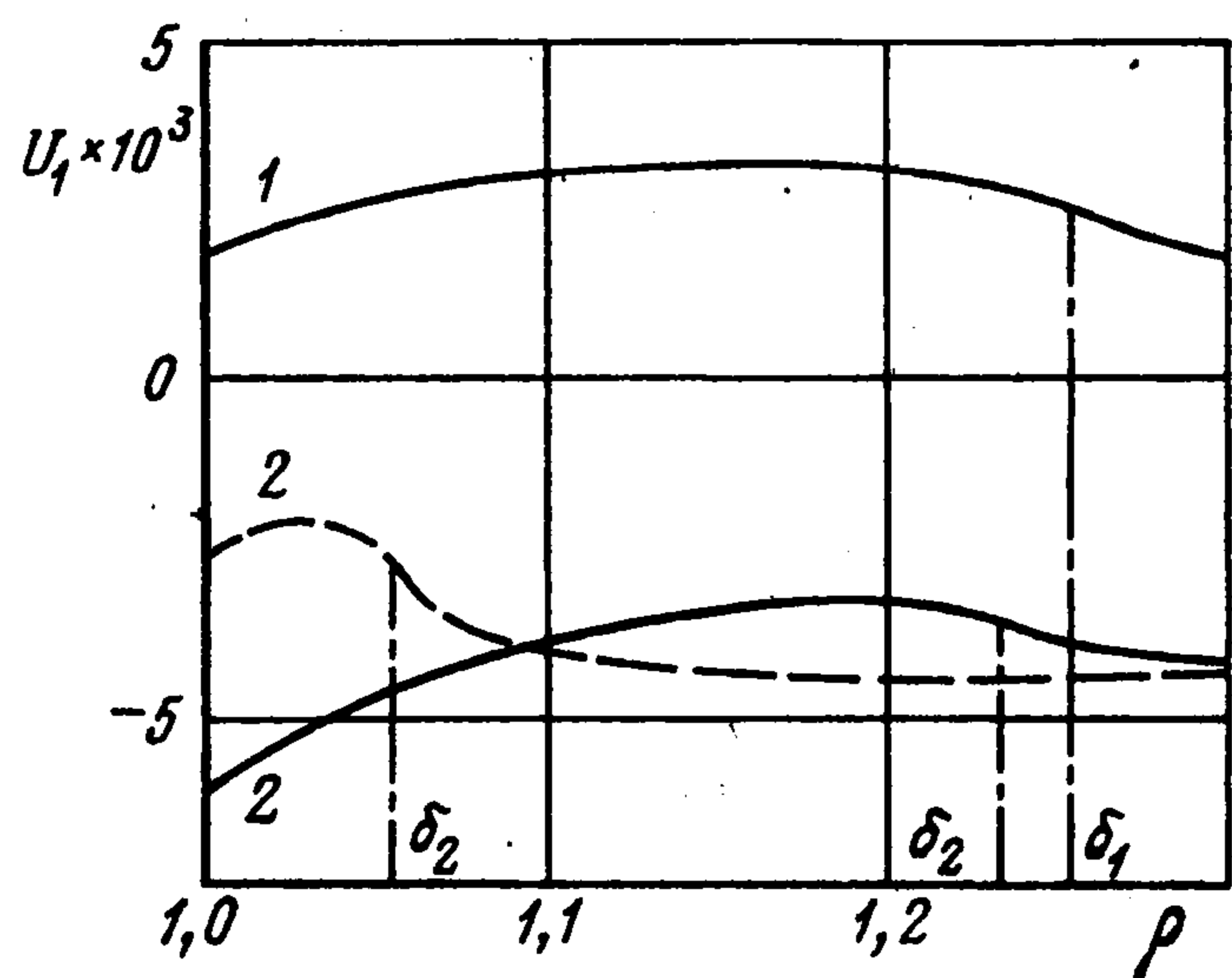
Помимо перечисленных величин, введем в рассмотрение капиллярную силу адгезии

$$f_a = q_0 - q \quad (3.1)$$

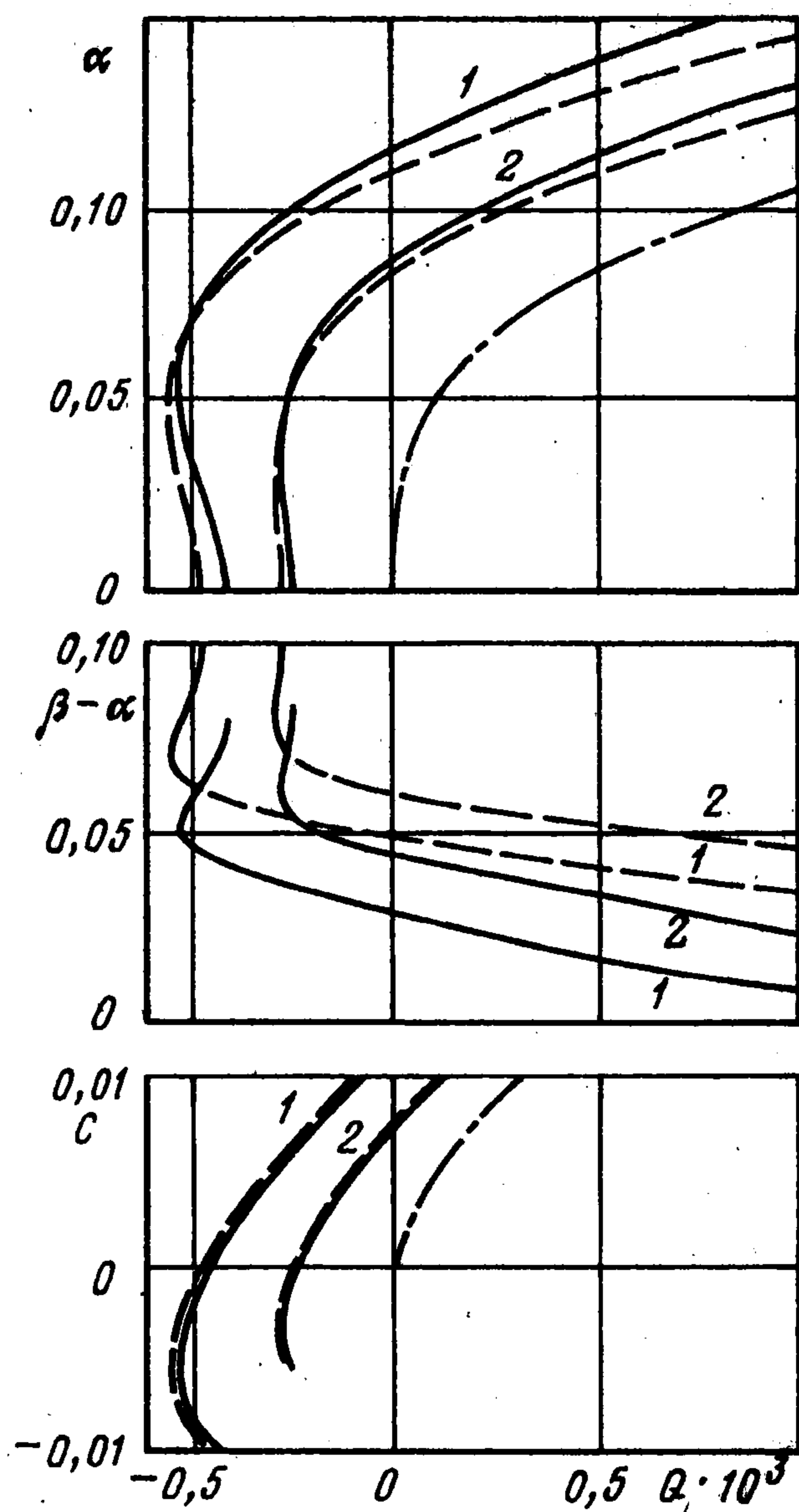
где  $q$  и  $q_0$  – нагрузки, необходимые для образования контактной области радиуса  $a$  при отсутствии и при наличии мениска, соответственно. На основании (2.15) и (3.1), для без-



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

размерной капиллярной силы адгезии получим

$$F_a = A^{2/(2n-1)} \frac{f_a}{p^*} = P_0 \beta^2 (\pi - 2 \arcsin \gamma + 2\gamma \sqrt{1-\gamma^2}) \quad (3.2)$$

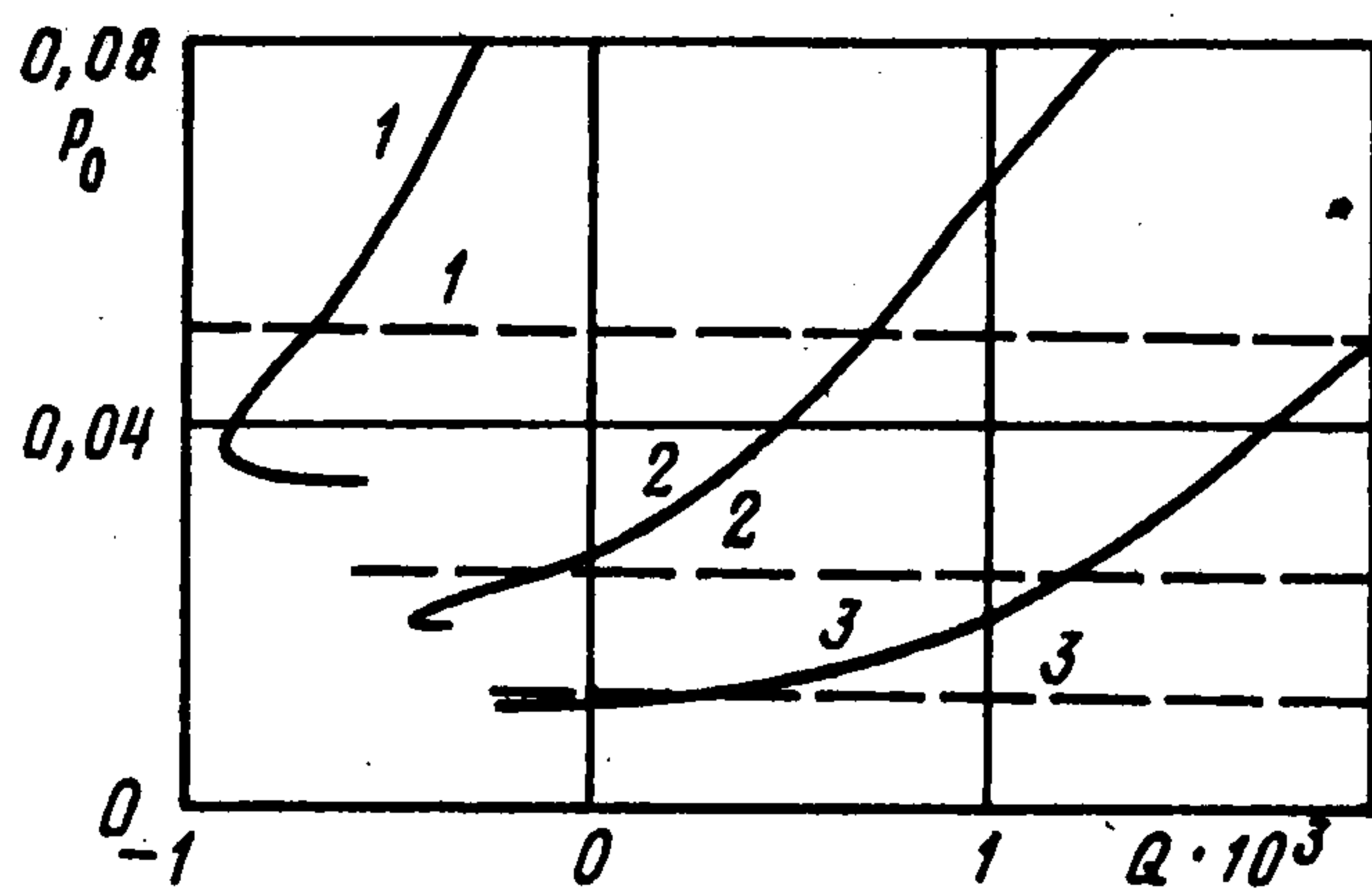
Заметим, что если в соотношении (3.2) положить  $n = 1$  и  $A = 1/(2R)$ , а также подставить  $P_0$  согласно упрощенной формуле (2.21), то можно получить для силы адгезии при малых  $\gamma$  упрощенное выражение

$$f_a \approx 4\pi R \sigma (1 + (a/b)^2)$$

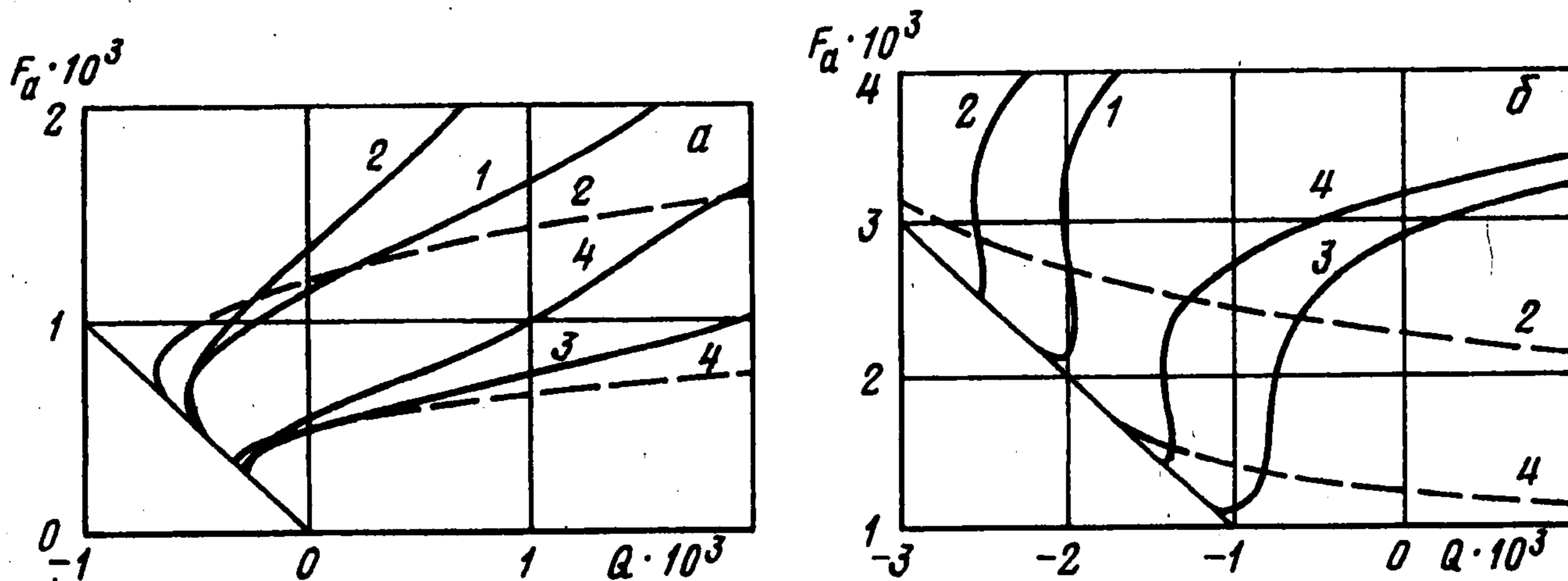
аналогичное формуле (0.1), полученной ранее [5].

На фиг. 2 представлены графики функции безразмерного давления в контакте для двух форм штампа, соответствующие  $n = 1$  (кривые 1) и  $n = 2$  (кривые 2), при  $Q = 0$ ,  $K = 10^{-4}$ ,  $V = 10^{-4}$  (сплошные кривые). Штриховые кривые соответствуют распределениям давлений для тех же величин радиуса области контакта  $\alpha$  при отсутствии жидкости. На приведенных графиках значения  $\delta$  определяют внешний радиус кольцевой области, занятой жидкостью, отнесенный к радиусу области контакта, т.е.  $\delta = b/a = 1/\gamma$ . Сравнение зависимостей свидетельствует о том, что при одной и той же площади контакта давления под штампом при наличии мениска меньше, чем при сухом контакте. Отсюда, в частности, следует, что величина силы адгезии, введенной согласно (3.1), будет положительной. По краям области контакта давления становятся отрицательными (для кривой 2 имеем  $P_0 = 2,05$ ). Это означает, что на указанных участках действуют давления, меньшие по величине атмосферного. Форма штампа существенно влияет на эпюру распределения давлений, а также ширину кольцевой области, занятой жидкостью.

Графики функции  $U_1(\rho) = -U(\rho)$ , иллюстрирующей форму упругого полупространства вне области контакта, изображены на фиг. 3 при  $n = 1$ ,  $K = 10^{-4}$  при  $Q = 0$  (кривая 1) и  $Q = 10^{-3}$  (кривые 2), для  $V = 10^{-4}$  (сплошные кривые) и  $V = 2 \times 10^{-4}$  (штриховая кривая). Результаты



Фиг. 5



Фиг. 6

показывают, что при наличии мениска граница упругого полупространства существенно искривляется и имеет место разрыв производной от формы поверхности на внешней окружности радиуса  $\delta$ ; кольцевой области, занятой жидкостью.

На фиг. 4 приведены графики зависимости радиуса области контакта  $\alpha$ , ширины кольцевой области, занятой жидкостью ( $\beta - \alpha$ ), и внедрения  $C$  от нагрузки  $Q$  для случая  $n = 1$  при  $K = 2 \times 10^{-4}$  (кривые 1) и  $K = 10^{-4}$  (кривые 2). Сплошные линии соответствуют значению  $V = 10^{-4}$ , штриховые —  $V = 2 \times 10^{-4}$ . Представленные зависимости позволяют заключить, что величины области контакта и внедрения штампа отличны от нуля при некоторых отрицательных нагрузках и превосходят по величине соответствующие герцевские значения (штрих-пунктирные кривые) при положительных нагрузках. Этот эффект тем заметнее, чем больше параметр  $K$ . Увеличение объема жидкости приводит к уменьшению области контакта и внедрения, при этом кольцо жидкости становится шире. Характерной особенностью данных, а также представленных ниже графиков является неоднозначность определения контактных характеристик в определенной области отрицательных значений нагрузки.

На фиг. 5 изображена зависимость безразмерного давления в жидкости  $P_0$  от безразмерной нагрузки  $Q$  при  $n = 1$ ,  $V = 10^{-4}$  и  $K = 2 \times 10^{-4}$  (кривые 1),  $K = 10^{-4}$  (кривые 2),  $K = 5 \times 10^{-5}$  (кривые 3). Сплошными линиями изображены результаты, соответствующие точным формулам (2.19), (2.20), штриховыми — упрощенным формулам (2.21), (2.22). Видно, что при упрощенном подходе давление в жидкости получается не зависящим от нагрузки, в то время как расчеты на основании точных соотношений показывают, что, начиная с некоторого значения  $Q$ ,  $P_0$  возрастает с увеличением нагрузки. Это расхождение тем заметнее, чем больше нагрузка  $Q$  и величина параметра  $K$ .

Заметим, что при  $n > 1$  расчеты по упрощенным соотношениям (2.21), (2.22) показывают, что  $P_0$  уменьшается с увеличением  $Q$ . В результатах же, полученных из соотношений (2.19), (2.20), такое уменьшение имеет место лишь при достаточно малых  $Q$ , а затем происходит увеличение  $P_0$  с возрастанием нагрузки.

Фиг. 6 иллюстрирует зависимость безразмерной силы адгезии  $F_a$ , рассчитанной по формуле (3.2), от нагрузки для  $n = 1$  (фиг. 6, а) и  $n = 3$  (фиг. 6, б). Значения параметров, при которых построены данные графики, приведены в таблице. Сплошными линиями представлены результаты расчетов по точным формулам (2.19), (2.20), штриховыми — по упрощенным формулам (2.21), (2.22).

V	$2 \times 10^{-4}$ (a) $2 \times 10^{-3}$ (б)	$10^{-4}$ (a) $10^{-3}$ (б)
K		
$5 \times 10^{-4}$ (a)		
$2 \times 10^{-5}$ (б)	1	2
$10^{-4}$ (a)		
$10^{-5}$ (б)	3	4

На приведенных графиках начальные точки всех кривых лежат на одной прямой. Действительно, из (2.15) и (3.2) следует, что при  $\gamma = 0$  имеем  $F_a = -Q$ . Результаты показывают также, что сила адгезии возрастает с увеличением нагрузки, начиная с некоторого значения  $Q$ , и это возрастание тем резче, чем меньше объем жидкости в мениске и чем более пологую форму имеет штамп. При этом сила адгезии больше при больших значениях параметра  $K$ .

Анализ результатов, приведенных на фиг. 6, позволяет заключить, что расчеты по упрощенным соотношениям (2.21), (2.22) дают значительную ошибку в определении силы адгезии, особенно при больших значениях нагрузки  $Q$ . Наименьшее расхождение результатов имеет место при  $n = 1$  и малых по абсолютной величине значениях  $Q$ . При  $n > 1$  результаты различаются не только количественно, но и качественно.

**4. Выводы.** Анализ результатов решения задачи о внедрении осесимметричного штампа в упругое полупространство при наличии в зазоре жидкости, образующей мениск, дает возможность сделать следующие выводы:

1°. Капиллярные силы существенно влияют на контактные характеристики при взаимодействии упругих тел. В частности, наличие мениска приводит к появлению под штампом давлений, меньших атмосферного.

2°. Влияние капиллярных эффектов тем сильнее, чем меньше количество жидкости в зазоре и чем более пологой является форма взаимодействующих поверхностей.

3°. Между контактирующими телами возникает сила адгезии, возрастающая с увеличением нагрузки. Действие этой силы приводит к увеличению области контакта, а также к неоднозначной зависимости от нагрузки радиуса области контакта и других контактных характеристик в некотором диапазоне отрицательных значений нагрузок. Качественно аналогичные результаты были получены при исследовании адгезии в сухом контакте [7, 11], что говорит о схожести проявления адгезии при контактировании смазанных и сухих поверхностей.

4°. Проведенный анализ позволил определить границы применимости упрощенного подхода, дающего возможность получить аналитическое решение задачи в предположении пренебрежимой малости упругих деформаций поверхностей вне области контакта. В частности, показано, что для параболического штампа упрощенный подход применим в области малых по абсолютной величине нагрузок. Для форм штампов, описываемых многочленами более высокого порядка, расчеты контактных характеристик должны проводиться по точным формулам.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (98-01-00901).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Liu C.C., Mee P.B. Stiction at the winchester head-disk interface // IEEE Trans. Magnetics. 1983. V. 19. № 5. P. 1659–1661.
2. Tian H., Matsudaira T. Effect of relative humidity on friction behavior of the head / disk interface // IEEE Trans. Magnetics. 1992. V. 28. № 5. Pt 2. P. 2530–2532.
3. Rabinowicz E. Friction and Wear of Materials. New York: Wiley, 1965. 244 p.
4. Matthewson M.J., Mamin H.J. Liquid mediated adhesion of ultra-flat solid surfaces // Mater. Res. Soc. Symp. Proc. 1988. V. 119. P. 87–92.
5. Чижик С.А. Капиллярный механизм адгезии и трения шероховатых поверхностей, разделенных тонким слоем жидкости // Трение и износ. Т. 15. № 1. С. 11–26.

6. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
7. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М: Мир, 1989. 509 с.
8. Довнорович В.И., Яшин В.Ф. Некоторые пространственные задачи теории упругости. Гомель: БИИЖТ, 1961. 55 с.
9. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
10. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
11. Maugis D. Adhesion of spheres: The JKR-DMT transition using a Dugdale model // J. Colloid Interface Sci. 1991. № 150. P. 243–269.

Москва

Поступила в редакцию  
31.III.1998