УДК 532.5

© 1998 г. П.Н. Свиркунов

ОБ УСЛОВИЯХ СИММЕТРИЧНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВИХРЕВЫХ ДВИЖЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Изучается задача о симметричной неустойчивости стационарных движений несжимаемой идеальной жидкости, стратифицированной по плотности, для двух типов движения – осесимметричной и с трансляционной симметрией. Показано, что достаточное условие устойчивости, полученное [1] на основе вариационного метода (прямой метод Ляпунова), для рассматриваемых движений тесно связано с экстремальностью их энергии – устойчивые движения характеризуются условным минимумом энергии. Минимум энергии имеет место в классе состояний, у которых потенциальный вихрь, будучи выраженным через лагранжевы инварианты, – угловой момент и плотность, представляет одну и ту же функцию этих инвариантов. Сформулированы условия неустойчивости и даны оценки нарастания кинетической энергии возмущений.

1. Рассмотрим осесимметричное движение идеальной жидкости, стратифицированной по плотности, в приближении несжимаемости. Система динамических уравнений в цилиндрической системе координат (r, φ, z) с вертикальной осью z имеет вид

$$\frac{du}{dt}-\frac{M^2}{r^3}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},\quad \frac{dw}{dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g$$
$$\frac{dM}{dt}=0,\quad \frac{d\rho}{dt}=0,\quad \frac{1}{r}\frac{\partial ru}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{1.1}$$

Здесь $M = rv$ – угловой момент, u, w, v – радиальная, вертикальная, азимутальная компоненты скорости, ρ – плотность, p – давление, g – ускорение свободного падения. Жидкость занимает цилиндрическую область: $0 \le r \le R$, $0 \le z \le H$, на границах которой нормальная составляющая скорости обращается в нуль. Будем считать, что якобиан $D(M, \rho)/D(r, z)$ ни в какой области тождественно не обращается в нуль. Тогда стационарное состояние (циклострофический баланс), обозначаемое индексом s, описывается уравнениями

$$u_s = w_s = 0;\quad \rho_s\frac{M_s^2}{r^3}=\frac{\partial p_s}{\partial r}$$
$$-g\rho_s=\frac{\partial p_s}{\partial z} \tag{1.2}$$

Достаточное условие симметричной устойчивости этого состояния, полученное прямым методом Ляпунова [1], формулируется следующим образом: если во всей области течения выполняются неравенства

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial z}<0,\quad D(M_s^2,\rho_s)/D(r,z)<0$$

то состояние (1.2) устойчиво по Ляпунову в классе осесимметрических возмущений.

Данное условие можно записать с использованием уравнений (1.2) в эквивалентном виде

$$\frac{\partial^2 p_s}{\partial z^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 p_s}{\partial a^2}\frac{\partial^2 p_s}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 p_s}{\partial a \partial z}\right)^2 > 0 \tag{1.3}$$

где $a = r^{-2}$.

Физический смысл данного условия заключается в минимальности энергии стационарного состояния.

Уточним и обоснуем сказанное. Обозначим ρM^2 через μ. Очевидно, μ – лагранжевый инвариант: $d\mu/dt = 0$. Далее, выражение $\Omega = r^{-1}D(\mu, \rho)/D(r, z)$ также является лагранжевым инвариантом (оно пропорционально в подходящих переменных потенциальному вихрю Эртеля).

Достаточно очевидно, что благодаря двумерности динамики, должна существовать, по крайней мере локально, функциональная связь типа $\Omega = F(\mu, \rho)$ (она была названа [2] функциональным инвариантом). Если якобиан $D(\mu, \rho)/D(r, z)$ не обращается в нуль во всей области течения, эта связь существует и глобально. При этом множество всех состояний осесимметричного движения, характеризуемых набором (u, w, μ, ρ) естественным образом разбивается на классы эквивалентности: эквивалентным состояниям отвечают одинаковые функциональные инварианты. В частности, орбиты (т.е. состояния, связанные динамикой) состоят из эквивалентных состояний.

Утверждение, о котором шла речь, формулируется следующим образом: при выполнении условий устойчивости (1.3) энергия стационарного состояния имеет абсолютный минимум в классе эквивалентных состояний.

Укажем путь доказательства. Используя координаты $a = r^{-2}$, z и функцию p_s, определим преобразование Лежандра

$$\alpha = \partial p_s/\partial a, \ \beta = \partial p_s/\partial z \tag{1.4}$$

Дуальная к p_s функция $\phi(\alpha, \beta) = \alpha a + \beta z - p_s$ имеет производные: $\partial\phi/\partial\alpha = a$; $\partial\phi/\partial\beta = z$ при $(\alpha, \beta) = (-\mu_s/2, -g\rho_s)$ в силу (1.4) и (1.2), а также удовлетворяет неравенствам, аналогичным (1.3):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \beta^2} - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha \partial \beta}\right)^2 > 0 \tag{1.5}$$

в силу свойства преобразования Лежандра сохранять выпуклость. Отсюда следует неравенство

$$\phi(\alpha,\beta) - \phi\left(-\frac{\mu_s}{2}, \ -g\rho_s\right) - \left(\alpha + \frac{\mu_s}{2}\right)a - (\beta + g\rho_s)z > 0 \tag{1.6}$$

при $(\alpha, \beta) \neq (-\mu_s/2, -g\rho_s)$

В самом деле, выражение в левой части как функция α, β обращается в нуль со своими первыми производными при $(\alpha, \beta) = (-\mu_s/2, -g\rho_s)$ и с учетом выпуклости $\phi(\alpha, \beta)$ устанавливаем неравенство (1.6).

Разность энергий некоторого состояния (u, w, μ, ρ) и эквивалентного ему стационарного состояния $(0, 0, \mu_s, \rho_s)$ можно представить в виде

$$\Delta E = 2\pi \int_0^R r dr \int_0^H dz \left[\frac{\rho u^2}{2} + \frac{\rho w^2}{2} + \frac{(\mu - \mu_s)a}{2} + (\rho - \rho_s)gz + \right.$$
$$\left. + \left\{ \phi\left(-\frac{\mu}{2}, -g\rho\right) - \phi\left(-\frac{\mu_s}{2}, -g\rho_s\right) \right\} \right]$$

Интеграл от выражения в фигурных скобках обращается в нуль, что доказывается представлением его в виде разности интегралов и заменами $(r, z) \to (\mu, \rho)$, $(r, z) \to (\mu_s,$

ρ_s) переменных интегрирования с учетом одинакового выражения якобианов, следующего из определения эквивалентности.

С использованием неравенства (1.6) заключаем, что $\Delta E > 0$ при $(u, w, \mu, \rho) \neq (0, 0, \mu_s, \rho_s)$, что и требовалось доказать.

2. Пусть в некоторой области справедливо хотя бы одно из условий:

$$\frac{\partial^2 p_s}{\partial z^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 p_s}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 p_s}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 p_s}{\partial a \partial z}\right) < 0 \qquad (2.1)$$

Покажем, что тогда стационарное состояние неустойчиво. Для этого, как известно, достаточно показать неустойчивость линеаризованных в окрестности стационарного состояния уравнений динамики [3]. Как было отмечено [4], здесь удобно использовать лагранжев подход. Линеаризованное поле смещений $\xi(r, z, t)$, $\eta(r, z, t)$ определено соотношениями

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0(r,z) + \int_0^t u(r,z,t')dt' \\ \eta &= \eta_0(r,z) + \int_0^t w(r,z,t')dt' \end{aligned} \qquad (2.2)$$

и удовлетворяет линеаризованному уравнению несжимаемости

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r\xi}{\partial r} + \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0$$

а также граничным условиям

$$\xi(R, z) = \eta(r, 0) = \eta(r, H) = 0.$$

Предполагается, что начальные смещения ξ_0, η_0 также удовлетворяют этим условиям. Ограничимся вариациями μ и ρ, определенными равенствами

$$\begin{aligned} \delta\rho &= -\left(\xi\frac{\partial}{\partial r} + \eta\frac{\partial}{\partial z}\right)\rho_s \\ \delta\mu &= -\left(\xi\frac{\partial}{\partial r} + \eta\frac{\partial}{\partial z}\right)\mu_s \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Можно показать, что возмущения $\mu' = \mu_s + \delta\mu$, $\rho' = \rho_s + \delta\rho$ эквивалентны (в линейном приближении) стационарному состоянию. Физически такое возмущение в начальный момент получается смещением частиц из равновесных положений с сохранением элементарных объемов и соответствующих значений ρ_s и μ_s.

Линеаризованная система (1.1) в переменных ξ, η приведется к виду

$$\begin{aligned} \rho_s\ddot{\xi} + \xi A + \eta B &= -\frac{\partial p'}{\partial r} \\ \rho_s\ddot{\eta} + \xi B + \eta C &= -\frac{\partial p'}{\partial z} \end{aligned} \qquad (2.4)$$

$$\left(A = \frac{1}{r^3}\frac{\partial \mu_s}{\partial r},\ B = -g\frac{\partial \rho_s}{\partial r} = \frac{1}{r^3}\frac{\partial \mu_s}{\partial z},\ C = -g\frac{\partial \rho_s}{\partial z}\right)$$

где p' – возмущения давления.

Условие 2.1 означает, что матрица

$$\hat{F} = \begin{Vmatrix} A & B \\ B & C \end{Vmatrix} \qquad (2.5)$$

имеет хотя бы одно отрицательное собственное значение.

Система (2.4) имеет квадратичный интеграл энергии $E = T + U$ где

$$T = \frac{1}{2}\int_0^R rdr \int_0^H dz\rho_s(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2)$$
$$U = \frac{1}{2}\int_0^R rdr \int_0^H dz(\xi^2 A + 2\xi\eta B + \eta^2 C) \qquad (2.6)$$

Можно показать (см. приложение), что при выполнении хотя бы одного из условий (2.1) существует начальное поле смещений, которому отвечает отрицательное значение U.

В доказательстве неустойчивости используется функционал [4]

$$W = \frac{1}{2}\int_0^R drr \int_0^H dz\rho_s(\xi^2 + \eta^2) \qquad (2.7)$$

Его производная по времени удовлетворяет неравенству $\dot{W}^2 \le 4TW$ (доказывается с использованием неравенства Коши – Буняковского). Из уравнения движения следует $\ddot{W} = 4T - 2E$. Из этих соотношений получим неравенство

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{W}}{W}\right) \ge -\frac{2E}{W} \qquad (2.8)$$

Выберем начальное поле смещений (ξ_0, η_0) таким, которому отвечает $U(0) < 0$, а скорости $\dot{\xi}(0)$, $\dot{\eta}(0)$ положим равными $\varkappa\cdot(\xi_0, \eta_0)$, где постоянную $\varkappa > 0$ подберем из условия $E = 0$. Отсюда получим $\varkappa = (|U(0)|/W(0))^{1/2}$. При этом очевидно выполняется равенство $\dot{W}(0) = 2\varkappa W(0)$. Для данного начального условия из неравенства (2.8) получим оценки

$$\frac{\dot{W}}{W} \ge 2\varkappa; \;\; W(t) \ge W(0)\exp(2\varkappa t)$$

Очевидно значение постоянной $\varkappa$ определяет нижнюю границу инкремента нарастания возмущений.

Для кинетической энергии соответственно имеем оценку

$$T \ge W(\dot{W}/W)^2/4 \ge \varkappa^2 W(t) \qquad (2.9)$$

Таким образом, получаем экспоненциальную оценку нарастания кинетической энергии возмущения. На основе предыдущего можно показать, что неустойчивость стационарного состояния в конечном итоге обусловлена существованием эквивалентных возмущений со значениями энергии меньшими, чем у стационарного состояния. Таковыми, например, являются состояния, отвечающие возмущениям (2.3) с полем смещений, которому отвечает $U(0) < 0$ и $T(0) = 0$.

3. Аналогично исследуется вопрос о неустойчивости стационарного состояния геострофического баланса, при котором градиент давления балансируется силой Кориолиса [5]. Наиболее часто используется модель течения, в которой поля не зависят от одной из горизонтальных координат. Пусть это будет ось y. Тогда уравнения динамики в декартовой системе координат можно записать в виде [5]

$$\frac{du_x}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + fu_y, \;\; \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g$$
$$\frac{du_y}{dt} = -fu_x, \;\; \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (3.1)$$
$$\frac{du_x}{dx} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \;\; \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_x\frac{\partial}{\partial x} + w\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

где u_x, u_y – компоненты скорости вдоль осей x и y, f – параметр Кориолиса. Третье уравнение (3.1) означает, что величина $m = u_y + fx$ – лагранжев инвариант: $dm/dt = 0$. Это так называемый геострофический момент, в известной степени аналогичный угловому моменту M. Рассматривается движение в области $0 \le x \le l$, $0 \le z \le H$, на границах которой нормальная составляющая скорости обращается в нуль. Считаем, что якобиан $D(m, \rho)/D(x, z)$ не равен тождественно нулю. В этом случае стационарное состояние (геострофический баланс) удовлетворяет уравнениям

$$w_s = 0,\ u_{xs} = 0,\ \frac{\partial p_s}{\partial z} = -g\rho_s$$
$$\frac{\partial p_s}{\partial x} = f(m_s - fx)\rho_s \tag{3.2}$$

Достаточное условие симметричной устойчивости состояния (3.2) следующее [1]: при выполнении условий

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial z} < 0,\ \frac{fD(m_s,\rho_s)}{D(x,z)} < 0 \tag{3.3}$$

состояние (3.2) устойчиво по Ляпунову в классе симметричных (не зависящих от y) возмущений. Сделав замену координат $(x, z) \to (x, q)$, где $q = z + f^2x^2/2g$, и использовав стационарные уравнения, условия устойчивости представим в виде

$$\frac{\partial^2 p_s}{\partial z^2} > 0,\ \frac{\partial^2 p_s}{\partial x^2}\frac{\partial^2 p_s}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 p_s}{\partial x \partial q}\right)^2 > 0 \tag{3.4}$$

означающем выпуклость p_s как функции (x, q).

Далее вместо m используем лагранжев инвариант $\mu_g = \rho m$. Как и в предыдущем случае, можно показать, что существует функциональная связь вида

$$\frac{D(\mu_g,\rho)}{D(x,z)} = F(\mu_g,\rho)$$

не зависящая явно от времени, если μ_g и ρ – лагранжевы инварианты (функциональный инвариант [2]).

Справедливо утверждение о минимуме энергии стационарного состояния: при выполнении условий устойчивости энергия стационарного состояния имеет абсолютный минимум среди состояний с заданным функциональным инвариантом (подразумевается энергия, рассчитываемая на единицу длины y). Доказательство использует преобразование Лежандра с функцией $p_s(x, q)$ и вполне аналогично предыдущему.

Условия неустойчивости формулируются следующим образом: если в некоторой области хотя бы одно из неравенств (3, 4) меняет знак на противоположный, то состояние циклострофического баланса неустойчиво.

Доказательство проводится по схеме предыдущего случая. Неустойчивость стационарного состояния, как и ранее, обусловлена существованием эквивалентных состояний с меньшим значением энергии.

4. *Приложение*. Наметим схему доказательства утверждения: если матрица (2.5) с непрерывными коэффициентами в некоторой области имеет отрицательное собственное значение, то существует поле смещений ξ_0, η_0, удовлетворяющее уравнению неразрывности, которому отвечает $U(0) < 0$. Выберем в данной области точку (r_*, z_*) с некоторой ε-окрестностью, достаточно малой, чтобы A, B, C в ней мало манялись. Положим

$$(\xi_0, \eta_0) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi_0}{\partial z},\ -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi_0}{\partial r}\right)$$

а функцию ψ_0 выберем в виде гауссова распределения с центром в (r_*, z_*) и положительно определенной ковариационной матрицей $\hat{\sigma}$ с элементами $\sigma_{ik} \sim \varepsilon^2$. Асимптотически можно получить: $U(0) = G\mathrm{Sp}(\hat{F}\hat{\sigma})(1 + o(1))$ где $G > 0$. Можно также записать: $U(0) \sim G(\lambda_1\sigma'_{11} + \lambda_2\sigma'_{22})$ где λ_i – собственное значение матрицы $\hat{F}$ (2.5), $\hat{\sigma}' = \hat{D}\hat{\sigma}\hat{D}^{-1}$, а матрица $\hat{D}$ приводит (2.5) к диагональному виду. Пусть, например, $\lambda_1 < 0$. Выбрав матрицу ковариацией, удовлетворяющей условию $\sigma'_{11} | \lambda_1 | > \lambda_2\sigma'_{22}$, получим требуемое утверждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калашник М.В., Свиркунов П.Н.* О симметричной устойчивости состояний циклострофического и геострофического баланса в стратифицированной среде // Докл. РАН. 1996. Т. 348. № 6. С. 811–813.
2. *Калашник М.В., Свиркунов П.Н.* О состояниях циклострофического и геострофического баланса // Докл. РАН. 1995. Т. 344. № 2. С. 233–236.
3. *Дикий Л.А.* Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1976. 108 с.
4. *Владимиров В.А.* Вариационные подходы в теории устойчивостибароклинной атмосферы // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1989. Т. 25. № 4. С. 348–355.
5. *Монин А.С.* Теоретические основы геофизической гидродинамики. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 424 с.

Обнинск

Поступила в редакцию
24.X.1997