УДК 539.3

© 1999 г. Д.Д. Захаров

ОСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ТОНКИХ СЛОИСТЫХ ПАКЕТОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С КОНТРАСТНЫМИ НАПРАВЛЕНИЯМИ АНИЗОТРОПИИ В УПРУГИХ СЛОЯХ

На основании трехмерной динамической теории упругости асимптотическим методом [1, 2] выведены двумерные уравнения и соотношения упругости для пакета с произвольной анизотропией и расположением слоев. Межслойный контакт считается идеальным, а пакет – подверженным действию напряжений на лицевых поверхностях при некоторых краевых условиях на торцах. Предполагается, что кроме обычного для длинноволнового приближения малого параметра $\varepsilon = h/L \ll 1$ (h – полутолщина, L – масштаб процесса в продольном направлении), в каждом отдельном слое отношения упругих модулей в различных направлениях могут порождать дополнительные малые параметры вида $\varepsilon^p, p > 0, \varepsilon \to +0$. Аналогичные контрастные различия допускаются также между группами слоев. Полученные результаты классифицированы в соответствии с показателями контрастности и типами анизотропии.

Основная цель работы – получить асимптотически точное описание динамического внутреннего напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкого пакета анизотропных слоев с контрастными свойствами. К таким свойствам относятся: сильное различие упругих свойств для различных направлений анизотропии в пределах отдельно взятого слоя (наличие контрастных направлений), а также сильное различие между слоями или группами слоев.

Первое свойство типично для современных высокопрочных однонаправленных композитов, где модули углеродных или бороуглеродных волокон в слое существенно превышают модули матрицы [3], что приводит к усложнению свойств пакета в целом. Многочисленные попытки их математического описания сводятся, в основном, к использованию теорий деформации высокого порядка и порождают собственные технические сложности [4–6]. С асимптотической точки зрения это означает учет все большего числа членов (четвертого, шестого и более высоких порядков) в соответствующих асимптотических рядах стандартного вида (тех же, что и для неконтрастного случая). Между тем, естественно было бы начать с длинноволнового приближения, ограничиваясь одним-двумя членами ряда, но скорректировать их за счет введения дополнительных малых параметров (например, отношений упругих модулей в различных направлениях), что и делается в настоящей статье.

Что касается второго свойства, то оно часто встречается в разнообразных панелях из композиционных материалов, содержащих внешние несущие слои и относительно мягкий заполнитель [3, 7–11], т.е. контрастность проявляется и при переходе от слоя к слою.

Метод гипотез широко применялся в теории таких слоистых структур с малым физическим параметром [7, 12, 13]. Асимптотические подходы для случая изотропных и трансверсально-изотропных материалов развивались в [14][1].

[1] См. также *Ложкин О.Б.* Некоторые вопросы осесимметричного изгиба трехслойных оболочек вращения. Автореферат. Дис. ... канд. техн. наук. 01.02.03. М., 1976, МАИ. 18 с.

1. Физическая и математическая постановка задачи. Пусть j-й слой занимает область $\Omega \times [z_j, z_{j+1}]$ ($j = 1, 2, ..., N$) в декартовой системе координат $\mathbf{x} = \mathbf{i}_\alpha x_\alpha$, $x_3 = z$. Будем считать, что линейно упругий материал слоя обладает анизотропией общего вида и трехмерному закону Гука отвечает матрица жесткости $\mathbf{G}_j$ шестого порядка, содержащая 21 независимую упругую константу. Плотность материала обозначим ρ_j.

Слои идеально сцеплены по поверхностям контакта и уложены в пакет произвольным несимметричным образом.

Полагаем, что при некоторых краевых условиях на торцах $\partial\Omega \times [z^-, z^+]$, $z_1 = z^-$, $z_{N+1} = z^+$ пакет подвержен воздействию распределенных напряжений на лицевых поверхностях, так что характерный масштаб L динамического процесса в продольной плоскости оказывается много больше толщины пакета $2h = h_1 + h_2 + ... + h_N$, $h_j = z_{j+1} - z_j$, т.е. $\varepsilon = hL^{-1} \ll 1$ – геометрический малый параметр.

Обозначим E_0 и ρ_0 характерные значения упругого модуля и плотности (наибольшие значения в пакете, например).

Далее будем считать, что координаты $\mathbf{x}, z$ нормированы на L и h, а величины $\mathbf{G}_j$, ρ_j – на E_0 и ρ_0 соответственно. Безразмерное время t получено нормированием на некоторый характерный масштаб $T = \varepsilon^{\tau-1} l c_0^{-1}$, $c_0^2 = E_0\rho_0^{-1}$. Нагрузки на лицевых поверхностях зададим в виде

$$\sigma_{33}^{\mp} = \sigma^{\mp}(\mathbf{x}, t), \quad \sigma_{\alpha 3}^{\mp} = \varepsilon^{-1}\tau_\alpha^{\mp}(\mathbf{x}, t) \quad (z = z^{\mp}).$$

Для одинарных индексов напряжений и деформаций в матрице жесткостей $\mathbf{G}_j$ индексы 1, 2, 3 далее будут соответствовать индексам 11, 22, 33, а индексы 4, 5, 6 – сдвиговым напряжениям и деформациям 23, 13, 12.

Дополнительно предположим, что для жесткостей выполнены равенства вида

$$G_{mn}^j = \varepsilon^p g_{mn}^j \ (m = 3, 4, 5), \quad G_{mn}^j = \varepsilon^q q_{mn}^j \ (n = 1, 6, 2),$$

причем $g_{mn}^j = O(1)$, $\varepsilon \to +0$. На пересечении m-х строк и n-х столбцов выбираются наибольшие среди степеней p и q ($p, q > 0$).

Для начала ограничимся исследованием показателей $p, q = 1, 2, 3$. В тонких телах, как правило, $\varepsilon < 10^{-1}$, и для диапазона реальных значений параметров этого достаточно.

Таким образом, перемещения, деформации и напряжения в слоях удовлетворяют уравнениям трехмерной динамической теории упругости, закону Гука, условиям полного сцепления слоев, заданным нагрузкам на лицевых поверхностях и некоторым краевым условиям на торцах пакета.

Для внутреннего (удаленного от торцов) НДС пакета перемещения $\mathbf{U} = \mathbf{i}_\alpha U_\alpha$, $U_3 = W$, деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$, и напряжения $\Sigma_{\gamma\delta}$ будем искать в виде асимптотических рядов по степеням ε (индекс слоя j в очевидных случаях опускаем)

$$\mathbf{U} = h\varepsilon^\lambda(\mathbf{u}^0 + \varepsilon\mathbf{u}^1 + ...), \quad W = h\varepsilon^\mu(w^0 + \varepsilon w^1 + ...)$$

$$\varepsilon_{\gamma\delta} = \varepsilon^\theta(\varepsilon_{\gamma\delta}^0 + \varepsilon\varepsilon_{\gamma\delta}^1 + ...), \quad \Sigma_{\gamma\delta} = E_0\varepsilon^\kappa(\sigma_{\gamma\delta}^0 + \varepsilon\sigma_{\gamma\delta}^1 + ...)$$

с различными показателями λ, μ, θ, κ, τ, отвечающим выбору (p, q)-модели жесткостей. Получаем следующие порядки и рекуррентные соотношения для безразмерных величин:

$$\gamma_{\alpha\beta}^s = (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha)^s (\theta = \lambda + 1), \quad \varepsilon_{zz}^s = \partial_z w^s (\theta = \mu) \tag{1.1}$$

$$\gamma_{\beta z}^s = \partial_z u_\beta^{s+\theta-\lambda} + \partial_\beta w^{s+\theta-\mu-1} (\theta = \min(\lambda, \mu + 1))$$

$$\sigma_\delta^s = (g_{\delta 1}\varepsilon_{11} + g_{\delta 6}\gamma_{12} + g_{\delta 2}\varepsilon_{22})^{s+\kappa-q-\lambda-1} + g_{\delta 3}\varepsilon_{zz}^{s+\kappa-p-\mu} + (g_{\delta 4}\gamma_{2z} + g_{\delta 5}\gamma_{1z})^{s+\kappa-p-\xi} \tag{1.2}$$

$$(\kappa = \min(q+\lambda+1, p+\mu, p+\xi); \quad \delta = 1,2,...,6)$$

$$\partial_\beta \sigma_{\alpha\beta}^{s+\lambda_0-\kappa-1} \partial_z \sigma_{\alpha z}^{s+\lambda_0-\kappa} = \rho_j \partial_t^2 u^{s+\lambda_0+2\tau-4-\lambda}$$

$$\partial_\beta \sigma_{\beta z}^{s+\mu_0-\kappa-1} \partial_z \sigma_{\alpha z}^{s+\mu_0-\kappa} = \rho_j \partial_t^2 w^{s+\mu_0+2\tau-4-\mu} \tag{1.3}$$

$$(\lambda_0 \equiv \min(\lambda,\kappa), \ \mu_0 \equiv \min(\mu,\kappa))$$

Соотношения упругости (1.1), (1.2) и уравнения (1.3) дополняются условиями на поверхностях межслойного контакта и на лицевых поверхностях

$$z = z_{j+1} : \sigma_{\alpha zj}^{s-\kappa_j} = \sigma_{\alpha zj+1}^{s-\kappa_{j+1}}, \quad \sigma_{zzj}^{s-\kappa_j} = \sigma_{zzj+1}^{s-\kappa_{j+1}}$$

$$u_{\alpha j}^{s-\lambda_j} = u_{\alpha_{j+1}}^{s-\lambda_{j+1}}, \quad w_j^{s-\mu_j} = w_{j+1}^{s-\mu_{j+1}} \tag{1.4}$$

$$z = z^{\mp} : \sigma_{\alpha z\mp}^{s} = \tau_\alpha^{\mp} \delta_{s+\kappa_\mp}^{-1}, \quad \sigma_{zz\mp}^{s} = \sigma^{\mp} \delta_{s+\kappa_\mp}^{0}$$

где индексы $\mp$ и 1, N + 1 отождествлены для краткости; j = 2, 3, ..., N–1; а δ_n^m – символ Кронекера.

2. Базисная модель пакета из (0.0)-слоев. Эта модель подробно исследована [16–18], но представляет интерес для сравнения с другими моделями в качестве базисного представления. Приведем основные выражения и порядки для главных членов (s = 0)

$$\tau = 0, \ \mu = -4, \ \lambda = -3$$

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}(\mathbf{x},t) - z\nabla w, \ w^0 = w(\mathbf{x},t), \ \nabla = \mathbf{i}_\alpha \partial_\alpha \tag{2.1}$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^j = \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{\Gamma}_j)\mathbf{u}^0, \ \kappa = -2 \ (\alpha\beta = 11,12,22) \tag{2.2}$$

$$\chi_{11}(\mathbf{\Gamma}) \equiv (\gamma_{11}\partial_1 + \gamma_{16}\partial_2)\mathbf{i}_1 + (\gamma_{16}\partial_1 + \gamma_{12}\partial_2)\mathbf{i}_2 \ \ (1 \leftrightarrow 2)$$

$$\chi_{12}(\mathbf{\Gamma}) \equiv (\gamma_{16}\partial_1 + \gamma_{66}\partial_2)\mathbf{i}_1 + (\gamma_{66}\partial_1 + \gamma_{26}\partial_2)\mathbf{i}_2$$

$$\sigma_{\alpha z}^j = \tau_\alpha^\pm \pm \Sigma_\pm h_l \mathbf{a}_\alpha^l(\mathbf{u} - z_l^0 \nabla w) +$$

$$+ \ (z_j^\pm - z)\mathbf{a}_\alpha^j \left(\mathbf{u} - \frac{(z + z_j^\pm)}{2} \nabla w \right), \ \kappa = -1 \tag{2.3}$$

$$\sigma_{zz}^j = \sigma^\pm + (z^\pm - z)\nabla\boldsymbol{\tau}^\pm + [(z - z_j^\pm)\rho_j \mp \Sigma_\pm h_l \rho_l]\partial_t^2 w \mp$$

$$\mp \ \Sigma_\pm \left[h_l(z - z_l^0)\mathbf{a}_*^l \mathbf{u} + \left(\frac{z_{l+1}^3 - z_l^3}{2} - z h_l z_l^0 \right) b_*^l w \right] +$$

$$+ \ \frac{(z_j^\pm - z)^2}{2} \mathbf{a}_*^j \mathbf{u} - \left[\frac{z^3}{6} - \frac{z(z_j^\pm)^2}{2} + \frac{(z_j^\pm)^3}{3} \right] b_*^j w, \ \ \kappa = 0 \tag{2.4}$$

где в основных операторах приняты следующие обозначения (N также будет означать все множество индексов j):

$$\mathbf{a}_\alpha = \partial_\beta \chi_{\alpha\beta}, \ \mathbf{a}_* = \partial_\alpha \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{i}_\alpha b_\alpha, \ b_* = \partial_\alpha b_\alpha = \mathbf{a}_\alpha \nabla$$

$$z_j^\mp = z_j, z_{j+1}; \ 2z_j^0 = z_j + z_{j+1}, \tag{2.5}$$

$$\Sigma_\mp = \sum_l \ \ (l < j \ \text{ или } \ l > j : l, j \in N)$$

$$\mathbf{\Gamma}_j = \|\gamma_{mn}\|_j, \ \gamma_{mn} = \det \mathbf{G}_n^m / \det \mathbf{G}_0 \ \ (m,n = 1,6,2) \tag{2.6}$$

В элементах матрицы Γ_j осредненных жесткостей j-го слоя $\mathbf{G}_0$ означает диагональный минор 3, 4, 5 в матрице $\mathbf{G}_j$, а $\mathbf{G}_n^m$ – окаймляющий минор, полученный добавлением m-й строки и n-го столбца к $\mathbf{G}_0$. В частном случае моноклинной анизотропии (по отношению к лицевым поверхностям) в слое формулы жесткостей упрощаются: $\gamma_{mn} = g_{mn} - g_{m3}g_{3n}/g_{33}$.

Перемещения не зависят от номера слоя и удовлетворяют системе уравнений

$$\mathbf{a}_\alpha(\mathbf{D}_1)\mathbf{u} - b_\alpha(\mathbf{D}_2)w + \tau_\alpha^+ - \tau_\alpha^- = 0$$

$$-\mathbf{a}_*(\mathbf{D}_2)\mathbf{u} + [\rho_*\partial_t^2 + b_*(\mathbf{D}_3)]w = \sigma^+ - \sigma^- + \nabla(z^+\boldsymbol{\tau}^+ - z^-\boldsymbol{\tau}^-) \tag{2.7}$$

$$\mathbf{D}_k = \sum_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} z^{k-1}\boldsymbol{\Gamma}_j dz, \quad \rho_* = \sum_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} \rho_j dz \tag{2.8}$$

При несимметричном расположении слоев кроме классических изгибных ($\mathbf{D}_3$) и мембранных ($\mathbf{D}_1$) жесткостей появляются смешанные мембранно-изгибные интегральные жесткости пакета ($\mathbf{D}_2 \neq 0$). Отметим, что при моноклинной анизотропии кинематические соотношения и прочие равенства для членов первого порядка ($s = 1$) остаются неизменными (но с однородными уравнениями (2.7)), тогда как при полной анизотропии соотношения Кирхгофа для них уже не выполняются (влияние поперечных сдвиговых деформаций [18]).

3. Пакет из (p, 0)-слоев. Этот случай соответствует большой жесткости материалов в продольном направлении при относительной поперечной мягкости. При $p = 1$ для главных членов $s = 0$ из равенств (1.1)–(1.4) выводятся те же соотношения, что и для (0,0)-модели. Отличие заключается в построении матрицы осредненных жесткостей в j-м слое. Для $\mathbf{F}_j$ получается разложение

$$\boldsymbol{\Gamma}_j = \boldsymbol{\Gamma}_j^* + \varepsilon\boldsymbol{\Gamma}_j^{**} + \ldots \tag{3.1}$$

и в равенствах (2.2)–(2.8) вместо $\boldsymbol{\Gamma}_j$ следует подставить $\boldsymbol{\Gamma}_j^*$. При этом

$$\gamma_{mn}^j = g_{mn}^j \tag{3.2}$$

Характерный масштаб времени, отвечающий показателю $\tau = 0$, также сохраняется, несмотря на появление коротких и медленных поперечных волн.

Отметим, что случай $p \geq 2$ уже для $s = 0$ приводит к системе уравнений с неразделяющимися координатами $\mathbf{x}$ и z, т.е. к потере рекуррентности в соотношениях (1.1)–(1.4).

Замечание. Потеря рекуррентности происходит из-за влияния поперечных сдвиговых деформаций. Например, если положить

$$G_{mn} = O(\varepsilon^p) \ (m = 4{,}5), \ G_{3n} = O(1) \tag{3.3}$$

то ситуация не улучшается. Также не происходит принципиального улучшения и при переходе к моноклинной анизотропии или ортотропии. Если же ограничиться только случаем высокой податливости к поперечному растяжению–сжатию

$$G_{mn} = O(1) \ (m = 4{,}5), \ G_{3n} = O(\varepsilon^p) \tag{3.4}$$

то соотношения (2.2)–(2.8) вообще не изменятся, следует лишь выбрать соответствующую матрицу Γ_j^* из (3.1).

Приведем теперь кинематические соотношения для $s = 1$. При $p = 1$ получаем

$$w^1 = w^1(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{u}^1 = \mathbf{u}_0^1(\mathbf{x},t) - z\nabla w^1 + \boldsymbol{\Delta}'\int_0^z \boldsymbol{\tau}_*^0 - \mathbf{G}'_*\boldsymbol{\gamma}^0 dz \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{G}_0^{-1}, \quad \mathbf{G}_* = \mathbf{G}\binom{345}{162}, \quad \boldsymbol{\gamma} = (\varepsilon_{11}, \gamma_{12}, \varepsilon_{22})^T, \quad \boldsymbol{\tau}_* = (0, \sigma_{1z}, \sigma_{2z})^T$$

где Δ' и $\mathbf{G}'_*$ обозначают матрицы Δ и $\mathbf{G}_*$ с вычеркнутыми первыми строками и переставленными оставшимися строками. В случае моноклинной анизотропии $\mathbf{G}_* = 0$ и $\Delta_{12} = \Delta_{13} = 0$. Очевидно, что прогиб одинаков во всех слоях, а продольные смещения зависят от индекса слоя. Деформации продольного сдвига оказываются всегда ненулевыми, т.е. в первом приближении всегда получаем отличие от кинематической модели Кирхгофа.

Для контрастных жесткостей (3.4), $p = 1{,}2$ в формуле (3.5) следует положить $\tau_* = 0$ и вместо $\boldsymbol{\Delta}'$ взять матрицу $\boldsymbol{\Delta}''$ (полученную вычеркиванием еще и первого столбца). При моноклинной анизотропии снова получаются кинематические соотношения Кирхгофа.

В случае (3.4), $p = 3$ соотношения для $s = 1$ изменяются и существенный вклад вносят напряжения поперечного растяжения–сжатия

$$w^1 = w_0^1(\mathbf{x},t) + g_{33}^{-1}\int_0^z \sigma_{zz}^0 dz, \quad \mathbf{u}^1 = \mathbf{u}_0^1(\mathbf{x},t) - \int_0^z \nabla w^1 + \boldsymbol{\Delta}''\mathbf{G}'_*\boldsymbol{\gamma}^0 dz \qquad ,$$

причем упрощение анизотропии не приводит к изменению типа кинематических соотношений.

Наконец, для случая (3.3) и $p = 1$ соотношения вида (3.5) сохраняются, если снова использовать матрицу $\boldsymbol{\Delta}''$, вектор $\boldsymbol{\tau}_* = (\sigma_{13}, \sigma_{23})^T$, и вместо $\mathbf{G}'_*$ подставить матрицу

$$\mathbf{G}^*_* = \mathbf{G}'_* - g_{33}^{-1}\begin{Vmatrix} g_{53} \\ g_{43} \end{Vmatrix}(g_{31}, g_{36}, g_{32}).$$

Упрощение до моноклинной анизотропии дает $\mathbf{G}^*_* = 0$, но оставляет зависимость от напряжений сдвига τ_*.

4. Пакет из (0, *q*)-слоев. Эта ситуация отвечает значительно большей податливости слоев в продольном направлении, чем в поперечном. Равенства (2.1)–(2.8) имеют место для главных членов ($s = 0$) при следующих значениях порядков:

$$\tau = -g/2, \;\; \mu = -4-q, \;\; \lambda = -3-q$$

с осредненными жесткостями (3.2) в слоях. Порядки напряжений не изменяются.

Кинематические соотношения Кирхгофа сохраняются вплоть до члена q-го порядка в асимптотических рядах перемещений, а в случае моноклинной анизотропии – до $(q+1)$-го члена.

С асимптотической погрешностью $O(\varepsilon^{q+1})(O(\varepsilon^{q+12}))$ все соотношения (2.1)–(2.8) могут быть сохранены для суммы членов $s = 0,1,\ldots, q$ $(q+1)$, если использовать в этих равенствах полную матрицу жесткостей Γ_j из формулы (3.1).

5. Пакет из (*p*, *q*)-слоев. В случае $p-q = r > 0$ для пакета из $(q + r,q)$-слоев при $r = 1$ получаем следующие порядки:

$$\tau = -q/2, \;\; \mu = -4-q, \;\; \lambda = -3-q$$

$$\kappa = -2-q \; (11,\, 12,\, 22), \;\; \kappa = -1-q \; (13,\, 23), \;\; \kappa = -q \; (33)$$

и те же соотношения (2.1)–(2.8) для главных членов $s = 0$.

При $r \geq 2$ разделения переменных $\mathbf{x}$ и z не происходит в силу потери рекуррентности, как и для $(r, 0)$-слоев.

В случае $q-p = r > 0$ модель пакета из $(p, p + r)$-слоев строится аналогично модели для $(0, r)$-слоев с измененными показателями масштаба

$$\tau = -(p + r)/2, \;\; \mu = -4-p-r, \;\; \lambda = -3-p-r$$

$$\kappa = -2-p(11,\, 12,\, 22), \;\; \kappa = -1-p \; (13,\, 23), \;\; \kappa = -p \; (33)$$

и соотношениями (2.1)–(2.8) для главных членов.

6. Комбинированные пакеты. Полученные выше результаты показывают, что пакет из (0, 0)- и (1, 0)-слоев в главном ($s = 0$) описывается соотношениями Кирхгофа (2.1) и равенствами (2.2)–(2.8) для перемещений и напряжений одного порядка и в одном масштабе времени. Требуется лишь вибрать адекватные матрицы осредненных жесткостей в каждом слое согласно (3.1) и (3.2). Назовем такую группу слоев K-пакетом, или продольно жесткими слоями типа Кирхгофа.

Включение в пакет (p, 0)-слоев ($p \geqslant 2$) не позволяет получить осредненную двумерную модель и следует рассматривать полную трехмерную задачу.

Добавление к K-пакету (0, q)- или (p, q)-слоев, удовлетворяющих соответствующим двумерным теориям однотипных пакетов (кроме ($q + r$, q)-слоев, $r \geqslant 2$), в комбинированном случае требует нового рассмотрения в силу различия асимптотических порядков величин для моделей каждого типа в отдельности.

Исследуем практически важную ситуацию, когда на периферии пакета расположены несущие K-слои, а внутри помещены (p, q)-слои, причем $p \leqslant q$ для обеспечения связной работы пакета в поперечном направлении [6, 7, 11].

7. Случай (0, q)-заполнителя. Обозначим $N^{\mp}$ множество индексов, отвечающих номерам K-слоев, примыкающих к лицевой поверхности $z = z^{\mp}$, N^0 – множество номеров слоев заполнителя ($q \geqslant 1$); и $z^- < z^+$ – координаты границ раздела между периферийными слоями и заполнителем. Оказывается, что в этом случае асимптотически главная часть ($s = 0$) поля перемещений и напряжений в K-слоях удовлетворяют соотношениям (2.1)–(2.4). В формулах (2.3), (2.4) для каждой группы K-слоев следует выбирать формулы суммирования от прилегающей лицевой поверхности и в пределах индексов данной группы (т.е. для $l, j \in N^{\pm}$ в формуле (2.5) выбирается $\Sigma_{\pm}$). Осредненные двумерные уравнения имеют вид (2.7), где следует положить

$$\mathbf{D}_k \equiv \mathbf{D}_k^+ + \mathbf{D}_k^- \tag{7.1}$$

Для перемещений в слоях заполнителя $j \in N^0$ снова выполнены равенства (2.1), но структура и порядки напряжений могут изменяться. Для продольных напряжений $\sigma^j_{\alpha\beta}$ сохраняются равенства (2.2) (с осредненными жесткостями слоев $\gamma_{mn} = g_{mn}$), но их порядок равен $\varkappa = q - 2$; для поперечных напряжений получаем

$$\sigma^j_{\alpha z} = \tau^0_\alpha, \quad \varkappa = -1 \tag{7.2}$$

$$\sigma^j_{zz} = \alpha_0^{\pm} + [z - z_j \mp \textstyle\sum_{\pm}^0 h_l](\rho_j \partial_t^2 w - \nabla \tau_0), \quad \varkappa = 0 \tag{7.3}$$

$$\tau^0_\alpha = \tau^{\pm}_\alpha \pm [\mathbf{a}_\alpha(\mathbf{D}_1^{\pm})\mathbf{u} - b_\alpha(\mathbf{D}_2^{\pm})w] \tag{7.4}$$

$$\sigma_0^{\pm} = \sigma^{\pm} + \nabla(z^{\pm}\boldsymbol{\tau}^{\pm} - z_0^{\pm}\boldsymbol{\tau}_0) \mp [\rho_*^{\pm}\partial_t^2 + b_*(\mathbf{D}_3^{\pm})]w \pm \mathbf{a}_*(\mathbf{D}_2^{\pm})\mathbf{u} \tag{7.5}$$

$$\Sigma_{\pm}^0 \equiv \sum_l (l > j \quad \text{или} \quad l < j: \; l, j \in N^0)$$

где $\rho_*^{\pm}$ означает интегралы плотности в K-слоях.

Для следующей итерации ($s = 1$) перемещения в K-слоях могут принимать вид (3.5), тогда как в заполнителе перемещения удовлетворяют соотношениям Кирхгофа, хотя напряжения совершенно иные в силу изменения асимптотических порядков.

Отметим, что внутреннее НДС слоев заполнителя выражается алгебраически через компоненты (и операторы) НДС несущих слоев, и не содержит дополнительных произволов для описания краевых условий. В этом ситуация напоминает поведение упругой прокладки, защемленной между абсолютно жесткими поверхностями [19, 20].

8. Заполнитель из (1, 1 + q)-слоев. Единственное отличие в описании главной части ($s = 0$) от предыдущего случая состоит в появлении дополнительного слагаемого в формулах продольных напряжений (того же порядка)

$$\sigma^j_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha\beta}(\Gamma_j)\mathbf{u}^0 + \delta^j_{\alpha\beta}\tau_0, \quad \varkappa = -2 + q$$

$$\delta_\theta = (g_{3\theta}, g_{4\theta}, g_{5\theta})(\Delta')^T \quad (\theta = 1,6,2 \leftrightarrow \alpha\beta = 11,12,22)$$

9. Заполнитель вида (2,2 + q). Если в предыдущих двух случаях перемещения не зависели от индекса слоя, то теперь продольные смещения в K-слоях становятся кусочно-линейными функциями от толщинной координаты

$$\tau = 0, \ \mu = -4, \ \lambda = -3$$

$$\mathbf{u}^\pm_0 = \mathbf{u}(\mathbf{x},t)^\pm - z\nabla w, \quad w^0 = w(\mathbf{x},t) \tag{9.1}$$

и зависит от того, к какой группе принадлежит слой (выражение для прогиба не изменяется). Соотношения (2.2)–(2.4) сохраняются, отличие от изложенного в разд. 7 состоит только в подстановке собственных продольных компонент смещений $\mathbf{u}^\pm$ для каждой группы K-слоев $j \in N^\pm$.

Система осредненных уравнений изменяется более существенно:

$$\mathbf{a}_\alpha(\mathbf{D}^\pm_1)\mathbf{u}^\pm - b_\alpha(\mathbf{D}^\pm_2)w \pm (\tau^\pm_\alpha - \tau^0_\alpha) = 0$$

$$-\mathbf{a}_*(\mathbf{D}^+_2)\mathbf{u}^+ - \mathbf{a}_*(\mathbf{D}^-_2)\mathbf{u}^- + [\rho_*\partial^2_t + b_*(\mathbf{D}_3)]w = \sigma^+ - \sigma^- + \nabla(z^+\tau^+ - z^-\tau^-) \tag{9.2}$$

$$\tau^0 = \Delta^{-1}_0(u^+ - \mathbf{u}^-); \quad \Delta'_0 = \sum h_j\Delta'_j, \quad j \in N^0 \tag{9.3}$$

Первые четыре уравнения (±; $\alpha = 1, 2$) в (9.2) отвечают двум задачам обобщенного плоского напряженного состояния в периферийных K-группах слоев; кроме заданных касательных напряжений на лицевых поверхностях пакета в них появляются дополнительные слагаемые (9.3), напоминающие отклик среды Винклера–Фусса [19, 21] с суммарными матрицами податливости Δ' (аналогичными (3.5)).

Последнее уравнение в (9.2) отвечает обобщенной задаче изгиба всего пакета в целом. Здесь заполнитель участвует в формировании интеграла плотности.

Прогиб в заполнителе определяется формулой (9.1), а продольные смещения и напряжения примут вид

$$\mathbf{u}^0_j = \mathbf{u}^\pm(\mathbf{x},t) + [(z - z^\pm_j)\Delta'_y \mp \Sigma^0_\pm h_l\Delta'_l]\tau_0 - z\nabla w$$

$$\sigma^j_{\alpha\beta} = \delta^j_{\alpha\beta}\tau_0, \quad \varkappa = -3 + q$$

Поперечные напряжения в заполнителе снова задаются формулами (7.2) и (7.3), но напряжения (7.4), (7.5) на границах раздела K-слоев и заполнителя $z = z^\pm_0$ изменяются только за счет подстановки напряжения τ^0 из формулы (9.3).

Приведем теперь соотношения для энергии НДС пакета, полученные интегрированием уравнений (9.2) с соответствующими множителями по толщине:

$$\mathscr{E}^\bullet = \mathscr{P} + \mathscr{W}, \quad \mathscr{E} \equiv \mathscr{T} + \mathscr{K}, \quad (..)^\bullet \equiv \partial_t(..)$$

$$\mathscr{W} = \int_\Omega (\sigma^+ - \sigma^-)w^\bullet + \tau^+_\alpha(u^-_\alpha)^\bullet - \tau^-_\alpha(u^-_\alpha)^\bullet d\Omega$$

$$\mathscr{P} = \int_{\partial\Omega} Q^+_n(u^+_n)^\bullet + Q^+_\tau(u^+_\tau)^\bullet + (M^+_n + M^-_n)\theta^\bullet_n + (P^+_n + P^-_n)w^\bullet_n dl \tag{9.4}$$

$$\mathscr{K} = \frac{1}{2}\int_\Omega Q^+_{\alpha\beta}\varepsilon^+_{\alpha\beta} + Q^-_{\alpha\beta}\varepsilon^-_{\alpha\beta} + (M^+_{\alpha\beta} + M^-_{\alpha\beta})\theta_{\alpha\beta} + (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-)^T\Delta^{-1}(\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-)d\Omega$$

$$\mathscr{T} = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho_*(w^\bullet)^2 d\Omega; \quad \varepsilon_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha), \quad \theta_{\alpha\beta} \equiv -\partial^2_{\alpha\beta}w$$

Здесь

$$(Q_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta})^{\pm} \equiv \sum_{j\in N^{\pm}} \int_{z_j}^{z_{j+1}} (1,z)\sigma^j_{\alpha\beta}dz, \quad Q_{\alpha z} \equiv \sum_{j\in N^+, N^-} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \sigma^j_{\alpha z}dz = \tag{9.5}$$

$$= \partial_\beta(M^+_{\alpha\beta} + M^-_{\alpha\beta}) + z^+\tau^+_\alpha - z^-\tau^-_\alpha$$

$$P_n \equiv Q_{nz} + \partial_\tau(M^+_\tau + M^-_\tau)$$

где $\mathcal{W}$ – мощность поверхностной нагрузки, $\mathcal{P}$ – интеграл потока мощности через торцы пакета; $\mathcal{E}, \mathcal{T}, \mathcal{K}$ – полная, кинетическая, и потенциальная энергия пакета; $Q_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$ – интегральные усилия и моменты в поперечных сечениях пакета, порожденные продольными напряжениями (Q_n, Q_τ, M_n, M_τ – проекции этих усилий и моментов на нормальное и касательное направления к $\partial\Omega$); $Q_{\alpha z}$ – поперечные усилия (Q_{nz} – поперечное усилие в сечении с нормалью $\mathbf{n} \perp \partial\Omega$), P_n – поперечное усилие Кирхгофа.

Формулы (9.4), (9.5) обобщают классические соотношения теории пластин на случай контрастных пакетов. В силу энергетических соотношений (9.4) можно утверждать, что естественными краевыми условиями на торцах пакета являются либо заданные перемещения и углы поворота для K-слоев

$$u^\pm_n, \quad u^\pm_\tau, \quad \theta_n = -\partial_n w, \quad w \tag{9.6}$$

либо интегральные усилия и моменты

$$Q^\pm_n, \quad Q^\pm_\tau, \quad M_n, \quad P_n \tag{9.7}$$

либо комбинация условий (9.6) и (9.7). Начальные условия могут ставиться лишь на прогиб: $w(0, \mathbf{x})$, $\partial_t w(0, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$.

Если теперь обратиться к рассмотрению $(3{,}3 + q)$-заполнителя, то для периферийных K-слоев перемещения и напряжения сохраняют вид (9.1), (2.2)–(2.4); но в уравнениях (9.2) следует исключить составляющие τ^0_α.

В заполнителе $j \in N^0$ прогиб по-прежнему не зависит от z, а продольные перемещения и напряжения – кусочно-линейные функции от z.

Для определения этих составляющих требуется рассматривать уже две итерации $s = 0{,}1$. Соответствующие громоздкие выражения здесь не приводятся.

10. Заключение и выводы. Можно утверждать, что наличие контрастных направлений в анизотропных слоях приводят к существенному изменению НДС пакета. При рассмотрении (p, q)-слоев неклассические ситуации возникают при $p > q$. Причем, если для $(q + 1, q)$-слоев получаются осредненные двумерные длинноволновые модели, содержащие классические кинематические соотношения для главного члена $s = 0$, то неклассические полиномиальные (как функции поперечной координаты) представления для продольных перемещений появляются в них уже в следующей итерации $s = 1$.

Таким образом, две первые итерации приводят к промежуточной модели между классическим описанием Кирхгофа и теорией сдвиговых деформаций высокого порядка.

При $p - q \geqslant 2$ модель приводит к модифицированному трехмерному описанию НДС.

Реальным волокнистым композитам (в том числе высокопрочным однонаправленным композитам) больше всего соответствуют модели (0, 0)-слоев и рассмотренных (1, 0)-слоев.

Принципиально иная ситуация возникает при рассмотрении пакета из нескольких групп контрастных слоев (по типу: несущие слои – мягкий заполнитель). В этом случае уже в главном приближении могут получаться системы осредненных уравнений большей размерности, с различными уравнениями для каждой группы несущих слоев. Краевые условия на торцах пакета также необходимо ставить порознь для каждой из таких несущих групп.

Основные операторы в различных моделях обобщают хорошо известные операторы задачи о плоском напряженном состоянии и задачи изгиба, с появлением дополнительных винклеровских слагаемых при достаточной мягкости заполнителя. Собственное поведение заполнителя напоминает поведение упругого слоя, защемленного жесткими полупространствами, НДС которого определяется алгебраически, а краевые условия удовлетворяются сложным пограничным слоем.

Работа выполнена в рамках программы Международой ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными их независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS 96-2306).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А.Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668–686.
2. *Friedrichs K.O., Dressler R.F.* A boundary-layer theory for elastic plates // Commun. Pure and Appl. Math. 1961. V. 14. № 1. P. 1–33.
3. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. В.В. Васильева и др. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
4. *Чепига В.Е.* О построении теории многослойных анизотропных оболочек с заданной условной точностью порядка h^N // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 4. С. 113–120.
5. *Lo K.H., Christensen R.M., Wu E.M.* A high-order theory of plate deformation. P2. Laminated plates // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1977. V. 44. № 4. P. 669–676.
6. *Reddy J.N.* A review of refined theories for laminated composite plates // Shock. Vib. Dig. 1990. V. 22. № 7. P. 3–17.
7. *Григолюк Э.И., Чулков П.П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 170 с.
8. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 269 с.
9. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984, 336 с.
10. *Григолюк Э.И., Куликов Г.М.* Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин. М.: Машиностроение, 1988. 250 с.
11. *Александров В.М., Шматкова А.А.* Напряженно-деформированное состояние консольной трехслойной панели с сотовым заполнителем // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 159–167.
12. *Болотин В.В.* К теории слоистых плит // Изв. АН СССР. Механика и Машиностроение. 1963. № 3. С. 65–72.
13. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 376 с.
14. *Гусейн-Заде М.И.* К построению теории изгиба слоистых пластинок // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 2. С. 232–243.
15. *Ворович И.И., Кадомцев И.Г., Устинов Ю.А.* К теории неоднородных по толщине плит // Изв. АН СССР. 1975. № 3. С. 119–129.
16. *Зорин И.С., Ромашев Ю.А.* О напряженно-деформированном состоянии слоистых плит несимметричного строения // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 1. С. 88–96.
17. *Захаров Д.Д.* Асимптотический анализ трехмерных динамических уравнений теории упругости для тонкой многослойной анизотропной пластинки произвольной структуры. // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 742–749.
18. *Захаров Д.Д.* Двумерные динамические уравнения тонкой несимметрично-слоистой упругой пластины с анизотропией общего вида // Докл. РАН. 1994. Т. 336. № 1. С. 50–53.
19. *Агаловян Л.А., Геворкян Р.С.* Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок // ПММ. 1986. Т. 60. Вып. 2. С. 271–278.
20. *Гольденвейзер А.Л.* Общая теория тонких упругих тел (оболочки, покрытия, прокладки) // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 5–17.
21. *Власов В.З., Леонтьев Н.Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.XII.1997