УДК 539.3

© 1999 г. И.А. Солдатенков

О ВДАВЛИВАНИИ СО СЦЕПЛЕНИЕМ ШТАМПА В УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ ПРИ НАЛИЧИИ КАСАТЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Изложенный ранее [1] подход к решению контактной задачи со сцеплением обобщается на случай штампа произвольной формы при действии касательной нагрузки. Контактная задача со сцеплением для симметричного штампа при возрастающей в результате нагружения области контакта рассматривалась [2–4] на основе инкрементального подхода. Автором [1] было дано решение этой задачи, основанное на обращении по методу [5] системы сингулярных интегральных уравнений для контактных напряжений и анализе дополнительных условий, обеспечивающих корректность подобного обращения.

1. Постановка задачи. Пусть жесткий выпуклый штамп вдавливается в упругую полуплоскость (фигура) под действием монотонно возрастающей нормальной нагрузки P_2 и касательной нагрузки P_1, связанной с P_2 некоторой зависимостью

$$P_1 = N(P_2), \quad P_2 > 0 \tag{1.1}$$

При вдавливании штампа имеет место сцепление контактирующих тел, т.е. точки полуплоскости, пришедшие в контакт со штампом, больше не испытывают перемещений относительно него.

Систему координат xy свяжем со штампом, совместив ее начало с точкой первоначального касания штампа с полуплоскостью (фигура).

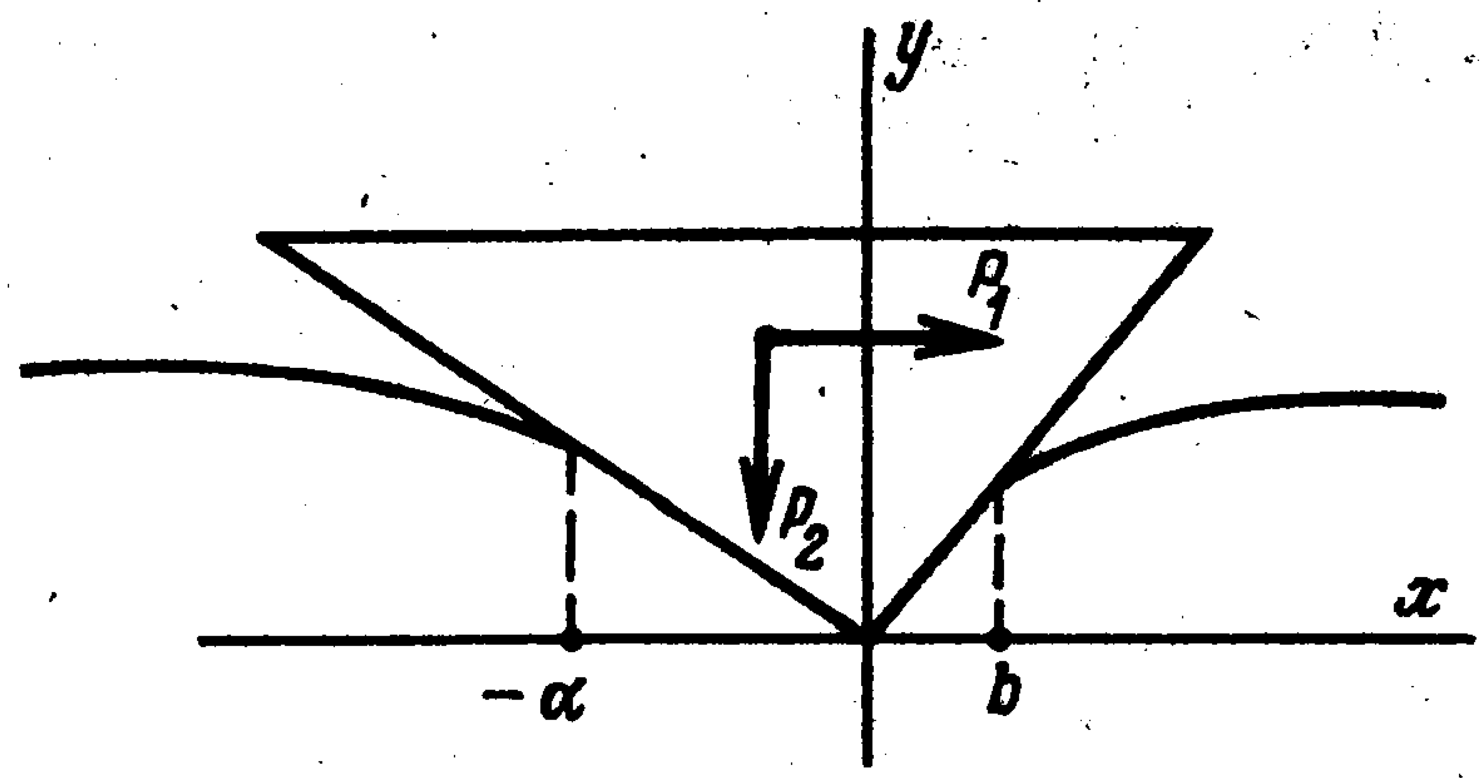
Будем считать, что при вдавливании штампа размеры $a > 0$, $b > 0$ области контакта монотонно возрастают. Далее величиной a (наряду с величиной P_2) будем характеризовать степень внедрения штампа, при этом, в частности, размер b будет представлять собой некоторую функцию a.

Задача состоит в нахождении контактных напряжений $q_1 = \tau_{xy}|_{y=0}$, $q_2 = -\sigma_y|_{y=0}$ при произвольном a, а также зависимости $b(a)$. Граничные условия, соответствующие рассматриваемой задаче имеют вид

$$\begin{gathered} u(x,a) = \varphi(x) + C_x, \quad v(x,a) = g(x + \mu\varphi(x)) + C_y, \quad x \in [-a,b] \\ q_1(x,a) = q_2(x,a) = 0, \quad x \overline{\in} [-a,b] \end{gathered} \tag{1.2}$$

где u, v – касательное и нормальное перемещения границы полуплоскости в системе x, y; $\varphi(x)$ – некоторая функция, подлежащая определению; $y = g(x)$ – уравнение формы штампа, $\mu = 0, 1$, постоянные C_x, C_y – аналоги жесткого перемещения штампа по осям x и y, конкретные значения которых не влияют на решение контактной задачи и, к тому же, в выбранной системе координат их можно положить равными нулю.

Наличие слагаемого $\varphi(x)$ в аргументе функции g в (1.2) при $\mu = 1$ соответствует



уточненной постановке контактной задачи. А именно учитывается, что точка x границы полуплоскости по мере внедрения штампа касательно перемещения относительно него и поэтому приходит в контакт с точкой штампа имеющей уже координату $x + \varphi(x)$ [6]. При отсутствии $\varphi(x)$ во втором равенстве граничных условий (1.2) ($\mu = 0$) последние будут иметь классический вид [4].

Наложим следующие ограничения на форму штампа и неизвестную функцию $\varphi(x)$. А именно будем рассматривать точку $x = 0$ как узел и полагать, что

$$G(x) \equiv g'(x) \in H_0, \quad \varphi'(x) \in H_0 \tag{1.3}$$

Напомним, что запись $f(x) \in H_0$ при узле в точке $x = 0$ означает [5], что для произвольных положительных d_1, d_2 функция $f(x)$ принадлежит классу Гёльдера на $[-d_1, 0]$ и $[0, d_2]$ при условии, что для первого отрезка в качестве $f(0)$ берется предел $f(x)$ при $x \to 0 - 0$, а для второго отрезка – предел $f(0)$ при $x \to 0 + 0$. Здесь и далее штрих означает производную функции по первому аргументу.

Отметим некоторые дополнительные свойства функции $\varphi(x)$, значение которой при $x \in [-a, b]$ совпадает с касательным перемещением точки x области контакта. Прежде всего в силу выбора системы координат xy и условия сцепления контактирующих тел имеем

$$\varphi(0) = 0 \tag{1.4}$$

Далее если $x_1 < x_2$, то при деформации полуплоскости точка ее границы с координатой x_1 всегда располагается левее точки x_2. Последнее означает, что сумма $x + \varphi(x)$ должна представлять собой строго возрастающую функцию x, что обеспечивается неравенством

$$1 + \varphi'(x) > 0 \tag{1.5}$$

Относительно функций $q_1(x, a)$ и $q_2(x, a)$ будем предполагать, что при каждом a они ограничены на концах $-a$, b области контакта и принадлежат классу H^* на $[-a, b]$, т.е. в принятых ранее обозначениях [5] будем считать, что

$$q_k(x, a) \in h_2[-a, b], \quad k = 1, 2 \tag{1.6}$$

Отметим, что соотношение (1.6) допускает наличие у функций $q_{1,2}(x, a)$ интегрируемых особенностей в точке $x = 0$.

Связь граничных напряжений с перемещениями u и v в рамках линейной теории упругости задается двумя равенствами [7]

$$mu'(x,a) = -\pi\chi q_2(x,a) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_1(\xi,a)}{\xi - x} d\xi, \quad mv'(x,a) = -\pi\chi q_1(x,a) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_2(\xi,a)}{\xi - x} d\xi \tag{1.7}$$

$$m = \pi E[2(1-\nu^2)]^{-1}, \quad \chi = (1-2\nu)[2(1-\nu)]^{-1}$$

E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, $\nu \in [0, \frac{1}{2})$.

Положим в равенствах (1.7) $x \in [-a, b]$ и заменим в них функции $u(x, a)$, $v(x, a)$ правыми частями соответствующих граничных условий (1.2). После этого умножим первое равенство (1.7) на мнимую единицу и сложим его со вторым. В результате получим уравнение

$$-\pi\chi q(x,a)+i\int_{-a}^{b}\frac{q(\xi,a)}{\xi-x}d\xi=f(x) \tag{1.8}$$

$$q(x,a)=q_1(x,a)+iq_2(x,a), \quad f(x)=\psi_2(x)+i\psi_1(x)$$
$$\psi_1(x)=m\varphi'(x), \quad \psi_2(x)=mG(x+\mu\varphi(x))(1+\mu\varphi'(x)) \tag{1.9}$$

Из определений функций $f(x)$, $q(x, a)$ и соотношений (1.3), (1.6) непосредственно следует, что $f(x) \in H_0$, $q(x, a) \in h_2[-a, b]$.

2. Обращение уравнений для граничных напряжений. Основные соотношения. Согласно полученным ранее результатам [5] решение $q(x, a)$ уравнения (1.8) из класса $h_2[-a, b]$ при заданных a, b и $f(x) \in H_0$ существует тогда и только тогда, когда

$$\int_{-a}^{b}\frac{f(\xi)d\xi}{Z_1(\xi,a)}=0 \tag{2.1}$$

$$Z_1(x,a)=\sqrt{(a+x)(b-x)}\left(\frac{b-x}{a+x}\right)^{i\tau/2}, \quad \tau=\frac{1}{\pi}\ln\frac{1+\chi}{1-\chi}\equiv\frac{1}{\pi}\ln(3-4\nu)$$

При выполнении условия (2.1) имеет место следующая формула обращения уравнения (1.8):

$$q(x,a)=\chi\theta f(x)-\frac{\theta}{\pi i}Z_1(x,a)\int_{-a}^{b}\frac{f(\xi)d\xi}{Z_1(\xi,a)(\xi-x)}, \quad x\in[-a,b]$$
$$\theta=[\pi(1-\chi^2)]^{-1} \tag{2.2}$$

Отметим, что предельные значения функции $q(x, a)$ из (2.2) при $x \to -a + 0$ и $x \to b - 0$ равны нулю. Это непосредственно следует из известной теоремы о поведении интеграла типа Коши, присутствующего в (2.2), вблизи концов линии интегрирования [5].

Преобразуем равенства (2.1) и (2.2). Подставим в (2.1) вместо функции $f(x)$ ее выражение через функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$, которые в свою очередь связаны с функциями $\varphi(x)$ и $g(x)$ равенствами (1.9). В результате, разделяя действительную и мнимую части в полученном выражении, придем к следующим двум равенствам:

$$\int_{-a}^{b}\left[\varphi'(x)\begin{Bmatrix}-\sin\alpha(x,a)\\ \cos\alpha(x,a)\end{Bmatrix}+G(x+\mu\varphi(x))(1+\mu\varphi'(x))\begin{Bmatrix}\cos\alpha(x,a)\\ \sin\alpha(x,a)\end{Bmatrix}\right]\frac{dx}{\sqrt{(a+x)(b-x)}}=0 \tag{2.3}$$

$$\alpha(x,a)=\frac{\tau}{2}\ln\left|\frac{a+x}{b-x}\right|$$

Выполняя аналогичную подстановку в (2.2), будем иметь

$$\begin{Bmatrix}q_1(x,a)\\ q_2(x,a)\end{Bmatrix}=\theta\left[\chi\begin{Bmatrix}\psi_2(x)\\ \psi_1(x)\end{Bmatrix}-\frac{1}{\pi}\sqrt{(a+x)(b-x)}\left(i_1(x,a)\begin{Bmatrix}\sin\alpha(x,a)\\ \cos\alpha(x,a)\end{Bmatrix}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+j_1(x,a)\begin{Bmatrix}\cos\alpha(x,a)\\ -\sin\alpha(x,a)\end{Bmatrix}+i_2(x,a)\begin{Bmatrix}\cos\alpha(x,a)\\ -\sin\alpha(x,a)\end{Bmatrix}-j_2(x,a)\begin{Bmatrix}\sin\alpha(x,a)\\ \cos\alpha(x,a)\end{Bmatrix}\right)\right] \tag{2.4}$$

где

$$\begin{Bmatrix} i_k(x,a) \\ j_k(x,a) \end{Bmatrix} = \int_{-a}^{b} \begin{Bmatrix} \sin\alpha(\xi,a) \\ \cos\alpha(\xi,a) \end{Bmatrix} \frac{\psi_k(\xi)d\xi}{\sqrt{(a+\xi)(b-\xi)(\xi-x)}}, \quad x \in [-a,b]$$

Вернемся теперь к равенствам (2.3) и заметим, что фигурирующая в них величина b – некоторая функция от a, а сами эти равенства должны выполняться при любых a. Поэтому равенства (2.3) могут рассматриваться как нелинейные интегральные уравнения типа Вольтерры первого рода относительно неизвестных функций $\varphi(x)$ и $b(a)$.

Еще одно уравнение для определения $\varphi(x)$ и $b(a)$ дает зависимость (1.1). Действительно, из условия равновесия штампа имеем

$$P_1 = \int_{-a}^{b} [q_1(x,a)\cos\omega(x) + q_2(x,a)\sin\omega(x)]dx$$

$$P_2 = \int_{-a}^{b} [-q_1(x,a)\sin\omega(x) + q_2(x,a)\cos\omega(x)]dx \tag{2.5}$$

где $\omega(x) = \operatorname{arctg} g'(x)$. Подставляя (2.5) в (1.1) и учитывая выражения (2.4) для $q_{1,2}(x, a)$, придем к дополнительному уравнению относительно $\varphi(x)$ и $b(a)$.

Таким образом, три равенства: два равенства (2.3) и равенство (1.1) совместно с выражениями (2.4) и (2.5) образуют систему уравнений относительно неизвестных функций $\varphi(x)$ и $b(a)$, после нахождения которых выражения (2.4) определяют напряжения $q_{1,2}(x, a)$, тем самым решая поставленную задачу.

Отметим, что второе из равенств (2.5) при известных напряжениях $q_{1,2}(x, a)$ определяет величину нормальной нагрузки P_2 как функцию размера a области контакта. Как указывалось выше, при вдавливании штампа положительная нагрузка P_2 монотонно возрастает, поэтому имеем неравенства

$$P_2(a) > 0, \quad P_2'(a) \geqslant 0 \tag{2.6}$$

которые, наряду с (1.4) и (1.5) накладывают дополнительные ограничения на функции $\psi(x)$ и $b(a)$.

Ниже рассматривается частный случай клиновидного штампа и линейной зависимости (1.1), для которого неизвестная функция $\varphi(x)$ может быть найдена в классе кусочно-линейных функций при линейной зависимости $b(a)$.

3. Клиновидный штамп (общий случай). Пусть

$$g(x) = \begin{cases} g_1^- x, & x < 0 \\ g_1^+ x, & x \geqslant 0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} g_1^\pm = \text{const} \\ g_1^- < 0, \; g_1^+ > 0 \end{matrix} \tag{3.1}$$

В дальнейшем положим $|g_1^\pm| < 1$, что является необходимым для правомочности использования уравнений (1.7) линейной теории упругости. Неизвестную функцию $\varphi(x)$ будем искать в классе кусочно-линейных функций, а именно, учитывая равенство (1.4) положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1^- x, & x < 0 \\ \varphi_1^+ x, & x \geqslant 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Наконец, будем считать зависимость (1.1) линейной

$$P_1 = nP_2, \quad n = \text{const} \tag{3.3}$$

Нетрудно установить, что выражения (3.1) и (3.2) для функций $g(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям (1.3). Подставим эти выражения в равенстве (2.3) и (3.3), причем в последнем равенстве величины $P_{1,2}$ определим через $\varphi(x)$ согласно цепочке равенств: (2.5), (2.4), (1.9). В результате, после несложных выкладок придем к системе трех уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}\varphi_1^- + \alpha_{12}\varphi_1^+ = \beta_1 \\ \alpha_{21}\varphi_1^- + \alpha_{22}\varphi_1^+ = \beta_2 \\ \alpha_{31}\varphi_1^- + \alpha_{32}\varphi_1^+ = \beta_3 \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\alpha_{11} = (\gamma_0 - \Lambda_1) + \mu g_1^-(\delta_0 - \Lambda_2), \quad \alpha_{12} = -(\gamma_0 - \Lambda_1) + \mu g_1^+(\delta_0 + \Lambda_2)$$

$$\alpha_{21} = (\delta_0 - \Lambda_2) - \mu g_1^-(\gamma_0 - \Lambda_1), \quad \alpha_{22} = (\delta_0 + \Lambda_2) + \mu g_1^+(\gamma_0 - \Lambda_1)$$

$$\alpha_{31} = B_1^- - nB_2^-, \quad \alpha_{32} = B_1^+ - nB_2^+$$

$$\beta_1 = -g_1^-(\delta_0 - \Lambda_2) - g_1^+(\delta_0 + \Lambda_2), \quad \beta_2 = -(g_1^+ - g_1^-)(\gamma_0 - \Lambda_1)$$

$$\beta_3 = -C_1 + nC_2$$

$$B_1^\pm = \pm(A_1^- + \mu g_1^\pm A_2^-)\sin\omega^- \pm (A_1^+ + \mu g_1^\pm A_2^+)\sin\omega^+ \mp$$

$$\mp(A_2^- - \mu g_1^\pm A_1^-)\cos\omega^- \mp (A_2^+ - \mu g_1^\pm A_1^+)\cos\omega^+$$

$$B_2^\pm = \pm(A_2^- - \mu g_1^\pm A_1^-)\sin\omega^- \pm (A_2^+ - \mu g_1^\pm A_1^+)\sin\omega^+ \pm$$

$$\pm(A_1^- + \mu g_1^\pm A_2^-)\cos\omega^- \pm (A_1^+ + \mu g_1^\pm A_2^+)\cos\omega^+$$

$$C_1 = (g_1^+ - g_1^-)(A_2^- \sin\omega^- + A_2^+ \sin\omega^+ + A_1^- \cos\omega^- + A_1^+ \cos\omega^+)$$

$$C_2 = (g_1^+ - g_1^-)(-A_1^- \sin\omega^- - A_1^+ \sin\omega^+ + A_2^- \cos\omega^- + A_2^+ \cos\omega^+)$$

$$A_1^\pm = \pm[(\pm\delta_0 + \Lambda_2)\sin\tau\rho + (\gamma_0 - \Lambda_1)\cos\tau\rho]/\operatorname{ch}\rho$$

$$A_2^\pm = [\mp(\gamma_0 - \Lambda_1)\sin\tau\rho + (\delta_0 \pm \Lambda_2)\cos\tau\rho]/\operatorname{ch}\rho$$

$$\begin{Bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Lambda_1(\rho) \\ \Lambda_2(\rho) \end{Bmatrix} \equiv \int_0^\delta \begin{Bmatrix} \sin\tau X \\ \cos\tau X \end{Bmatrix} \frac{dX}{\operatorname{ch} X}, \quad \rho = \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$$

$$\gamma_0 = \Lambda_1(\infty), \quad \delta_0 = \Lambda_2(\infty), \quad \omega^\pm = \operatorname{arctg}_1^\pm$$

Отметим сразу следующие свойства введенных величин, которые могут быть установлены путем несложного анализа при $\nu \in [0, 1/2)$:

$$0 < \gamma_0 < \delta_0; \;\; \Lambda_{1,2}(\rho) \neq 0 \;\; \text{при} \;\; \rho \neq 0 \tag{3.5}$$

Равенства (3.4) представляют собой линейные алгебраические уравнения относительно неизвестных параметров φ_1^-, φ_1^+ функции $\varphi(x)$. Коэффициенты уравнений (3.4) определяются постоянными $g_1^\pm, n, \tau$ и μ, а также неизвестной величины ρ, описывающей степень асимметрии области контакта. Учитывая данное обстоятельство, потребуем линейности функции $b(a)$, что обеспечит постоянство величины ρ при увеличении α, а следовательно (в силу уравнений (3.4)), и заложенное в (3.2) постоянство параметров $\varphi_1^\pm$. Таким образом, будем считать, что

$$b(a) = e^{2\rho}a, \quad \rho = \text{const} \tag{3.6}$$

Обозначим через A^* расширенную (3×3) матрицу системы (3.4), которая образуется добавлением столбца свободных членов $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ системы (3.4) к матрице коэффициентов ее левой части. Известно [8], что необходимым условием существования решения $\varphi_1^{\pm}$ системы (3.4) при любом фиксированном ρ является равенство

$$\det A^* = 0 \tag{3.7}$$

Левая часть (3.7) содержит единственную неизвестную величину ρ и поэтому данное условие может рассматриваться как уравнение для ρ. Используя формулу разложения определителя в (3.7) по третьей строке матрицы A^* [8], получим следующее представление для уравнения (3.7):

$$S_1(\rho) - nS_2(\rho) = 0 \tag{3.8}$$

в котором $S_{1,2}(\rho)$ – известные функции, определяемые величинами $g_1^{\pm}$ и μ:

$$S_k(\rho) = C_k d_0 + B_k^- d_1 + B_k^+ d_2 \tag{3.9}$$

$$d_0 = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \tag{3.10}$$

$$d_1 = \alpha_{22}\beta_1 - \alpha_{12}\beta_2, \quad d_2 = \alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{21}\beta_1$$

Найденная из уравнения (3.8) величина ρ посредством равенства (3.6) определяет линейную зависимость $b(a)$. Кроме того, при известном ρ из уравнений (3.4) (одно из которых исключается из рассмотрения, так как в силу (3.7) является следствием остальных [8]) находятся параметры $\varphi^{\pm}$, а следовательно, и функция $\varphi(x)$.

После нахождения $b(a)$ и $\varphi(x)$ напряжения $q_{1,2}(x, a)$ определяются простой подстановкой выражений (3.1), (3.2), (3.6) в (2.4):

$$q_1(x,a) = \theta\{\chi(\psi_2(x) - \psi_2^+) + \frac{1}{\pi}[(\psi_2^+ - \psi_2^-)W_1(t) - (\psi_1^+ - \psi_1^-)W_2(t)]\}$$

$$q_2(x,a) = \theta\{\chi(\psi_1(x) - \psi_1^+) + \frac{1}{\pi}[(\psi_1^+ - \psi_1^-)W_1(t) + (\psi_2^+ - \psi_2^-)W_2(t)]\} \tag{3.11}$$

$$\psi_1^{\pm} = m\varphi_1^{\pm}, \quad \psi_2^{\pm} = mg_1^{\pm}(1 + \mu\varphi_1^{\pm}), \quad t = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x/a}{1 - x/b}$$

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \psi_k^-, & x < 0 \\ \psi_k^+, & x \geqslant 0 \end{cases}; \quad \begin{Bmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \end{Bmatrix} = \int_t^{\infty} \begin{Bmatrix} \sin \tau X \\ \cos \tau X \end{Bmatrix} \frac{dX}{\operatorname{sh} X}$$

Известные напряжения $q_{1,2}(x, a)$ позволяют с помощью второго равенства (2.5) получить зависимость $P_2(a)$:

$$P_2(a) = \frac{m_0}{2}(1 + e^{2\rho})(B_2^-\varphi_1^- + B_2^+\varphi_1^+ + C_2)a, \quad m_0 = \frac{m}{\pi^2(1 - \chi^2)} \tag{3.12}$$

Наконец, необходимо проверить, удовлетворяют ли полученные выражения для $\varphi(x)$ и $P_2(a)$ неравенствам (1.5) и (2.6), которые в силу выражений (3.2) и (3.12) имеют вид

$$1 + \varphi_1^{\pm} > 0, \quad B_2^-\varphi_1^- + B_2^+\varphi_1^+ + C_2 > 0 \tag{3.13}$$

Если хотя бы одно из неравенств (3.13) нарушается, то выражения (3.2), (3.6), (3.11) при найденных ρ и $\varphi_1^{\pm}$ не дают решение задачи о вдавливании в полуплоскость клиновидного штампа со сцеплением. Подобная ситуация означает отсутствие решения рассматриваемой задачи в классе кусочно-линейных функций для касательного граничного перемещения $\varphi(x)$ при линейной зависимости $b(a)$.

4. Симметричный клиновидный штамп. В случае симметричного клиновидного штампа имеем $g_1^{\pm} = \pm g_1$, $g_1 \in (0,1)$ и для $S_{1,2}(\rho)$ справедливы выражения

$$S_1(\rho) = T\sin(\tau\rho + w(\rho)), \quad S_2(\rho) = T\cos(\tau\rho + w(\rho)) \tag{4.1}$$

$$T = \sqrt{a_*^2 + b_*^2} = \varkappa\{[(D_1 - \Lambda_1)^2 + \Lambda_2^2][(B_0 + g_1\Lambda_1)^2 + g_1^2\Lambda_2^2]\}^{1/2}$$

$$a_* = \varkappa[g_1\Lambda_2^2 + (D_1 - \Lambda_1)(B_0 + g_1\Lambda_1)]$$

$$b_* = \varkappa[(D_1 - \Lambda_1)g_1 - (B_0 + g_1\Lambda_1)]\Lambda_2$$

$$\sin w = b_* / T, \quad \cos w = a_* / T$$

$$B_0 = \delta_0 - g_1\gamma_0, \quad D_1 = \gamma_0 - \mu g_1\delta_0, \quad \varkappa = 8g_1\delta_0\cos\omega / \operatorname{ch}\rho$$

В дальнейшем будет исключаться из рассмотрения случай $D_1 = 0$, который в силу первого соотношения (3.5) имеет место только при $\mu = 1$ и $g_1 = \gamma_0/\delta_0$.

Из праведенного выше выражения для T, в котором $D_1 \neq 0$, $g_1 > 0$ и, согласно (3.5), $\Lambda_2 \neq 0$ при $\rho \neq 0$, непосредственно вытекает, что $T > 0$. Последнее неравенство позволяет на основе (4.1) придать уравнению (3.8) для ρ следующий вид:

$$n = \operatorname{tg}(\tau\rho + w(\rho)) \tag{4.2}$$

Кроме того, можно установить, что для значений ρ, удовлетворяющих равенству (4.2), третье уравнение системы (3.4) равносильно первому и поэтому должно быть исключено из рассмотрения. Оставшиеся первые два уравнения (3.4) дают

$$\varphi_1^- = d_1 / d_0, \quad \varphi_1^+ = d_2 / d_0 \quad \text{при} \quad d_0 \neq 0 \tag{4.3}$$

Таким образом, для симметричного клиновидного штампа после определения величины ρ из уравнения (4.2), параметры $\varphi_1^{\pm}$ функции $\varphi(x)$ могут быть найдены согласно равенствам (4.3), если только $d_0 \neq 0$. Выражения для напряжений $q_{1,2}(x, a)$ непосредственно определяются равенствами (3.11).

Подстановка (4.3) в (3.12) дает с учетом (3.9) следующее выражение для $P_2(a)$:

$$P_2(a) = \tfrac{1}{2} m_0(1 + e^{2\rho})S_2 d_0^{-1} a \tag{4.4}$$

При выполнении (4.2), (4.3), (4.4) неравенствам (3.13) можно придать вид:

$$1 + d_k / d_0 > 0, \quad k = 1,2; \quad S_2 / d_0 > 0 \tag{4.5}$$

В заключение рассмотрим случай малых значений $|\rho|$. С этой целью запишем следующие асимптотики функций $\Lambda_{1,2}(\rho)$:

$$\Lambda_1(\rho) = \tfrac{1}{2}\tau\rho^2 + O(\rho^4), \quad \Lambda_2(\rho) = \rho + O(\rho^3)$$

с помощью которых из (3.10) получим

$$d_0(\rho) = 2D_1D_2 + O(\rho^2), \quad d_{1,2}(\rho) = -2g_1\gamma_0 D_1 \mp 2g_1\delta_0\rho + O(\rho^2) \tag{4.6}$$

$$B = B_0\cos\omega, \quad D_2 = \delta_0 + \mu g_1\gamma_0$$

и представим уравнение (4.2) для ρ в виде

$$n = n_1\rho + O(\rho^3), \quad n_1 = [(g_1\cos\omega + \tau B)D_1 - B](BD_1)^{-1} \tag{4.7}$$

Отметим, что фигурирующие в (4.6) и (4.7) параметры B и D_2 отличны от нуля – это вытекает из неравенств (3.5) и ограничения $g_1 \in (0, 1)$. Кроме того, можно установить, что $n_1 \neq 0$ и получить из (4.7)

$$\rho = n/n_1 + \varphi(n^3) \tag{4.8}$$

Подстановка выражений (4.6), (4.8) в равенства (3.6), (4.3) и (4.4) дает

$$b(a) = (1 + 2n/n_1)a + O(n^2)$$

$$\varphi_1^{\pm} = g_1 D_1^{-1}[-\gamma_0 \pm \delta_0 (D_1 n_1)^{-1} n] + O(n^2) \tag{4.9}$$

$$P_2(a) = 4g_1\delta_0 B D_2^{-1} m_0 (1 + n/n_1)a + O(n^2)$$

Таким образом, при $\rho \to 0$ имеем $n \to 0$ и в качестве решения поставленной задачи – выражения (4.9). Напряжения $q_{1,2}(x, a)$ определяются по найденным $\varphi_1^{\pm}$ из равенств (3.11). Проверка условий (4.5) не составляет труда.

При $n = 0$ выражения (4.9) и соответствующие им выражения (3.11) для контактных напряжений дают решение симметричной задачи со сцеплением для клиновидного штампа, рассмотренной ранее [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Солдатенков И.А.* О вдавливании со сцеплением симметричного штампа в упругую полуплоскость // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 267–273.
2. *Goodman L.E.* Contact stress analysis of normally loaded rough spheres // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1962. V. 29. № 3. P. 515–522; *Гудмэн Л.* Исследование контактных напряжений в нормально нагруженных шероховатых сферических телах // Прикл. механика. Тр. Амер. о-ва инж.-механиков. 1962. Т. 29. № 3. С. 74–82.
3. *Моссаковский В.И.* Сжатие упругих тел в условиях сцепления (осесимметричный случай) // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 418–427.
4. *Моссаковский В.И., Фотиева Н.Н.* Вдавливание симметричного штампа в упругую полуплоскость при наличии сцепления на линии контакта // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 6. С. 67–70.
5. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М.: Наука, 1968. 511 с.
6. *Солдатенков И.А.* Контактная задача для полуплоскости при учете касательного перемещения на контакте // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 4. С. 51–61.
7. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
8. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1974. 320 с.

Москва
e-mail: soldat @ arstel. ru

Поступила в редакцию
17.IV.1997