

УДК 539.3

© 1999 г. Е.В. Коваленко

## О КОНТАКТЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С УПРУГИМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ ЧЕРЕЗ ТОНКОЕ ПОКРЫТИЕ

На основании асимптотического анализа первой основной задачи теории упругости для слоя выведены уточненные уравнения деформирования тонких пластин, удобные при решении контактных задач для тел с покрытиями и содержащие в себе как частный случай уравнения всех известных прикладных теорий. Проведена систематизация уравнений деформирования тонкостенных упругих элементов, выявлено их качественное соответствие уравнениям теории упругости и установлены виды особенностей, возникающих на линиях смены граничных условий в соответствующих контактных задачах. Дан критерий выбора приближенных моделей для описания свойств покрытий в зависимости от геометрических и механических характеристик покрытия и подложки, а также от степени их адгезии.

Проблема уточнения, а также вывода новых уравнений, пригодных для решения смешанных задач, связана с неадекватностью классических прикладных теорий при описании практических явлений [1]. Но такая ситуация не означает, что классические теории должны быть отброшены. Несмотря на то что существует ряд задач [2], где они не работают, имеются проблемы, которые могут быть решены только на их основе [1]. Таким образом, применение каждой теории деформирования тонкостенных упругих элементов при решении той или иной задачи должно быть обосновано с точки зрения совпадения конечного результата с неким эталонным решением, полученным, например, на основе уравнений теории упругости.

1. Получим вначале уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние тонких пластин. Для этого изучим задачу о равновесии бесконечного упругого ( $G$  – модуль сдвига,  $\nu$  – коэффициент Пуассона) изотропного слоя (фигура), находящегося в условиях пространственной неосесимметричной деформации под действием нормальных и касательных нагрузок, приложенных к его граням. Относительно функций  $\sigma_m(x, y)$  и  $\tau_{mn}(x, y)$  ( $m, n = 1, 2$ ) предположим, что либо они кусочно-непрерывны, абсолютно интегрируемы и ограничены на всей плоскости  $(x, y)$ , либо являются функциями ограниченной вариации.

Точное решение такой задачи было построено [3] при помощи двумерного интегрального преобразования Фурье по переменным  $x, y$  и имеет следующую структуру ( $\Gamma_1 = (-A, A)$ ,  $\Gamma_2 = (-B, B)$ ):

$$\{\sigma_m, \tau_{mn}\} = \frac{1}{2\pi} \int \int_{\Gamma_1 \Gamma_2} \{\Sigma_m, T_{mn}\} e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \quad (1.1)$$

$$\{u, v, w\} = \frac{1}{2\pi} \int \int_{\Gamma_1 \Gamma_2} \{U, V, W\} e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \quad (1.2)$$

$$D_1(\alpha h, \beta h)U = P_1(\alpha h, \beta h, \alpha z, \beta z, \Sigma^\pm, T_m^\pm)$$

$$D_1(\alpha h, \beta h) V = P_2(\alpha h, \beta h, \alpha z, \beta z, \Sigma^\pm, T_m^\pm) \quad (1.3)$$

$$D_2(\alpha h, \beta h) W = P_3(\alpha h, \beta h, \alpha z, \beta z, \Sigma^\pm, T_m^\pm)$$

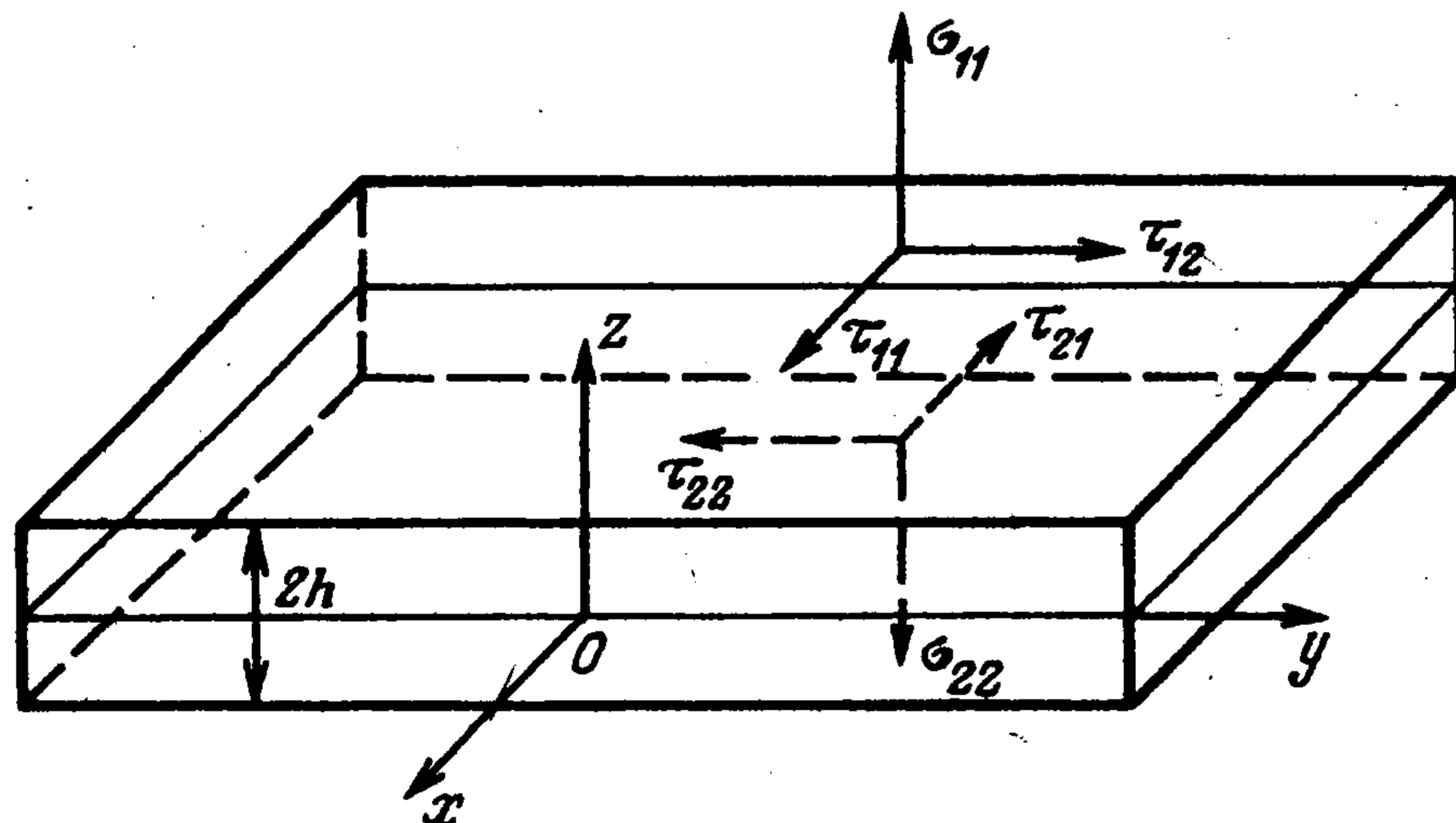
$$\Sigma^\pm = \Sigma_1 \pm \Sigma_2, \quad T_m^\pm = T_{1m} \pm T_{2m} \quad (m = 1, 2)$$

где  $u, v, w$  – компоненты вектора перемещений точек упругого слоя.

Здесь существенно, что пределы интегрирования в квадратурах (1.1) должны быть конечными [4] и удовлетворять неравенствам

$$Ah \ll 1, Bh \ll 1 \quad (1.4)$$

Эти соотношения служат одними из "условий применимости теории тонких пластин" и указывают, что внешние напряжения плавно распределены по поверхностям пластины  $z = \pm h$ .



Введем в рассмотрение безразмерный параметр, определяемый толщиной  $2h$  и геометрией области  $\Omega$  активного нагружения слоя, т.е. такой области, где поверхностные нагрузки  $\sigma_m(x, y)$  и  $\tau_{mn}(x, y)$  ( $m, n = 1, 2$ ) составляют, например, не менее 5% от их максимальных значений. Так, в случае, когда область  $\Omega$  односвязна, ограничена и контур ее имеет непрерывную кривизну, можно принять [5]

$$\lambda = h[\min(l, \rho_{\min})]^{-1}$$

$$l = \frac{1}{2} \max \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \quad (x, y) \in \Omega, (\xi, \eta) \in \Omega$$

где  $\rho_{\min}$  – минимальный радиус кривизны границы  $\partial\Omega$ .

Вторым следствием конечности пределов интегрирования в (1.1), в согласии с условиями (1.4), является то, что теория тонких пластин справедлива лишь тогда [4], когда  $\lambda \ll 1$ .

Положим в (1.3)  $z = \pm h$ , асимптотически, с точностью до членов порядка  $\lambda^3$  ( $\lambda \rightarrow 0$ ), упростим первые два выражения и удержим члены  $O(\lambda^4)$  в последнем равенстве. Возвращаясь затем к оригиналам по формулам (1.2) [3], запишем (исправлены неточности в правых частях аналогичных уравнений, приведенных в [3, 6, 7])

$$\frac{4}{3} \theta h^2 \Delta^2 u_\pm = A_{1,x}^\pm(\sigma) + A_{2,xx}^\pm(\tau_1) + A_{3,yy}^\pm(\tau_1) + A_{4,xy}^\pm(\tau_2) \quad (1.5)$$

$$\frac{4}{3} \theta h^2 \Delta^2 v_\pm = A_{1,y}^\pm(\sigma) + A_{2,yy}^\pm(\tau_2) + A_{3,xx}^\pm(\tau_2) + A_{4,xy}^\pm(\tau_1) \quad (1.6)$$

$$\frac{4}{3} \theta h^3 \Delta^2 w_\pm = B_1^\pm(\sigma) + B_{2,x}^\pm(\tau_1) + B_{2,y}^\pm(\tau_2) \quad (1.7)$$

Здесь  $\theta = G(1-\nu)^{-1}$ ,  $\Delta$  – двумерный оператор Лапласа и обозначено:

$$\{u_\pm, v_\pm, w_\pm\} = \{u(x, y, \pm h), v(x, y, \pm h), w(x, y, \pm h)\}$$

$$\sigma = \{\sigma^-, \sigma^+\}, \quad \tau_j = \{\tau_j^-, \tau_j^+\}, \quad \mathbf{a} = \{a^-, a^+\}$$

$$\sigma^\pm = \sigma_1 \pm \sigma_2, \quad \tau_j^\pm = \tau_{1j} \pm \tau_{2j} \quad (j=1,2)$$

$$A_1^\pm(\mathbf{a}) = \mp a^- \pm \frac{2-7\nu}{15(1-\nu)} h^2 \Delta a^- - \frac{\nu}{1-\nu} h^2 \Delta a^+$$

$$A_2^\pm(\mathbf{a}) = \frac{1}{3} h (-a^- \pm 3a^+ + \frac{2}{3} h^2 \Delta a^- \pm \frac{2}{5} h^2 \Delta a^+)$$

$$A_3^\pm(\mathbf{a}) = \frac{2h}{3(1-\nu)} (-a^- + \frac{1}{3} h^2 \Delta a^- \pm h^2 \Delta a^+)$$

$$A_4^\pm(\mathbf{a}) = h \left[ \frac{1+\nu}{3(1-\nu)} a^- \pm a^+ - \frac{2\nu}{9(1-\nu)} h^2 \Delta a^- \mp \frac{2(4+\nu)}{15(1-\nu)} h^2 \Delta a^+ \right]$$

$$B_1^\pm(\mathbf{a}) = a^- - \frac{4}{5} h^2 \Delta a^- + \frac{27}{175} h^4 \Delta^2 a^- \pm \frac{1}{3} h^4 \Delta^2 a^+$$

$$B_2^\pm(\mathbf{a}) = h \left[ a^+ - \frac{2-7\nu}{15(1-\nu)} h^2 \Delta a^+ \pm \frac{\nu}{3(1-\nu)} h^2 \Delta a^- \right]$$

Соотношения (1.5)–(1.7) представляют собой уточненные дифференциальные уравнения деформирования тонких пластин (покрытий) и позволяют учесть как их продольные и поперечные деформации растяжения и сдвига, так и их деформации поперечного изгиба и сжатия.

Отметим, что если при выводе уточненных уравнений деформирования тонких пластин произвести в силу малости параметра  $\lambda$  усреднение выражений (1.3) по толщине

$$\{\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}\} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \{U, V, W\} dz$$

то приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{4}{3} \theta h \Delta^2 \bar{u} = \bar{A}_{1,x}(\sigma^+) + \bar{A}_{2,xx}(\tau_1^-) + \bar{A}_{3,yy}(\tau_1^-) + \bar{A}_{4,xy}(\tau_2^-) \quad (1.8)$$

$$\frac{4}{3} \theta h \Delta^2 \bar{v} = \bar{A}_{1,y}(\sigma^+) + \bar{A}_{2,yy}(\tau_2^-) + \bar{A}_{3,xx}(\tau_2^-) + \bar{A}_{4,xy}(\tau_1^-) \quad (1.9)$$

$$\frac{4}{3} \theta h^3 \Delta^2 \bar{w} = \bar{B}_1(\sigma^-) + \bar{B}_{2,x}(\tau_1^+) + \bar{B}_{2,y}(\tau_2^+) \quad (1.10)$$

$$\bar{A}_1(a^+) = -\frac{\nu h}{3(1-\nu)} \Delta a^+, \quad \bar{A}_2(a^-) = -\frac{1}{3} a^- - \frac{\nu}{9(1-\nu)} h^2 \Delta a^-$$

$$\bar{A}_3(a^-) = -\frac{2}{3(1-\nu)} a^-, \quad \bar{A}_4(a^-) = \frac{1+\nu}{3(1-\nu)} a^- - \frac{\nu}{9(1-\nu)} h^2 \Delta a^-$$

$$\bar{B}_1(a^-) = a^- - \frac{12-7\nu}{15(1-\nu)} h^2 \Delta a^- + \frac{11}{525} h^4 \Delta^2 a^-$$

$$\bar{B}_2(a^+) = h(a^+ - \frac{2}{15} h^2 \Delta a^+)$$

которые в отличие от (1.5)–(1.7) учитывают лишь продольные деформации растяжения – сжатия и изгиба.

Предложенные модели (1.5)–(1.10) отличаются от полученных ранее [8] уравнений наличием членов более высокого порядка по  $\lambda$  в правых частях и видом коэффициентов при  $\lambda$ . Например, в уравнении (1.10) разница при  $\nu = 0,3$  составляет 3% в коэффициентах при  $\lambda^2$  и 21% в коэффициентах при  $\lambda^3$ .

Остановимся на частных случаях выведенных уравнений деформирования тонких пластин (1.5)–(1.10).

Пренебрегая в правой части (1.10) слагаемыми порядка  $\lambda^2$  и выше, приходим к модели пластинки типа Кирхгофа–Лява. Заметим, что аналогичные уравнения можно получить из соотношений (1.7). Если же в (1.10) отбросить лишь слагаемые  $O(\lambda^4)$ , то получим уравнения теории типа Рейсснера–Тимошенко. Более точные уравнения этой теории можно выписать на основании выражений (1.7).

Опустим в левой и правой частях соотношений (1.10) (либо (1.7)) слагаемые порядка  $\lambda^2$  и выше (т.е. пренебрежем изгибной жесткостью пластинки), а в правых частях (1.8) и (1.9) (либо (1.5) и (1.6)) члены  $O(\lambda^3)$  и преобразуем два последних выражения при помощи первого. Будем иметь

$$\begin{aligned} 4Gh\Delta^2\tilde{u} &= -vh\Delta\sigma_{,x}^+ - (1-\nu)\tau_{1,xx}^- - 2\tau_{1,yy}^- + (1+\nu)\tau_{2,xy}^- \\ 4Gh\Delta^2\tilde{v} &= -vh\Delta\sigma_{,y}^+ - (1-\nu)\tau_{2,yy}^- - 2\tau_{2,xx}^- + (1+\nu)\tau_{1,xy}^- \\ \sigma^- &= -h(\tau_{1,x}^+ + \tau_{2,y}^+) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Система (1.11) представляет собой уравнения деформирования накладки Мелана [6].

Пусть теперь в (1.5)–(1.7)  $\tau_{1j} = u_- = v_- = w_- = 0$  ( $j = 1, 2$ ). Пренебрежем в уравнении (1.7) для  $w_-$  членами  $O(\lambda^2)$  и выше. Получим

$$\sigma^- = -h(\tau_{21,x} + \tau_{22,y}) \quad (1.12)$$

В то же время выражения (1.5) и (1.6) для  $u_-$  и  $v_-$  дают

$$\nu h(1-\nu)^{-1} \Delta\sigma^+ = \tau_{21,x} + \tau_{22,y} \quad (1.13)$$

Внося (1.13) в соотношение (1.7) для  $w_+$ , найдем

$$w_+ = (1-2\nu)h[2G(1-\nu)]^{-1} \sigma^+ \quad (1.14)$$

Выражения (1.12), (1.14) представляют собой уравнения основания Фусса–Винклера, описывающие деформацию поперечного сжатия покрытия.

Кроме того, удержание при выводе (1.5)–(1.7) членов порядка  $\lambda^6$  дает возможность вместо (1.12), (1.14) выписать пространственный аналог уравнения основания Пастернака–Власова [9] с несколькими коэффициентами постели и уточненные уравнения сдвиговых оснований [7].

2. Рассмотрим теперь контактные задачи о вдавливании без трения силой  $P$  и моментами  $M_x$  и  $M_y$  жесткого штампа в составное основание, представляющее собой упругое  $(G_2, \nu_2)$  полупространство, усиленное относительно тонким упругим  $(G_1, \nu_1)$  слоем толщины  $h$ . Считаем, что покрытие либо свободно лежит на упругой подложке (задача 1), либо жестко сцеплено с ней (задача 2). Физико-механические свойства полупространства будем описывать уравнениями теории упругости (уравнениями Ламе), а покрытия – соответственно уравнениями Ламе и уравнениями прикладных теорий, приведенных в п.1. Тогда при помощи интегрального преобразования Фурье по  $x$  и  $y$  поставленные задачи сводятся к определению контактного давления  $q(x, y) = -\sigma_z(x, y, h) \theta_2^{-1}$  ( $\theta_2 = G_2(1-\nu_2)^{-1}$ ) из интегрального уравнения вида

$$\mathbb{F}q = g \quad ((x, y) \in \Omega) \quad (2.1)$$

$$\mathbb{F}q = \iint_{\Omega} q(\xi, \eta) k(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta$$

$$k(s, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K(h\gamma) e^{i(\alpha s + \beta t)} d\alpha d\beta, \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad (2.2)$$

В (2.1)  $g(x, y) = \delta + \alpha_y x + \alpha_x y - f(x, y)$  – функция осадки, определяемая жестким смещением штампа и формой его основания  $z = f(x, y)$ , занимающего область  $\Omega$ .

Символ ядра  $K(h\gamma)$  в (2.2) можно представить как  $K(h\gamma) = L(h\gamma)\gamma^{-1}$ , где для функции  $L(u)$  ( $u = h\gamma$ ) получены следующие выражения [10]:

$$1) nL(u) = \frac{\text{ch } 2u - 1 + n(\text{sh } 2u + 2u)}{\text{sh } 2u + 2u + n(\text{ch } 2u - 1 - 2u^2)} \quad (2.3)$$

$$2) nL(u) = \frac{2n \text{ch } 2u + (2m + \theta)\text{sh } 2u + 2\theta u}{(2m + \theta)(\text{ch } 2u - 1) + 2n \text{sh } 2u + 2(1 - \theta u^2)} \quad (2.4)$$

$$\theta = n^2 - m^2, \quad m = 1 - \mu, \quad \mu = \varepsilon_1 - n\varepsilon_2, \quad n = \theta_1 \theta_2^{-1}$$

$$\theta_j = G_j(1 - \nu_j)^{-1}, \quad \varepsilon_j = (1 - 2\nu_j)[2(1 - \nu_j)]^{-1} \quad (j = 1, 2)$$

когда напряженно-деформированное состояние покрытия моделируется уравнениями теории упругости и

$$nL(u) = [n + R_1(u)][1 + R_2(u)]^{-1} \quad (2.5)$$

когда свойства покрытия описываются при помощи прикладных теорий.

В частности, для первой задачи имеем:

$$R_1(u) = \sum_{i=1}^5 a_{1i} u^i, \quad R_2(u) = \sum_{i=2}^4 b_{1i} u^i \quad (2.6)$$

$$a_{11} = \frac{1}{2}, \quad a_{12} = \frac{1}{5}n, \quad a_{13} = \frac{1}{10}, \quad a_{14} = \frac{16}{525}n$$

$$a_{15} = \frac{27}{5600}, \quad b_{12} = \frac{1}{5}, \quad b_{13} = \frac{1}{6}n, \quad b_{14} = \frac{1}{n}a_{14}$$

$$R_1(u) = a_{22}u^2 + a_{24}u^4, \quad R_2(u) = \sum_{i=2}^4 b_{2i}u^i \quad (2.7)$$

$$a_{22} = \frac{n}{60}(17 - 10\varepsilon_1), \quad a_{24} = \frac{11}{8400}n, \quad b_{22} = \frac{1}{n}a_{22}, \quad b_{23} = b_{13}, \quad b_{24} = \frac{1}{n}a_{24}$$

$$R_1(u) = a_{32}u^2, \quad R_2(u) = b_{32}u^2 + b_{33}u^3 \quad (2.8)$$

$$a_{32} = a_{22}, \quad b_{32} = b_{22}, \quad b_{33} = b_{13}$$

$$R_1(u) = 0, \quad R_2(u) = b_{43}u^3, \quad b_{43} = b_{13} \quad (2.9)$$

$$R_1(u) = a_{51}u, \quad R_2(u) = 0, \quad a_{51} = a_{11} \quad (2.10)$$

в случае уравнений (1.7), (1.10), теорий типа Рейсснера–Тимошенко, Кирхгофа–Лява и основания Фусса–Винклера соответственно.

Для второй задачи найдем:

$$R_1(u) = \sum_{i=1}^5 c_{1i} u^i, \quad R_2(u) = \sum_{i=1}^4 d_{1i} u^i \quad (2.11)$$

$$c_{11} = 2(n^2 - \mu^2 + \mu), \quad c_{12} = \frac{28}{15}n, \quad c_{13} = \frac{1}{5}c_{11} + \frac{1}{12}(7 - 6\mu)$$

$$c_{14} = \frac{781}{2100}n, \quad c_{15} = -\frac{1}{4200}(94n^2 + 256\mu^2 - 186\mu - 157)$$

$$d_{11} = 2n, \quad d_{12} = 2\left(\frac{14}{15} - \mu\right), \quad d_{13} = \frac{16}{15}n, \quad d_{14} = \frac{1}{6}c_{11} + \frac{1}{525}(64 - 35\mu)$$

$$R_1(u) = \sum_{i=1}^4 c_{2i}u^i, \quad R_2(u) = \sum_{i=1}^4 d_{2i}u^i \quad (2.12)$$

$$c_{21} = n[2n - \varepsilon_2(1 - 2\mu)], \quad c_{22} = \frac{n}{20}(10\varepsilon_1 - 1), \quad c_{23} = \frac{1}{n}a_{22}c_{21}$$

$$c_{24} = S_{21}(n), \quad d_{21} = d_{11}, \quad d_{22} = n\varepsilon_2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{9}{20}, \quad d_{23} = \frac{n}{15}(11 - 5\varepsilon_1), \quad d_{24} = S_{22}(n)$$

$$R_1(u) = \sum_{i=1}^4 c_{3i}u^i, \quad R_2(u) = \sum_{i=1}^4 d_{3i}u^i \quad (2.13)$$

$$c_{31} = c_{21}, \quad c_{32} = \frac{n}{30}(10\varepsilon_1 + 1), \quad c_{33} = c_{23}, \quad c_{34} = -\frac{n}{120}(1 - 2\varepsilon_1)$$

$$d_{31} = d_{21}, \quad d_{32} = \frac{1}{15}(15n\varepsilon_2 - 10\varepsilon_1 + 8), \quad d_{33} = d_{23}, \quad d_{34} = S_{32}(n)$$

$$R_1(u) = \sum_{i=1}^4 c_{4i}u^i, \quad R_2(u) = \sum_{i=1}^4 d_{4i}u^i \quad (2.14)$$

$$c_{41} = c_{21}, \quad c_{42} = \frac{n}{4}(2\varepsilon_1 - 1), \quad c_{43} = 0, \quad c_{44} = 10nc_{34}$$

$$d_{41} = d_{21}, \quad d_{42} = \frac{1}{4}(4n\varepsilon_2 - 2\varepsilon_1 + 1), \quad d_{43} = \frac{n}{6}, \quad d_{44} = \frac{n^2}{3}$$

$$R_1(u) = a_{51}u, \quad R_2(u) = d_{51}u, \quad c_{51} = c_{21}, \quad d_{51} = d_{21} \quad (2.15)$$

$$R_1(u) = c_{61}u, \quad R_2(u) = 0, \quad c_{61} = c_{11} \quad (2.16)$$

когда свойства покрытия задаются уравнениями (1.5)–(1.7), (1.8)–(1.10), (1.11<sub>1,2</sub>) и теории типа Рейсснера–Тимошенко, (1.11<sub>1,2</sub>) и теории типа Кирхгофа–Лява, (1.11) и (1.12), (1.14). Здесь  $S_{kj}(n)$  – полиномы степени  $j$ , вид которых ради краткости опущен.

Для замыкания постановок исследуемых задач о вдавливании штампа в двухслойное основание при фиксированной области  $\Omega$  к интегральному уравнению (2.1), (2.2) необходимо добавить условия статики

$$P = \theta_2 \iint_{\Omega} q(x, y) dx dy, \quad \{M_x, M_y\} = \theta_2 \iint_{\Omega} \{y, x\} q(x, y) dx dy \quad (2.17)$$

служащие для установления связи между силовыми  $P, M_x, M_y$  и геометрическими  $\delta, \alpha_x, \alpha_y$  факторами.

Остановимся теперь на асимптотическом анализе рассматриваемых задач, считая

$$n = O(\lambda^k) \quad (\lambda \rightarrow 0) \quad (2.18)$$

где при  $k > 0$  жесткость упругой подложки больше жесткости покрытия, а при  $k < 0$  наоборот, жесткость полупространства меньше жесткости армирующего слоя. Для этого найдем разность между функциями (2.3), (2.4) и соответствующими выражениями (2.5)–(2.16), внесем туда соотношение (2.18) и установим порядок по  $\lambda \rightarrow 0$  полученного результата.

Исследуем вначале первую задачу и предположим, что  $k \geq 0$ . Отбрасывая члены  $O(\lambda^5)$  и выше, придем к совпадению формул (2.3) и (2.5), (2.6). При  $0 \leq k < 1$  с точностью до слагаемых порядка  $\lambda^{3+2k}$  и при  $k \geq 1$  с точностью до членов  $O(\lambda^5)$

установим близость соотношений (2.3) и (2.5), (2.10). Заметим, что при  $k \geq 3$  в инженерных расчетах первым слагаемым в (2.5), (2.10) с точностью до  $O(\lambda^3)$  обычно пренебрегают [7] и рассматривают покрытие как тонкий винклеровский слой, лежащий на жестком основании.

Пусть теперь  $-3 \leq k < 0$ . Тогда, опуская члены  $O(\lambda^{5+k})$  и выше, получим равенство соотношений (2.3) и (2.5), (2.6). В то же время для  $-2 \leq k < 0$  пренебрегая членами  $O(\lambda^{1-k})$ , а для  $-3 \leq k < -2$  — величинами порядка  $\lambda^{5+k}$ , имеем совпадение функции (2.3) с одной из формул (2.5), (2.7)–(2.9). При  $k < -3$  с точностью до слагаемых  $O(\lambda^{-1-k})$  получим равенство между функцией (2.3) и одной из функций вида (2.5), (2.6)–(2.9).

Перейдем далее ко второй задаче и будем считать параметр  $k \geq 0$ . Отбрасывая члены порядка  $\lambda^3$  и выше заключаем, что формулы (2.4) и (2.5), (2.11) совпадают между собой. Наряду с этим при  $0 < k < 2$  с точностью до  $O(\lambda^{1+k})$  и при  $k \geq 2$  с точностью до членов порядка  $\lambda^3$  получим равенство соотношений (2.4) и (2.5), (2.16). При  $k \geq 3$ , как и выше, с точностью до  $O(\lambda^3)$  в инженерных вычислениях [11, 12] подложку считают жесткой, а покрытие моделируют набором винклеровских пружин.

Предположим теперь, что  $k < 0$ . Для этого варианта имеем совпадение формул (2.4) и (2.5), (2.11) вплоть до слагаемых порядка  $\lambda^3$ , и совпадение равенства (2.4) и одного из соотношений (2.5), (2.12)–(2.15) с точностью до членов  $O(\lambda)$ .

Таким образом, на основании проведенного асимптотического анализа можно сделать следующие выводы:

1) с достаточно высокой степенью точности уравнения (1.5)–(1.7) применимы во всем диапазоне изменения основных геометрических и физических параметров рассматриваемых задач;

2) деформационные свойства "мягкого" покрытия хорошо согласуются с гипотезой Фусса–Винклера;

3) в случае "жесткого" покрытия и его слабой адгезии с подложкой точность уравнений (1.10) и их модификаций повышается с ростом параметра  $n$ , совпадая с точностью уравнений (1.7) при  $n \approx O(\lambda^{-2})$ ; увеличение физического параметра  $n$  от  $n \approx O(\lambda^{-2})$  по  $n \approx O(\lambda^{-3})$  приводит к небольшой потере точности уравнений всех теорий, рассмотренных в разд. 1; и наконец, дальнейший рост относительной жесткости покрытия  $n$  сопровождается увеличением точности всех уравнений прикладных теорий деформирования упругих пластин;

4) для "жесткого" покрытия, сцепленного с основанием, использование уравнений (1.8)–(1.10) и их модификаций приводит к точности, даваемой моделью накладки Мелана (1.11), поэтому для этого варианта целесообразно использовать либо уравнения (1.5)–(1.7), либо соотношения (1.11).

3. Изучим структуру решения интегрального уравнения (2.1), (2.2), которая существенно зависит от поведения символа  $K(u)$  его ядра  $k(s, t)$  на действительной оси (ниже в формуле (2.2<sub>2</sub>) считаем [4]  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = (-\infty, \infty)$ ). Для задач, рассмотренных в разд. 2,  $K(u)$  — положительная, четная и непрерывная (кроме точки  $u = 0$ ) при  $|u| < \infty$  функция, имеющая следующую асимптотику:

$$K(u) = D_m |u|^{-1} [1 + O(|u|^{-\alpha} e^{-\beta|u|})] \quad (|u| \rightarrow \infty), \quad K(u) \sim |u|^{-1} \quad (u \rightarrow 0) \quad (3.1)$$

где  $D_m = \text{const}$  ( $m = 0, 1, 2, 4$ ), а  $\alpha = 0, \beta = 2$  либо  $\alpha \geq 1, \beta = 0$ .

Введем необходимые определения и обозначения [13–15]. Пусть  $C^k(\Omega)$  — множество  $k$  раз непрерывно дифференцируемых в области  $\bar{\Omega}$  функций;  $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ ;  $C_0^\infty$  — класс бесконечно дифференцируемых финитных функций в двумерном евклидовом пространстве;  $C_{1/2}^*(\Omega)$  — пространство функций с нормой

$$\|f\|_{C_{1/2}^*} = \max |f(x, y) \rho^{1/2}| \quad ((x, y) \in \Omega)$$

где  $\rho$  — расстояние до ближайшей граничной точки области  $\bar{\Omega}$ ;  $L_p(\Omega)$  ( $p \geq 1$ ) —

пространство интегрируемых в  $\Omega$  со степенью  $p$  функций;  $\dot{H}_\mu(\Omega)$ ,  $H_\mu(\Omega)$  – пространства обобщенных функций Соболева–Слободецкого, причем  $H_0(\Omega) = L_2(\Omega)$ .

**Теорема 1** [13]. Пусть  $g(x, y) \in C^2(\Omega)$  в области  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega = \Gamma: F(X, Y) = 0$  ( $(X, Y) \in \Gamma$ ), имеющей непрерывно дифференцируемую кривизну. Тогда интегральное уравнение (2.1), (2.2), (3.1) ( $m = 1$ ) однозначно разрешимо в пространстве  $C_{1/2}^*(\Omega)$  и справедливо соотношение корректности  $\|q\|_{C_{1/2}^*} \leq M \|g\|_{C^2}$  ( $M = \text{const}$ ).

Поскольку имеет место равенство  $\rho = |F(x, y)| [F_{,x}^2(X, Y) + F_{,y}^2(X, Y)]^{-1/2}$ , то корректная разрешимость в классе  $C_{1/2}^*(\Omega)$  допускает наличие особенности у функции  $q(x, y)$  вида  $|F(x, y)|^{-1/2}$  при  $(x, y) \rightarrow (X, Y)$ . Отсюда получим структуру решения исследуемого уравнения

$$q(x, y) = \omega(x, y) |F(x, y)|^{-1/2} \quad (3.2)$$

где  $\omega(x, y) \in C(\Omega)$  – непрерывная в замкнутой области  $\bar{\Omega}$  функция, т.е.  $q(x, y) \in L_p(\Omega)$  ( $1 < p < 2$ ).

**Теорема 2** [14]. Интегральное уравнение (2.1), (2.2), (3.1) ( $m = 0$ ) однозначно разрешимо в  $C(\Omega)$  при любой функции  $g(x, y) \in C(\Omega)$ .

**Теорема 3** [16]. Если  $q(x, y) \in H_\alpha(\Omega)$  ( $\alpha \geq \beta = m/2$ ,  $m = 2, 4$ ) в области  $\Omega$  с гладкой границей  $\partial\Omega = \Gamma$  ( $(X, Y) \in \Gamma$ ), то решение интегрального уравнения (2.1), (2.2), (3.1) ( $m = 2, 4$ ) существует и единственно в классе  $\dot{H}_{-\beta}(\Omega)$ , причем функция  $q(x, y)$  представима в форме

$$q(x, y) = \psi(x, y) + \Psi(x, y), \quad \psi(x, y) \in H_{\alpha-m}(\Omega) \quad (3.3)$$

Заметим, что однозначная разрешимость интегральных уравнений (2.1), (2.2), (3.1) при  $m = 2$  или  $m = 4$  соответственно в пространствах  $\dot{H}_{-1}(\Omega)$  и  $\dot{H}_{-2}(\Omega)$  означает следующее. Пусть  $j = (j_1, j_2)$  – мультииндекс,  $|j| = j_1 + j_2$ . Обозначим  $\{Q(X, Y)\delta(\Gamma)\}^{(j)}$  – распределение с носителем в  $\Gamma$ , которое действует на пробную функцию  $f \in C_0^\infty$  по формуле

$$(\{Q(x, y)\delta(\Gamma)\}^{(j)}, f) = (-1)^{|j|} \int_{\Gamma} Q(X, Y) f^{(j)}(X, Y) ds$$

где  $Q(X, Y)$  – гладкая функция на  $\Gamma$ . Тогда в согласии с (3.3) запишем

$$\Psi(x, y) = \sum_{|i|=0}^{\beta-1} (-1)^{|i|} \{Q_i(X, Y)\delta(\Gamma)\}^{(i)} \quad (3.4)$$

Отсюда заключаем, что увеличение гладкости функции  $g(x, y)$  в условии теоремы 3 не нарушает структуру (3.3), (3.4), однако может увеличивать степень гладкости добавки  $\psi(x, y)$  в (3.3). Например, если  $g(x, y) \in H_m(\Omega)$ , то  $\psi(x, y) \in L_2(\Omega)$ .

Таким образом, из теоремы 1 следует, что контактное давление  $q(x, y)$  имеет вид (3.2), т.е. содержит особенность типа  $|F(x, y)|^{-1/2}$ , когда свойства покрытия моделируются: 1) уравнениями теории упругости; 2) уравнениями (1.10) в случае слабой адгезии покрытия с основанием; 3) соотношениями (1.8)–(1.10), или уравнениями накладки Мелана (1.11), или первыми двумя формулами (1.11) в сочетании с теориями типа Рейсснера–Тимошенко либо Кирхгофа–Лява, если покрытие жестко сцеплено с подложкой.

Согласно теореме 2 функция  $q(x, y)$  имеет конечные значения на границе области контакта, если свойства покрытия описываются уравнениями (1.5)–(1.7) либо моделируются набором винклеровских пружин.

По теореме 3 контактное давление  $q(x, y)$  складывается из распределенной нагрузки и сосредоточенных сил или сил и моментов, действующих на границе области контакта, когда свойства покрытия описываются соответственно уравнениями Рейсснера–Тимошенко и Кирхгофа–Лява и оно слабо сцеплено с основанием.

Для решения интегрального уравнения (2.1), (2.2), (3.1) можно воспользоваться модификацией вариационно-разностного метода, схема которого и обоснование приведены в [13]. Здесь только следует отметить, что для первой задачи в случае покрытия, моделируемого пластинкой типа Кирхгофа–Лява или Рейсснера–Тимошенко, необходимо сформулировать условия для определения  $Q_0(X, Y)$  и  $Q_1(X, Y)$  [16].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (95-IN-RU-492).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г.Я., Толкачев В.М. Проблема контакта жестких тел с тонкостенными элементами // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 192–206.
2. Васильев В.В. К дискуссии по классической теории пластин // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 4. С. 140–150.
3. Коваленко Е.В. Об уточненных уравнениях деформирования упругих пластин // Прикл. механика. 1989. Т. 25. № 10. С. 111–116.
4. Петрашень Г.И. К теории колебаний тонких пластин // Учен. записки ЛГУ. Сер. мат. наук. 1951. № 149. Вып. 24. С. 172–249.
5. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
6. Коваленко Е.В. Контактные задачи для тел с покрытиями (постановки и методы решения) // Изв. АН АрмССР. Механика. 1988. Т. 41. № 1. С. 40–50.
7. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
8. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 415 с.
9. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491 с.
10. Петришин В.И., Приварников А.К., Шевляков Ю.А. К решению задач для многослойных оснований // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 2. С. 138–143.
11. Александров В.М., Бабешко В.А., Белоконов А.В., Ворович И.И., Устинов Ю.А. Контактная задача для кольцевого слоя малой толщины // Инж. журн. МТТ. 1966. № 1. С. 135–139.
12. Коваленко Е.В. К расчету изнашивания сопряжения вал – втулка // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 6. С. 66–72.
13. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
14. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
15. Эскин Г.И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 232 с.
16. Ramm A.J. Random Fields Estimation Theory. N.Y.: Longman/Wiley, 1990. 274 p. = Рамм А. Теория оценивания случайных полей. М.: Мир, 1996. 352 с.