

УДК 531.36

© 1998 г. А.А. Майлыбаев, А.П. Сейранян

**ОСОБЕННОСТИ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ**

Исследуются особенности общего положения, возникающие на границах областей устойчивости линейной автономной системы дифференциальных уравнений в двух- и трехмерном пространстве параметров. Предлагается конструктивный подход, позволяющий определить геометрию особенностей (ориентацию в пространстве, величины углов и т.п.) с помощью построения касательных конусов к области устойчивости по первым производным матричного оператора системы по параметрам и его собственным и присоединенным векторам в особых точках границы. Приведены примеры.

Рассматривается линейная автономная система дифференциальных уравнений  $\dot{y} = Ay$ , где матричный оператор  $A$  гладко зависит от вещественных параметров. Для этих систем перечислены особенности общего положения, возникающие на границах областей устойчивости в двух- и трехмерном пространстве параметров, и дано их описание с точностью до гладкой замены параметров (диффеоморфизма) [1].

Ниже предлагается конструктивный подход, позволяющий определить геометрию особенностей с помощью построения касательных конусов к области устойчивости по первым производным матрицы  $A$  по параметрам и ее собственным и присоединенным векторам в особых точках границы. Метод основан на теории возмущений собственных значений матриц, зависящих от параметров [2, 3], и теории нормальных форм семейств матриц [1]. В качестве примеров рассмотрены задачи об устойчивости состояния равновесия в цепи вольтовой дуги и об устойчивости движения двойного маятника Циглера, нагруженного следящей силой, с двумя независимыми параметрами диссипации. Во второй задаче показано, что особенность, возникающая при значении критической силы без учета диссипативных сил, представляет собой согласно терминологии [1] "тупик на ребре". Эта особенность выражается в эффекте дестабилизации системы малыми диссипативными силами и отсутствии предела критической нагрузки при стремлении параметров диссипации к нулю. Следует ожидать появления подобных эффектов и для особенности типа "излом ребра".

**1. Распад жордановых клеток. Рассмотрим задачу на собственные значения**

$$Au = \lambda u \quad (1.1)$$

где  $A$  – произвольная квадратная вещественная матрица  $m$ -го порядка, элементы которой  $a_{ij}(p)$  ( $i, j = 1, \dots, m$ ) – гладкие функции вектора действительных параметров  $p = (p_1, \dots, p_n)^T$ ,  $\lambda$  – собственное значение (СЗ),  $u$  – собственный вектор (СВ) размерности  $m$ .

Будем рассматривать изменение СЗ в зависимости от изменения параметров  $p_1, \dots, p_n$ . Пусть при  $p = p_0$  число  $\lambda_0$  – СЗ матрицы  $A(p_0)$ . Придадим вектору параметров приращение  $p = p_0 + e\epsilon + d(\epsilon)\epsilon^2$ , где  $\epsilon$  – малое положительное число,  $e$  и  $d(\epsilon)$  – соответственно произвольные, но фиксированные вектор направления и вектор-функция, гладко зависящая от  $\epsilon$ . В результате матрица  $A$  получит приращение, которое представляется в виде ряда

$$A(p_0 + e\epsilon + d(\epsilon)\epsilon^2) = A_0 + A_1\epsilon + A_2\epsilon^2 + \dots \quad (1.2)$$

$$\left( A_0 = A(p_0), A_1 = \sum_{s=1}^n \frac{\partial A}{\partial p_s} e_s \right)$$

В результате возмущения вектора параметров СЗ и СВ также получают приращения. Согласно теории возмущений несамосопряженных операторов [2] эти приращения в зависимости от жордановой структуры  $A_0$  имеют различные представления.

1°. В случае простого СЗ  $\lambda_0$  приращения СЗ и СВ представляются в виде рядов по целым степеням  $\varepsilon$

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \varepsilon + \lambda_2 \varepsilon^2 + \dots, \quad u = u_0 + w_1 \varepsilon + w_2 \varepsilon^2 + \dots \quad (1.3)$$

Наряду с правым СВ  $u_0$  при  $p = p_0$  рассмотрим левый СВ  $v_0$ :

$$v_0^T A_0 = \lambda_0 v_0^T \quad (1.4)$$

и используем условие нормировки

$$v_0^T u_0 = 1 \quad (1.5)$$

Подставим разложения (1.2), (1.3) в (1.1) и используем уравнения (1.4), (1.5). В результате получим выражения для первой поправки [2, 3]

$$\lambda_1 = v_0^T A_1 u_0 = \sum_{s=1}^n \left( v_0^T \frac{\partial A}{\partial p_s} u_0 \right) e_s \quad (1.6)$$

Вводя действительные векторы  $r$  и  $k$  размерности  $n$  с компонентами, определяемыми соотношениями

$$r^s + ik^s = v_0^T \frac{\partial A}{\partial p_s} u_0, \quad s = 1, \dots, n \quad (1.7)$$

где  $i$  – мнимая единица, запишем (1.6) в виде

$$\lambda_1 = (r, e) + i(k, e) \quad (1.8)$$

где скобки обозначают скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$ . Векторы  $r$  и  $k$  являются соответственно градиентами действительной и мнимой частей СЗ  $\lambda$ , вычисленными при  $p = p_0$ . Далее из уравнений метода возмущений можно последовательно определить величины  $w_1, \lambda_2, w_2$  и т.д.

Паре комплексно-сопряженных СЗ  $\lambda_0 = \alpha_0 \pm i\omega_0$  отвечают соответственно комплексно-сопряженные величины  $\lambda_1 = (r, e) \pm i(k, e)$ . С учетом (1.3), (1.8) в окрестности точки  $p_0$  выражение для комплексно-сопряженной пары  $\lambda, \bar{\lambda}$  принимает вид

$$\lambda, \bar{\lambda} = \alpha_0 + (r, e)\varepsilon \pm i[\omega_0 + (k, e)\varepsilon] + o(\varepsilon) \quad (1.9)$$

Если  $\lambda_0$  – действительное число, то вектор  $k = 0$ .

2°. Рассмотрим случай двукратного СЗ  $\lambda_0$  с жордановой клеткой второго порядка. Это означает, что при  $p = p_0$  СЗ  $\lambda_0$  отвечают СВ  $u_0$  и присоединенный вектор (ПВ)  $u_1$ , определяемые из уравнений

$$A_0 u_0 = \lambda_0 u_0, \quad A_0 u_1 = \lambda_0 u_1 + u_0 \quad (1.10)$$

Для левых СВ и ПВ  $v_0$  и  $v_1$  соответственно имеем

$$v_0^T A_0 = \lambda_0 v_0^T, \quad v_1^T A_0 = \lambda_0 v_1^T + v_0^T \quad (1.11)$$

Из уравнений (1.10), (1.11) непосредственно следует, что векторы  $u_0, u_1, v_0, v_1$  удовлетворяют соотношениям

$$v_0^T u_0 = 0, \quad v_0^T u_1 = v_1^T u_0 \quad (1.12)$$

В результате возмущения вектора параметров  $p = p_0 + e\epsilon + d(\epsilon)\epsilon^2$  матрица  $A$  получает приращение (1.2). В кратном случае СЗ, вообще говоря, распадается на  $l$  простых СЗ, которые вместе с соответствующими им СВ представляются в виде рядов Ньютона–Пуизо, содержащих члены с дробными степенями  $\epsilon^{j/l}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , где  $l$  – длина цепочки Жордана [2]. В рассматриваемом случае ( $l = 2$ ) эти разложения имеют вид

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1\epsilon^{1/2} + \lambda_2\epsilon + \lambda_3\epsilon^{3/2} + \dots \quad (1.13)$$

$$u = u_0 + w_1\epsilon^{1/2} + w_2\epsilon + w_3\epsilon^{3/2} + \dots$$

Подставляя разложения (1.13) и (1.2) в (1.1) и используя соотношения (1.10)–(1.12), получим выражения для первых поправок  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в виде

$$\lambda_1 = \pm \left( \frac{v_0^T A_1 u_0}{v_0^T u_1} \right)^{1/2} \quad (1.14)$$

$$\lambda_2 = \frac{v_0^T A_1 u_1 + v_1^T A_1 u_0 - \lambda_1^2 v_1^T u_1}{2v_0^T u_1} \quad (1.15)$$

Соотношения (1.13)–(1.15) справедливы, если  $v_0^T A_1 u_0 \neq 0$  (условие "Г" в [2]). Заметим, что собственные векторы  $u_0$  и  $v_0$  определены с точностью до произвольных множителей, а присоединенные векторы  $u_1, v_1$  – с точностью до аддитивных членов  $\alpha u_0$  и  $\beta v_0$  соответственно, где  $\alpha$  и  $\beta$  – произвольные постоянные. Однако значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в (1.14), (1.15) не зависят от этого произвола.

Считая векторы  $u_0$  и  $u_1$  фиксированными, введем следующую нормировку:

$$v_0^T u_1 = 1, \quad v_1^T u_1 = 0 \quad (1.16)$$

однозначно определяющую векторы  $u_0$  и  $v_1$ . Выражения (1.14), (1.15) при этом упрощаются. Введем векторы  $f_1, q_1, f_2, q_2$  с компонентами, определяемыми соотношениями

$$f_1^s + iq_1^s = v_0^T \frac{\partial A}{\partial p_s} u_0, \quad s = 1, \dots, n \quad (1.17)$$

$$f_2^s + iq_2^s = \frac{1}{2} \left( v_0^T \frac{\partial A}{\partial p_s} u_1 + v_1^T \frac{\partial A}{\partial p_s} u_0 \right)$$

С помощью этих векторов расщепление двукратного СЗ  $\lambda_0$  описывается выражением

$$\lambda = \lambda_0 \pm \{ [(f_1, e) + i(q_1, e)]\epsilon \}^{1/2} + [(f_2, e) + i(q_2, e)]\epsilon + o(\epsilon) \quad (1.18)$$

Если  $\lambda_0$  – действительное число, то векторы  $q_1 = q_2 = 0$ .

Исследуем теперь распад трехкратного СЗ  $\lambda_0$  с жордановой клеткой третьего порядка, соответствующего  $p = p_0$ . Цепочка Жордана, отвечающая этому случаю, имеет вид

$$A_0 u_0 = \lambda_0 u_0, \quad A_0 u_1 = \lambda_0 u_1 + u_0, \quad A_0 u_2 = \lambda_0 u_2 + u_1 \quad (1.19)$$

Для левых СВ и ПВ соответственно имеем

$$v_0^T A_0 = \lambda_0 v_0^T, \quad v_1^T A_0 = \lambda_0 v_1^T + v_0^T, \quad v_2^T A_0 = \lambda_0 v_2^T + v_1^T \quad (1.20)$$

Векторы  $u_1, v_1$  связаны условиями ортогональности

$$v_0^T u_0 = v_0^T u_1 = v_1^T u_0 = 0 \quad (1.21)$$

а также равенствами

$$v_1^T u_2 = v_2^T u_1, \quad v_0^T u_2 = v_1^T u_1 = v_2^T u_0 \quad (1.22)$$

Эти соотношения легко доказать, непосредственно используя цепочки (1.19), (1.20).

Отметим, что СВ  $u_0$  и  $v_0$  определены с точностью до произвольных множителей, ПВ  $u_1, v_1$  — с точностью до аддитивных членов  $\alpha_1 u_0$  и  $\beta_1 v_0$ , а векторы  $u_2, v_2$  — с точностью до аддитивных членов  $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_0$  и  $\beta_1 v_1 + \beta_2 v_0$  соответственно, где  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i = 1, 2$ ) — произвольные постоянные.

Считая векторы  $u_0, u_1, u_2$  фиксированными, удобно нормировать векторы  $v_0, v_1, v_2$  следующим образом:

$$v_0^T u_2 = 1, \quad v_1^T u_2 = v_2^T u_2 = 0 \quad (1.23)$$

Эта нормировка однозначно определяет цепочку векторов  $v_0, v_1, v_2$ .

Опишем распад СЗ  $\lambda_0$  на три простых СЗ. В этом случае разложения СЗ и соответствующих им СВ имеют вид [2]

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \varepsilon^{1/3} + \lambda_2 \varepsilon^{2/3} + \lambda_3 \varepsilon + \dots \quad (1.24)$$

$$u = u_0 + w_1 \varepsilon^{1/3} + w_2 \varepsilon^{2/3} + w_3 \varepsilon + \dots$$

Подставляя разложения (1.24) и (1.2) в уравнение (1.1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим уравнения относительно неизвестных  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  и  $w_1, w_2, \dots$ . Из этих уравнений с использованием (1.19) – (1.23) найдем первые три коэффициента  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )

$$\lambda_1 = (v_0^T A_1 u_0)^{1/3}, \quad \lambda_2 = \frac{v_0^T A_1 u_1 + v_1^T A_1 u_0}{3\lambda_1} \quad (1.25)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{3} (v_0^T A_1 u_2 + v_1^T A_1 u_1 + v_2^T A_1 u_0)$$

Эти выражения справедливы при условии  $v_0^T A_1 u_0 \neq 0$ , которое было названо условием "Г" [2]. В этом случае первое соотношение (1.25) определяет три различных комплексных значения, после чего однозначно определяются  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$ .

Введем векторы  $h_i$  и  $t_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) с компонентами, определяемыми соотношениями

$$h_1^s + it_1^s = v_0^T \frac{\partial A}{\partial p_s} u_0$$

$$h_2^s + it_2^s = \left( v_0^T \frac{\partial A}{\partial p_s} u_1 + v_1^T \frac{\partial A}{\partial p_s} u_0 \right), \quad s = 1, \dots, n \quad (1.26)$$

$$h_3^s + it_3^s = \left( v_0^T \frac{\partial A}{\partial p_s} u_2 + v_1^T \frac{\partial A}{\partial p_s} u_1 + v_2^T \frac{\partial A}{\partial p_s} u_0 \right)$$

С помощью этих векторов распад жордановой клетки третьего порядка в  $n$ -мерном пространстве параметров описывается выражением

$$\lambda = \lambda_0 + R \varepsilon^{1/3} + \frac{(h_2, e) + i(t_2, e)}{3R} \varepsilon^{2/3} + \frac{1}{3} [(h_3, e) + i(t_3, e)] \varepsilon + o(\varepsilon), \quad (1.27)$$

$$R = [(h_1, e) + i(t_1, e)]^{1/3}$$

где кубический корень  $R$  принимает три различных комплексных значения. Если  $\lambda_0$  — действительное число, то векторы  $t_i = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

**2. Одно- и двухпараметрические семейства матриц  $A(p)$ .** Рассмотрим линейную автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = Ay \quad (2.1)$$

с матричным оператором  $A$ . Известно, что тривиальное решение системы  $y \equiv 0$  (2.1) асимптотически устойчиво, если действительные части всех СЗ матрицы  $A$  отрицательны. Если существует хотя бы одно СЗ  $\lambda$ , для которого  $\operatorname{Re}\lambda > 0$ , то система неустойчива. Случай, когда для некоторых СЗ  $\operatorname{Re}\lambda = 0$ , а для всех остальных  $\operatorname{Re}\lambda < 0$ , отвечает границе области устойчивости (ГОУ).

Рассмотрим однопараметрическое семейство матриц  $A(p)$ ,  $p \in \mathbb{R}$ . ГОУ в случае общего положения характеризуется простым СЗ  $\lambda = 0$  или парой простых комплексно-сопряженных СЗ  $\lambda = \pm i\omega$  [1]. В технической литературе эти случаи соответственно называются дивергенцией и флаттером.

Согласно (1.9) для простых СЗ  $\lambda$  в окрестности ГОУ ( $\operatorname{Re}\lambda = 0$  при  $p = p_0$ ) имеем

$$\operatorname{Re}\lambda = r(p - p_0) + o(|p - p_0|)$$

Поэтому устойчивость и неустойчивость определяются знаком величины  $r = \operatorname{Re}(v_0^T \partial A / \partial p u_0)$ . Например, если  $r > 0$ , то при  $p < p_0$  (по крайней мере при значениях  $p$ , достаточно близких к  $p_0$ )  $\operatorname{Re}\lambda < 0$ , и система асимптотически устойчива, а при  $p > p_0$  — неустойчива. Отметим, что в случае общего положения  $r \neq 0$ .

При рассмотрении общего двухпараметрического семейства вещественных матриц  $A(p)$ ,  $p \in \mathbb{R}^2$  ГОУ состоит из гладких кривых, отвечающих простому нулевому СЗ либо паре простых чисто мнимых СЗ  $\pm i\omega$  и пересекающихся трансверсально в своих концевых точках. Вектор нормали  $r$  к этим кривым определяется соотношением (1.7), где векторы  $u_0, v_0$  соответствуют СЗ  $\lambda_0 = 0$  или  $\lambda_0 = \pm i\omega$ . Непосредственно из (1.9) следует, что вектор нормали  $r$  лежит в области неустойчивости. В точках излома ГОУ семейство матриц  $A$  характеризуется следующими жордановыми структурами (стратами):  $F_1(0^2)$ ,  $F_2(0, \pm i\omega)$ ,  $F_3(\pm i\omega_1, \pm i\omega_2)$ , означающими соответственно наличие двукратного нулевого СЗ с жордановой клеткой второго порядка, наличие простого нулевого СЗ и пары простых чисто мнимых комплексно-сопряженных СЗ и, наконец, наличие двух различных пар простых чисто мнимых комплексно-сопряженных СЗ [1].

Используя разложения (1.18), для жордановой клетки второго порядка с  $\lambda_0 = 0$  имеем

$$\lambda = \pm \sqrt{(f_1, e)\epsilon} + (f_2, e)\epsilon + o(\epsilon)$$

где векторы  $f_1$  и  $f_2$  соответствуют  $\lambda_0 = 0$  и вычисляются с помощью (1.17). В случае общего положения  $f_1$  и  $f_2$  линейно независимы.

Если при фиксированном направлении  $e$   $(f_1, e) < 0$  и  $(f_2, e) < 0$ , то при достаточно малых  $\epsilon$  получим  $\operatorname{Re}\lambda < 0$  (устойчивость). Если же одно из этих неравенств имеет обратный знак, то при достаточно малых  $\epsilon$  для одного из СЗ имеем  $\operatorname{Re}\lambda > 0$  (неустойчивость).

Для дальнейших рассуждений воспользуемся понятием касательного конуса (КК) [4]. КК к области устойчивости в точке ее границы — это множество направлений векторов, по которым из данной точки можно выпустить кривую, лежащую за исключением начальной точки в области устойчивости. Таким образом, КК — первое приближение к области устойчивости в окрестности особой точки; он называется невырожденным, если высекает на сфере множество ненулевой меры, в противном случае КК называется вырожденным.

КК в точке ГОУ, соответствующей страту  $F_1(0^2)$ , запишется в виде

$$K_{F_1} = \{e : (f_1, e) \leq 0, (f_2, e) \leq 0\} \quad (2.2)$$

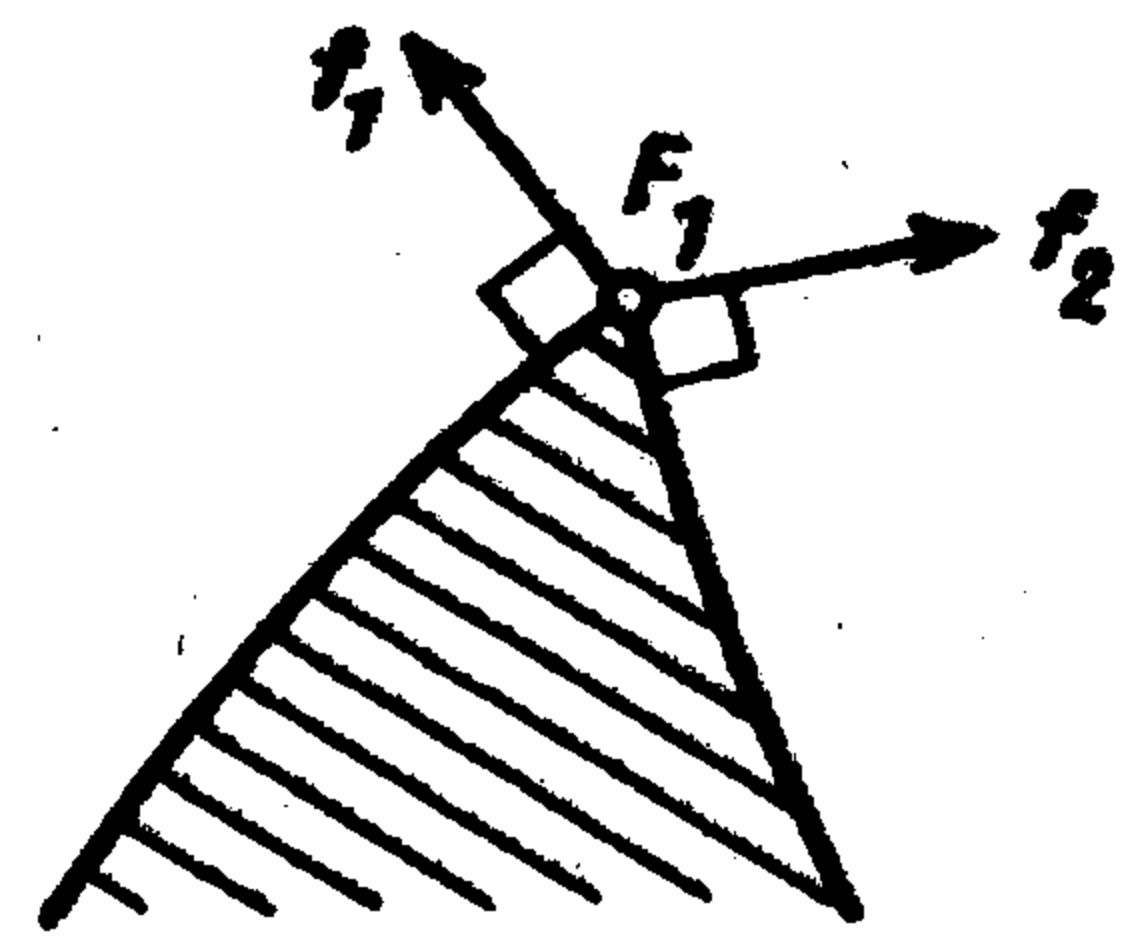
Используя разложения для простых СЗ (1.9), аналогично построим КК в точках ГОУ, отвечающих стратам  $F_2(0, \pm i\omega), F_3(\pm i\omega_1, \pm i\omega_2)$ ,

$$K_{F_2} = \{e : (r_0, e) \leq 0, (r, e) \leq 0\} \quad (2.3)$$

$$K_{F_3} = \{e : (r_1, e) \leq 0, (r_2, e) \leq 0\}$$

где векторы  $r_0, r, r_1, r_2$  соответствуют простым СЗ  $0, \pm i\omega, \pm i\omega_1, \pm i\omega_2$  соответственно. В случае общего положения  $r_0$  и  $r$ , а также  $r_1$  и  $r_2$  линейно независимы.

Согласно (2.2), (2.3) область устойчивости в особых точках  $F_1, F_2, F_3$  вклинивается в область неустойчивости, причем угол раскрытия клина меньше  $\pi$  (фиг. 1, область устойчивости заштрихована). Этот факт отражает известный принцип "хрупкости хорошего" [1, 5] и свойство квазивыпуклости области устойчивости [4].



Фиг. 1

*Пример.* Рассмотрим задачу об устойчивости состояния равновесия в цепи вольтовой дуги, включенной последовательно с сопротивлением  $R$ , самоиндукцией  $L$  и шунтированной емкостью  $C$  [6]. Дифференциальные уравнения системы, линеаризованной в окрестности состояния равновесия, имеют вид

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{\rho\xi}{L} + \frac{\eta}{L}, \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\xi}{C} - \frac{\eta}{RC} \quad (2.4)$$

где  $\xi(t), \eta(t)$  – ток и напряжение на вольтовой дуге,  $\rho$  – сопротивление дуги.

Система (2.4) зависит от четырех параметров: трех положительных величин  $L, C, R$  и параметра  $\rho$ , который может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Полагая параметры  $L$  и  $C$  фиксированными, исследуем устойчивость системы (2.4) на плоскости параметров  $R$  и  $\rho$ .

Характеристическое уравнение системы (2.4) записывается в виде [6]

$$\lambda^2 + \left(\frac{1}{RC} + \frac{\rho}{L}\right)\lambda + \frac{1}{LC}\left(\frac{\rho}{R} + 1\right) = 0 \quad (2.5)$$

В точке  $R = R_*, \rho = -R_*$  ( $R_* = \sqrt{LC}$ ) характеристическое уравнение (2.5) имеет двукратный нуль  $\lambda_0 = 0$ , которому отвечает жорданова клетка второго порядка. Действительно, используя обозначения  $p_1 = R, p_2 = \rho$  и

$$A = \begin{vmatrix} -\rho/L & 1/L \\ -1/C & -1/(RC) \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

согласно формулам (1.10), (1.11), (1.16) найдем

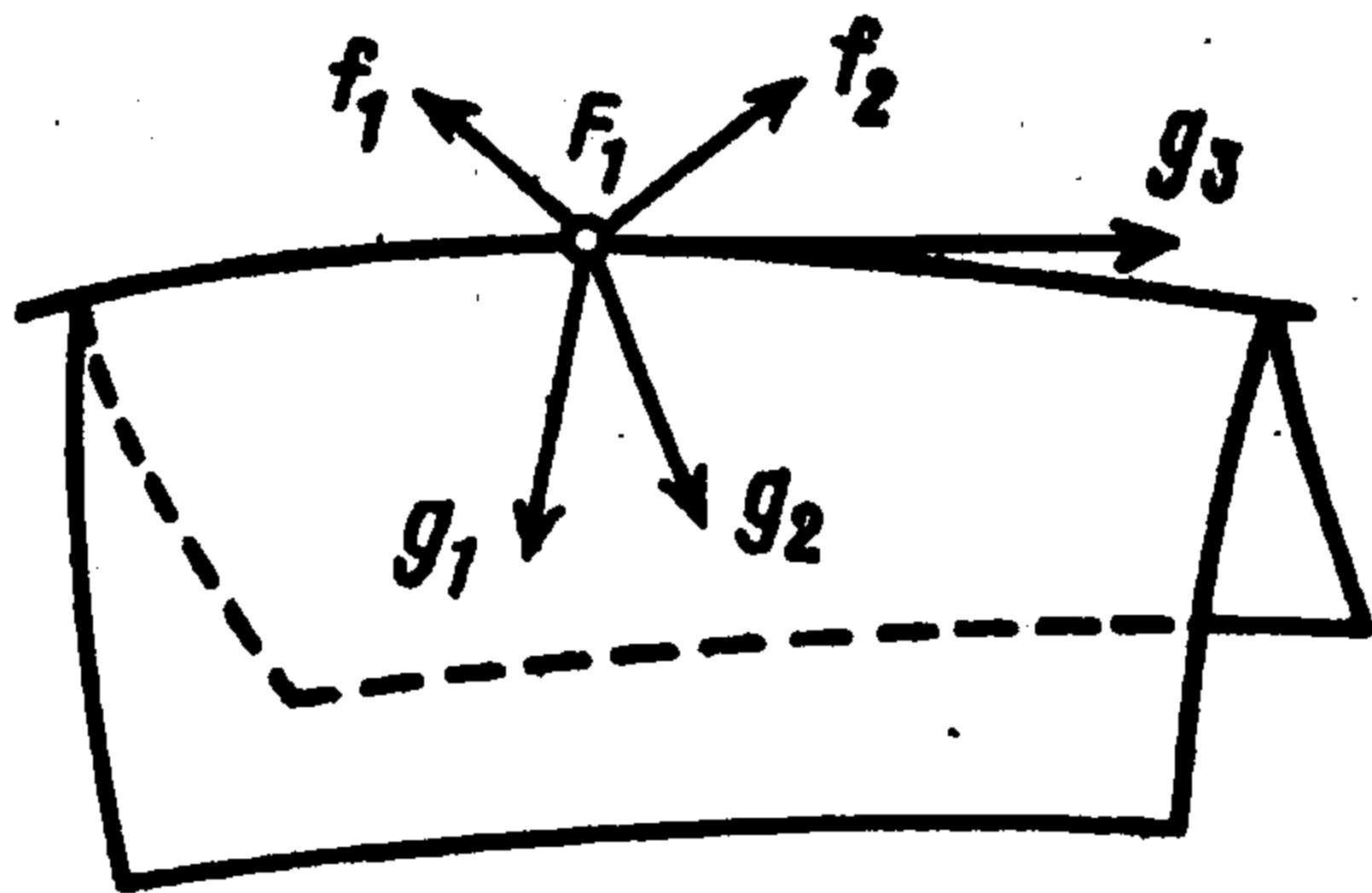
$$u_0 = \begin{vmatrix} 1 \\ -\sqrt{LC} \end{vmatrix}, \quad u_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ -L \end{vmatrix}, \quad v_0 = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{LC} \\ 1/L \end{vmatrix}, \quad v_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

С помощью этих векторов и матрицы  $A$  из (2.6) согласно (1.17) получим

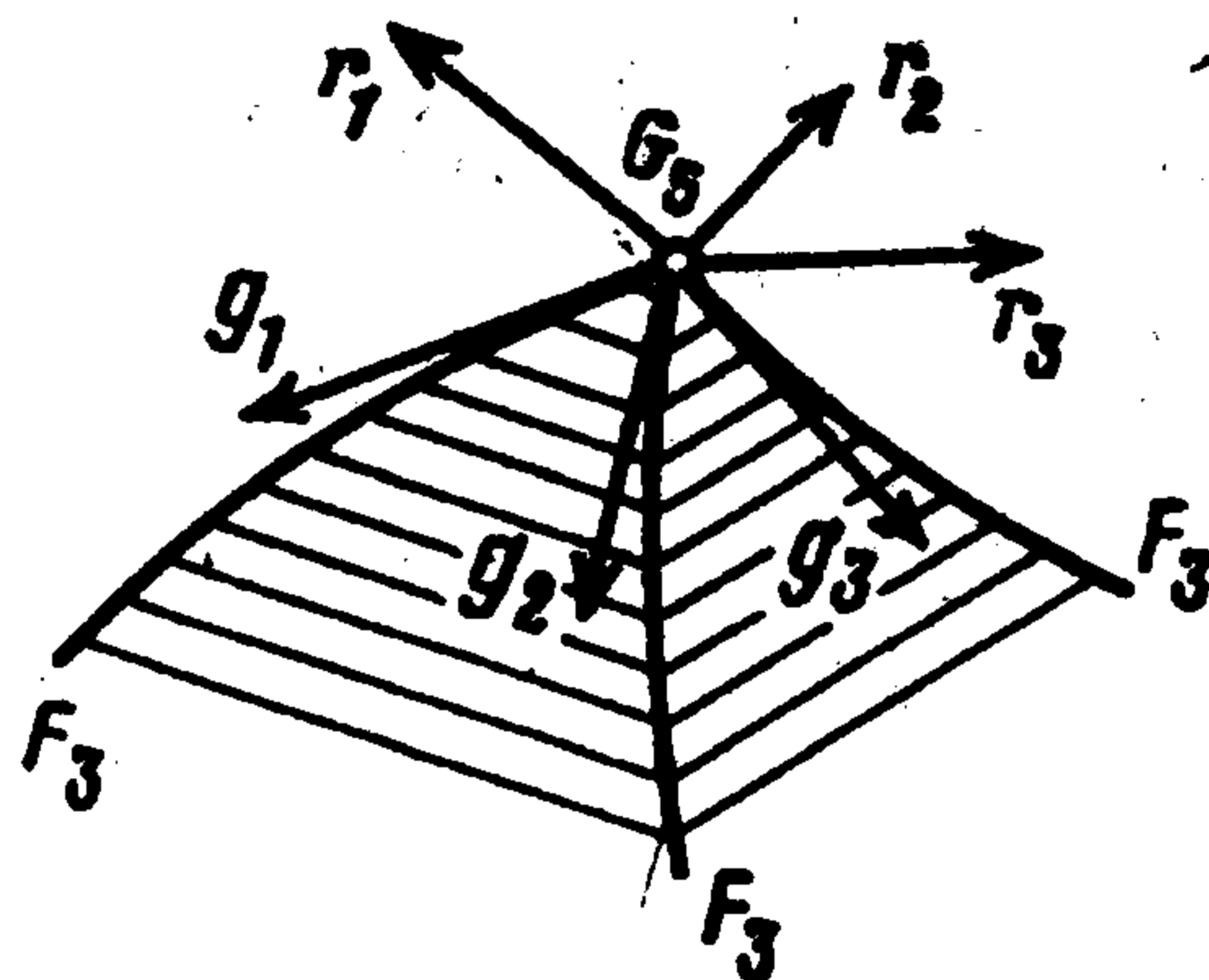
$$f_1 = -\frac{1}{L\sqrt{LC}} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad f_2 = \frac{1}{2L} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

и, таким образом, найдем КК (2.2) к области устойчивости в точке  $R = R_*, \rho = -R_*$ . Угол его раскрытия равен  $\pi/2$ , так как векторы  $f_1$  и  $f_2$  ортогональны. Этот результат согласуется с полученным ранее [6]: ГОУ описывается прямой  $\rho = -R, 0 \leq R \leq R_*$  и гиперболой  $\rho = -L/(RC), R_* \leq R$ .

**3. Трехпараметрические семейства.** Рассмотрим гладкое трехпараметрическое семейство вещественных матриц  $A(p), p \in \mathbb{R}^3$  общего положения. ГОУ для уравнения (2.1) в трехмерном пространстве – гладкая поверхность, характеризуемая одним



Фиг. 2



Фиг. 3

простым СЗ  $\lambda = 0$  или парой простых чисто мнимых СЗ  $\lambda = \pm i\omega$  [1]. Вектор нормали к этой поверхности  $r$  определяется, как и в двухпараметрическом случае, соотношением (1.7) и лежит в области неустойчивости. Особенности ГОУ исчерпываются следующим списком [1]: "двугранный угол", "трехгранный угол", "тупик на ребре" и "излом ребра".

Особенность типа "двугранный угол" связана со стратами  $F_1(0^2)$ ,  $F_2(0, \pm i\omega)$  и  $F_3(\pm i\omega_1, \pm i\omega_2)$ , рассмотренными в разд. 2. Поэтому КК к области устойчивости для этих особенностей определяются соотношениями (2.2), (2.3).

КК  $K_{F_1}$  удобно описать, определив векторы  $g_1, g_2, g_3$ , удовлетворяющие условиям

$$(g_i, f_j) = -\delta_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2 \quad (3.1)$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $f_1, f_2$  — векторы из (2.2). Уравнения (3.1) разрешимы относительно векторов  $g_i$ , так как векторы  $f_1, f_2$  линейно независимы в случае общего положения.

Вектор  $g_3$  направлен по ребру "двугранного угла", а векторы  $g_1$  и  $g_2$  касательны к граням этого угла (фиг. 2). С использованием векторов  $g_1, g_2, g_3$  множество (2.2) в трехмерном случае описывается следующим образом:

$$K_{F_1} = \{e : e = \alpha g_1 + \beta g_2 + \gamma g_3; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0, \beta \geq 0\} \quad (3.2)$$

Подставив выражение  $e = \alpha g_1 + \beta g_2 + \gamma g_3$  в (2.2) с учетом (3.1), найдем  $(f_1, e) = -\alpha \leq 0$ ,  $(f_2, e) = -\beta \leq 0$ , что доказывает представление (3.2). Аналогичные представления для КК  $K_{F_2}$  и  $K_{F_3}$  можно получить, используя в (3.1) вместо  $f_1, f_2$  векторы  $r_0, r_1$  и  $r_1, r_2$  соответственно.

Особенность типа "трехгранный угол" характеризуется следующими стратами:  $G_3(0^2, \pm i\omega)$  — двукратный нуль с жордановой клеткой второго порядка и пара простых чисто мнимых комплексно-сопряженных СЗ,  $G_4(0, \pm i\omega_1, \pm i\omega_2)$  — простой нуль и две пары различных простых чисто мнимых СЗ,  $G_5(\pm i\omega_1, \pm i\omega_2, \pm i\omega_3)$  — три пары различных простых чисто мнимых СЗ [1]. Заметим, что эти структуры отличаются от стратов  $F_1, F_2, F_3$ , рассмотренных выше, наличием дополнительной пары типа  $\pm i\omega$ . Поэтому КК в области устойчивости для этих случаев аналогично (2.2), (2.3) запишутся в виде

$$\begin{aligned} K_{G_3} &= \{e : (f_1, e) \leq 0, (f_2, e) \leq 0, (r, e) \leq 0\} \\ K_{G_4} &= \{e : (r_0, e) \leq 0, (r_1, e) \leq 0, (r_2, e) \leq 0\} \\ K_{G_5} &= \{e : (r_1, e) \leq 0, (r_2, e) \leq 0, (r_3, e) \leq 0\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

где векторы  $r$  и  $r_i$  соответствуют простым парам  $\pm i\omega$  и  $\pm i\omega_i (i = 1, 2, 3)$  и определяются из соотношений (1.7), вектор  $r_0$  соответствует простому нулю, а векторы  $f_1$  и  $f_2$  соответствуют двукратному нулю с жордановой клеткой второго порядка и находятся из (1.17).

Множества (3.3) определяются тремя векторами и описывают трехгранный угол, фиг. 3, целиком лежащий в замкнутом полупространстве. Так же, как и в (3.1), трем векторам, определяющим трехгранный угол, например  $r_1, r_2, r_3$  в  $K_{G5}$ , можно поставить в соответствие векторы  $g_1, g_2, g_3$  по формулам

$$(g_i, r_j) = -\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

Векторы  $g_i$  являются касательными векторами к граням трехгранного угла. С их помощью множество  $K_{G5}$  описывается следующим образом:

$$K_{G5} = \{e : e = \alpha g_1 + \beta g_2 + \gamma g_3; \alpha, \beta, \gamma \geq 0\} \quad (3.4)$$

Аналогичные представления можно получить и для  $K_{G3}, K_{G4}$ .

Отметим, что векторы, определяющие дву- и трехгранные углы, в случае общего положения линейно независимы.

Особенность "тупик на ребре" характеризуется стратом  $G_2((\pm i\omega)^2)$  – наличием пары двукратных чисто мнимых комплексно-сопряженных СЗ с жордановыми клетками второго порядка. Известно, что область устойчивости в окрестности этой особенности с точностью до гладкой замены координат (диффеоморфизма) имеет вид [1]

$$z + |\operatorname{Re} \sqrt{x + iy}| < 0 \quad (3.5)$$

КК к области устойчивости (3.5) в особой точке границы  $G_2 (x = y = z = 0)$  является вырожденным и представляет собой плоский угол

$$K_{G2}^0 = \{e = (e_1, e_2, e_3) : e_1 \leq 0, e_2 = 0, e_3 \leq 0\}$$

Отметим, что особенность  $G_2$  – "тупик" на ребре  $F_3$ , образуется при столкновении двух простых СЗ  $i\omega_1$  и  $i\omega_2$ , отвечающих  $F_3$ .

Вычислим КК для этой особенности в общем случае. Используя разложения (1.18), для жордановой клетки второго порядка с  $\lambda_0 = i\omega$  имеем

$$\lambda = i\omega \pm [(f_1, e) + i(q_1, e)]^{1/2} \varepsilon^{1/2} + [(f_2, e) + i(q_2, e)]\varepsilon + o(\varepsilon) \quad (3.6)$$

где векторы  $f_1, q_1, f_2, q_2$  соответствуют  $\lambda_0 = i\omega$  и вычисляются с помощью (1.17). Разложение для комплексно-сопряженной величины с  $\lambda_0 = -i\omega$  можно получить, применив к (3.6) операцию комплексного сопряжения.

Если в подкоренном выражении в (3.6)  $(q_1, e) \neq 0$  либо  $(f_1, e) > 0$ , то одно из СЗ (3.6) при достаточно малых  $\varepsilon$  имеет положительную действительную часть (неустойчивость). В случае, когда  $(f_1, e) \leq 0, (q_1, e) = 0$ , второй член разложения – чисто мнимое число и, следовательно, при  $(f_2, e) < 0$  для достаточно малых  $\varepsilon$  имеем  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  (устойчивость), а при  $(f_2, e) > 0$  получим  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  (неустойчивость). Таким образом, КК к области устойчивости в особой точке границы  $G_2$  является плоским углом и имеет вид

$$K_{G2} = \{e : (f_1, e) \leq 0, (f_2, e) \leq 0, (q_1, e) = 0\} \quad (3.7)$$

Определив векторы  $g_1, g_2$ , удовлетворяющие условиям

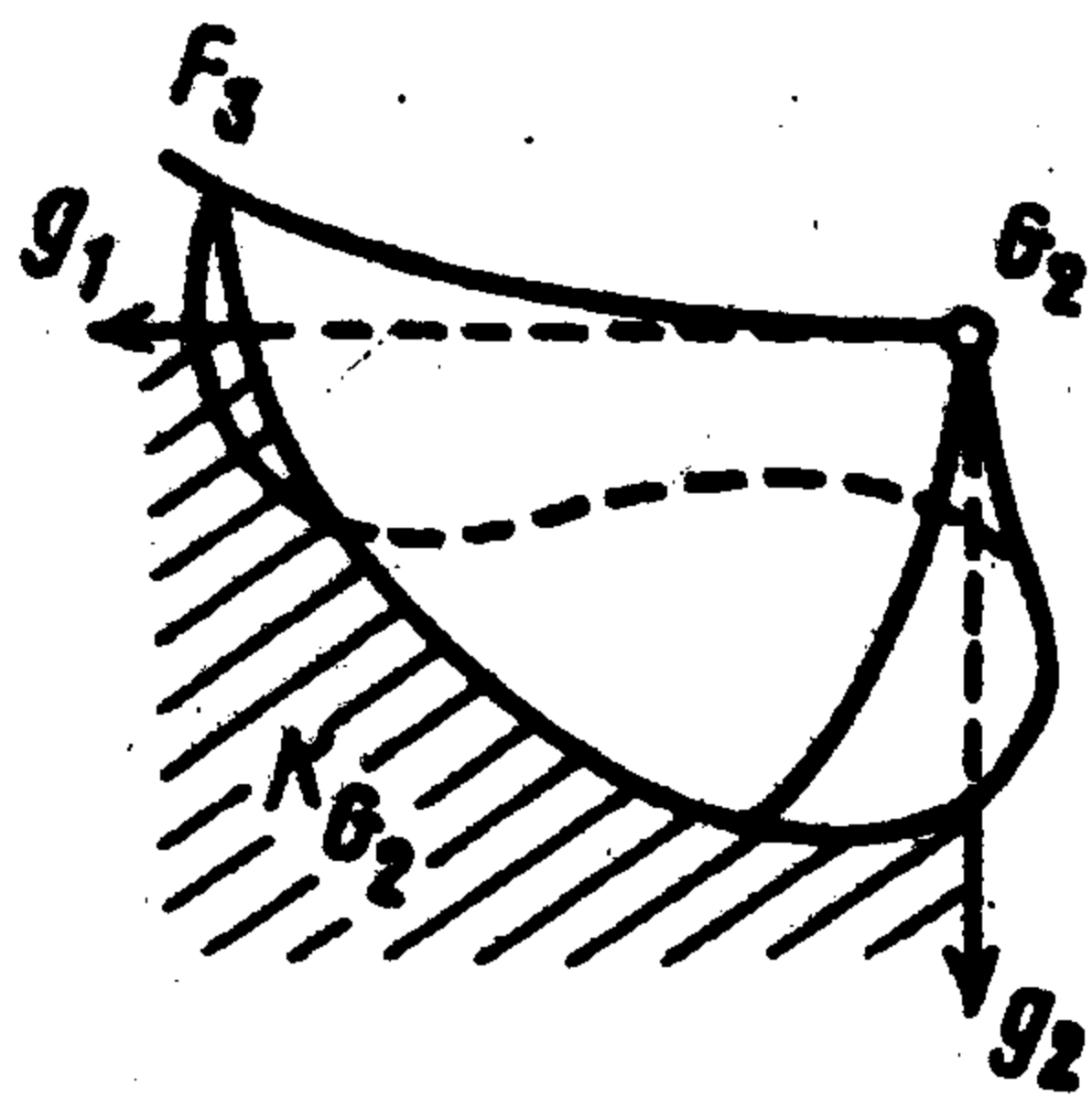
$$(g_i, f_j) = -\delta_{ij}, \quad (g_i, q_1) = 0, \quad i, j = 1, 2$$

запишем множество (3.7) следующим образом:

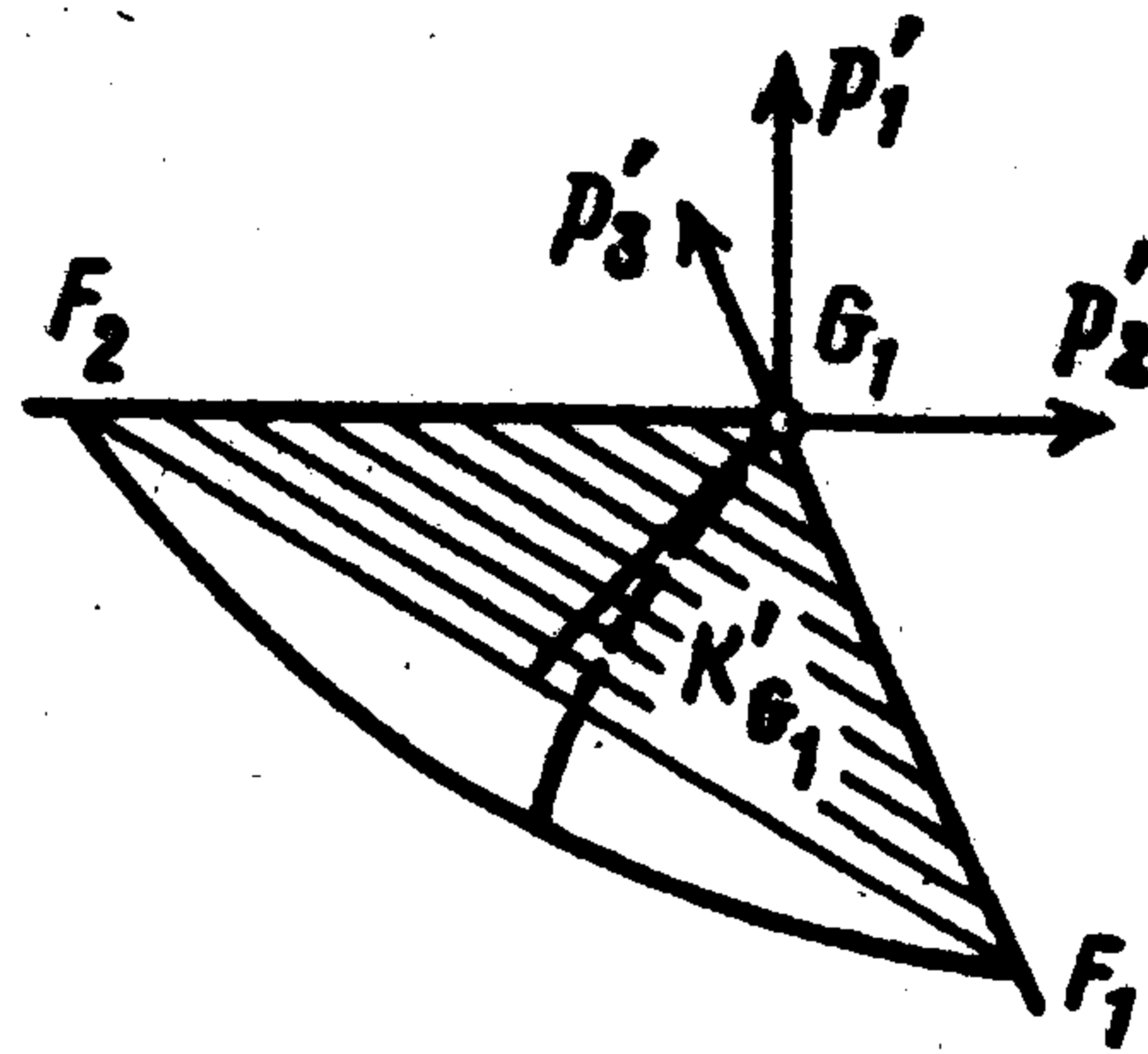
$$K_{G2} = \{e : e = \alpha g_1 + \beta g_2; \alpha, \beta \geq 0\} \quad (3.8)$$

где  $g_1$  и  $g_2$  направлены по сторонам плоского угла  $K_{G2}$ , причём  $g_1$  – касательный вектор к ребру  $F_3$  области устойчивости (фиг. 4).

Отметим, что векторы  $f_1, f_2, g_1$  в случае общего положения линейно независимы.



Фиг. 4



Фиг. 5

**4. Излом ребра.** Особенность типа "излом ребра" характеризуется стратом  $G_1(0^3)$  – трехкратным нулевым СЗ оператора  $A(p_0)$  с цепочкой Жордана (1.19). Построим версальную деформацию матрицы  $A_0 = A(p_0)$ . Она определяется семейством матриц  $A'(p')$ , гладко зависящим от вектора параметров  $p' \in \mathbb{R}^d$ , таким, что любое гладкое семейство  $A(p)$ ,  $p \in \mathbb{R}^3$  ( $A(p_0) = A_0$ ) в окрестности  $p = p_0$  представимо в виде [1]

$$A(p) = C(p)A'(\varphi(p))C^{-1}(p) \quad (4.1)$$

где  $C(p)$  – семейство невырожденных матриц, гладко зависящих от  $p$ ,  $p' = \varphi(p)$  – гладкое отображение, переводящее окрестность точки  $p_0$  в пространстве  $\mathbb{R}^3$  в окрестность начала координат пространства  $p' \in \mathbb{R}^d$ ,  $\varphi_1(p_0) = \dots = \varphi_d(p_0) = 0$ . Версальная деформация с минимально возможным числом параметров  $p'_1, \dots, p'_d$  называется миниверсальной. Миниверсальную деформацию матрицы  $A_0$  можно выбрать равной блочно-диагональному семейству вида [1]

$$A'(p') = A'(0) + B(p') \quad (4.2)$$

В этом выражении  $A'(0)$  – жорданова верхнетреугольная матрица оператора  $A_0$ , а  $B(p')$  – блочно-диагональная матрица, блоки которой соответствуют собственным значениям матрицы  $A_0$ . Первый блок матрицы  $A'(p')$ , отвечающий трехкратному нулю ( $0^3$ ), можно выбрать в виде

$$D_1(p') = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ p'_1 & p'_2 & p'_3 \end{vmatrix} \quad (4.3)$$

а другие блоки соответствуют собственным числам матрицы  $A_0$  с отрицательной вещественной частью.

В силу соотношения (4.1) характеристические уравнения для матриц  $A(p)$  и  $A'(p')$ ,  $p' = \varphi(p)$  тождественно совпадают. Устойчивость матрицы  $A'(p')$  в окрестности точки  $p' = 0$  в силу ее блочно-диагональной структуры определяется первым блоком (4.3).

Характеристическое уравнение для него имеет вид  $\lambda^3 - p'_3\lambda^2 - p'_2\lambda - p'_1 = 0$ . Область устойчивости в пространстве параметров  $p'_1, p'_2, p'_3$  определяется с помощью условий Рауса–Гурвица

$$p'_1 + p'_2p'_3 > 0, \quad p'_1 < 0, \quad p'_2 < 0, \quad p'_3 < 0 \quad (4.4)$$

Эта область представлена на фиг. 5. Непосредственно из (4.4) найдем, что КК к области устойчивости семейства  $A'(p')$  в точке  $p' = 0$  является вырожденным и определяется соотношениями

$$e'_1 = 0, \quad e'_2 \leq 0, \quad e'_3 \leq 0 \quad (4.5)$$

Вычислим векторы  $h'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), описывающие распад жордановой клетки третьего порядка  $D_1(0)$ , найдя СВ и ПВ  $u'_i$  и  $v'_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) при  $p' = 0$  и используя формулы (1.26). В результате находим

$$h'_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^T, \quad h'_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T, \quad h'_3 = (0, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$$

С помощью этих векторов КК (4.5) запишется в виде

$$K'_{G1} = \{e' = (e'_1, \dots, e'_d) : (h'_1, e') = 0, (h'_2, e') \leq 0, (h'_3, e') \leq 0\} \quad (4.6)$$

Определим КК для семейства  $A(p)$ . С этой целью найдем связь между векторами  $h'_j$  и  $h_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Пусть  $u'_i, v'_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) – правые и левые собственные и присоединенные векторы матрицы  $A'(0)$ , отвечающие трехкратному СЗ  $\lambda_0 = 0$  и удовлетворяющие условиям нормировки (1.23). Тогда, используя (4.1), найдем, что СВ и ПВ  $u_i, v_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) матрицы  $A_0$  связаны с  $u'_i, v'_i$  соотношениями

$$u_i = C(p_0)u'_i, \quad v_i^T = v'^T C^{-1}(p_0), \quad i = 0, 1, 2 \quad (4.7)$$

Продифференцируем выражение (4.1) по  $p_i$  и найдем значение производной при  $p = p_0, p' = \varphi(p_0) = 0$

$$\frac{\partial A}{\partial p_i} = \frac{\partial C}{\partial p_i} A' C^{-1} + C A' \frac{\partial C^{-1}}{\partial p_i} + \sum_{j=1}^d (C \frac{\partial A'}{\partial p'_j} C^{-1}) \frac{\partial \varphi_j}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.8)$$

Умножим обе части равенства (4.8) слева на  $v_0^T$  и справа на  $u_0$ . В результате имеем

$$h_1^T = v_0^T \frac{\partial A}{\partial p_i} u_0 = \sum_{j=1}^d \frac{\partial \varphi_j}{\partial p_i} \left( v_0^T \frac{\partial A'}{\partial p'_j} u'_0 \right), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.9)$$

Здесь использовались соотношения (4.7) и  $A'(0)u'_0 = 0, v_0^T A'(0) = 0$ . Таким образом, из (4.9) получим связь между векторами  $h_1$  и  $h'_1$

$$h_1^T = h_1'^T [\partial \varphi / \partial p]; \quad [\partial \varphi / \partial p] = [\partial \varphi_i / \partial p_j], \quad i = 1, \dots, d, \quad j = 1, 2, 3$$

Аналогично можно доказать справедливость такой связи и для векторов  $h_2$  и  $h_3$ . При доказательстве используются выражения (4.7), (4.8) и тождества

$$v_s^T \frac{\partial C}{\partial p_i} C^{-1} u_j + v_s^T C \frac{\partial C^{-1}}{\partial p_i} u_j = v_s^T \frac{\partial}{\partial p_i} (C C^{-1}) u_j = 0, \quad s, j = 0, 1$$

Итак, векторы  $h_s$  и  $h'_s$  связаны зависимостью

$$h_s^T = h_s'^T [\partial \varphi / \partial p], \quad s = 1, 2, 3 \quad (4.10)$$

Найдем теперь связь между векторами направлений  $e$  и  $e'$  из КК в пространствах  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^d$  соответственно

$$e'_i = \frac{dp'_i}{d\varepsilon} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j} \frac{dp_j}{d\varepsilon} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j} e_j, \quad i = 1, \dots, d, \quad j = 1, 2, 3$$

Следовательно,

$$e' = [\partial \varphi / \partial p] e \quad (4.11)$$

Умножив обе части равенства (4.10) на  $e$  и используя (4.11), получим

$$h_s^T e = h_s'^T e', \quad s = 1, 2, 3 \quad (4.12)$$

С помощью (4.6) и (4.12) найдем КК в области устойчивости для особенности  $G_1(0^3)$  в виде

$$K_{G_1} = \{e : (h_1, e) = 0, (h_2, e) \leq 0, (h_3, e) \leq 0\} \quad (4.13)$$

КК  $K_{G_1}$  вырожден и является плоским углом. Напомним, что векторы  $h_1, h_2, h_3$ , его определяющие, вычисляются по формулам (1.26) с помощью СВ и ПВ, отвечающих трехкратному нулю. Векторы  $h_1, h_2, h_3$  в случае общего положения линейно независимы.

Заметим, что КК лежит в плоскости, в которой разложение (1.27) трехкратного нуля по степеням  $\epsilon^{1/3}$  несправедливо, так как в ней  $v_0^T A_1 u_0 = (h_1, e) = 0$ . Поэтому КК в этом случае нельзя найти методом, который применялся для изучения других особенностей. По этой причине здесь использовался подход, связанный с методом нормальных форм.

**5. Пример.** Рассмотрим двойной маятник Циглера с двумя независимыми параметрами диссипации [7]. Он представляет собой систему с двумя степенями свободы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , состоящую из двух невесомых звеньев равной длины  $l$ , несущую сосредоточенные массы  $m_1 = 2m$  и  $m_2 = m$  и нагруженную на свободном конце следящей силой  $P$ . Предполагается, что шарниры системы вязкоупругие и в них возникают моменты

$$M_1 = k\varphi_1 + c_1\dot{\varphi}_1, \quad M_2 = k(\varphi_2 - \varphi_1) + c_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)$$

Постоянные  $k, c_1, c_2$  характеризуют упругие и диссипативные свойства шарниров. Линеаризованные уравнения колебаний маятника около положения равновесия  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  имеют вид [7]

$$3\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + (\gamma_1 + \gamma_2)\dot{\varphi}_1 - \gamma_2\dot{\varphi}_2 + (2-p)\varphi_1 + (p-1)\varphi_2 = 0 \quad (5.1)$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 - \gamma_2\dot{\varphi}_1 + \gamma_2\dot{\varphi}_2 - \varphi_1 + \varphi_2 = 0$$

где использованы безразмерные величины: параметры диссипации  $\gamma_1 = c_1/\sqrt{kml^2}$ ,  $\gamma_2 = c_2/\sqrt{kml^2}$ , сила  $p = Pl/k$  и время  $\tau = t\sqrt{k/ml^2}$ . Введением переменных  $\varphi_3 = \dot{\varphi}_1$  и  $\varphi_4 = \dot{\varphi}_2$  уравнения (5.1) запишем в виде

$$\dot{\varphi} = A\varphi, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^T \quad (5.2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p/2 - 3/2 & 1 - p/2 & -\gamma_1/2 - \gamma_2 & \gamma_2 \\ 5/2 - p/2 & p/2 - 2 & \gamma_1/2 + 2\gamma_2 & -2\gamma_2 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Исследуем особенности ГОУ системы (5.2), (5.3) в пространстве трех параметров  $\gamma_1, \gamma_2, p$ . Корни характеристического уравнения системы (5.2), (5.3) при  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$  определяются выражением [7, 8]

$$\lambda^2 = (p - 7/2 \pm \Delta)/2, \quad \Delta = \sqrt{(p - 7/2)^2 - 2} \quad (5.4)$$

Следовательно, при  $p \in [0, p_0)$  ( $p_0 = 7/2 - \sqrt{2}$ ) имеются две различные пары комплексно-сопряженных мнимых СЗ, что соответствует особенности "двугранный угол" ( $F_3$ ). Значению  $p_0$  отвечает пара комплексно-сопряженных мнимых СЗ с цепочкой Жордана (1.10), что означает особенность "тупик на ребре" ( $G_2$ ). Таким образом, отрезок

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad p \in [0, p_0] \quad (5.5)$$

является ребром ГОУ с тупиком в точке  $p = p_0$  (фиг. 6).

Во внутренней точке отрезка (5.5) КК  $K_{F_3}(p)$  определяется из (2.3). Векторы  $r_1$  и  $r_2$ , вычисленные по формулам (1.7) для матрицы  $A$  из (5.3) равны

$$r_{1,2}(p) = (\pm(3 - 2p)/(16\Delta) - 1/8, \pm(19 - 6p)/(8\Delta) - 3/4, 0)^T \quad (5.6)$$

где знак плюс относится к  $r_1$ , а минус — к  $r_2$ . При увеличении  $p$  от нуля угол между векторами  $r_1$  и  $r_2$  (равный разности  $\pi$  и величины угла раскрытия двугранного угла) увеличивается и при  $p \rightarrow p_0$  достигает  $\pi$ , а модули векторов  $r_1$  и  $r_2$  при этом стремятся к бесконечности, так как  $\Delta = 0$  при  $p = p_0$ . Таким образом, КК вырождается, переходя в конус  $K_{G2}$  "тупика на ребре" в точке  $p = p_0$  (фиг. 6). КК  $K_{G2}$  определен в (3.7), где векторы  $f_1, q_1, f_2$  вычисляются по формулам (1.17) и для матрицы (5.3) с точностью до положительного множителя принимают вид

$$f_1 = (0, 0, 1)^T, \quad q_1 = (1, -4, -5\sqrt{2}, 0)^T, \quad f_2 = (-1, -6, 0)^T \quad (5.7)$$

Этот КК можно записать в виде

$$K_{G2} = \{(e_1, e_2, e_3) : e_1 = (4 + 5\sqrt{2})e_2, \quad e_2 \geq 0, \quad e_3 \leq 0\} \quad (5.8)$$

В пространстве параметров  $(\gamma_1, \gamma_2, p)$  он представляет собой плоский угол.

При каждом фиксированном значении параметров  $\gamma_1, \gamma_2$  критическое значение нагрузки  $p_{cr}$  определяется как наименьшее значение  $p$ , при котором система становится неустойчивой. Рассмотрим параметры диссипации в виде  $\gamma_1 = e_1 \epsilon, \gamma_2 = e_2 \epsilon$ , где  $\epsilon$  — малое положительное число. Поскольку отрезок (5.5) является ребром ГОУ, предел критической нагрузки  $p_0^\epsilon = \lim p_{cr}(\gamma_1, \gamma_2)$  при  $\epsilon \rightarrow 0$  для фиксированного направления  $(e_1, e_2)$  равен значению  $p$ , при котором вектор  $e = (e_1, e_2, 0)$  выходит из КК  $K_{F3}(p)$  (при росте  $p$  от нуля). При этом выполняется условие  $(r_1(p_0^\epsilon), e) = 0$  или  $(r_2(p_0^\epsilon), e) = 0$ . Например, при  $\gamma_1 = \epsilon, \gamma_2 = 0$  имеем  $e = (1, 0, 0)$ ,  $p_0^\epsilon = 2$ ,  $r_2(2) = (0, -120, 0)$ ,  $(r_2(2), e) = 0$ . Отсюда видно, что значение предела критической нагрузки  $p_0^\epsilon$  различно для различных направлений  $(e_1, e_2)$ . Для всех  $(e_1, e_2) \neq c(4 + 5\sqrt{2}, 1)$  ( $c > 0$ ) этот предел меньше  $p_0$ . При  $(e_1, e_2) = c(4 + 5\sqrt{2}, 1)$  имеем  $p_0^\epsilon = p_0$ . Это связано с тем, что направления  $(4 + 5\sqrt{2}, 1, \alpha)$  при  $\alpha \leq 0$  принадлежат КК  $K_{G2}$  из (5.8).

Смыкание "двугранного угла" в точке особенности "тупик на ребре" геометрически интерпретирует явление дестабилизации неконсервативной системы малыми диссипативными силами и неопределенность критической нагрузки [7, 8]. Следует ожидать проявления подобных эффектов и для других систем с особенностями ГОУ типа "тупик на ребре" и "излом ребра".

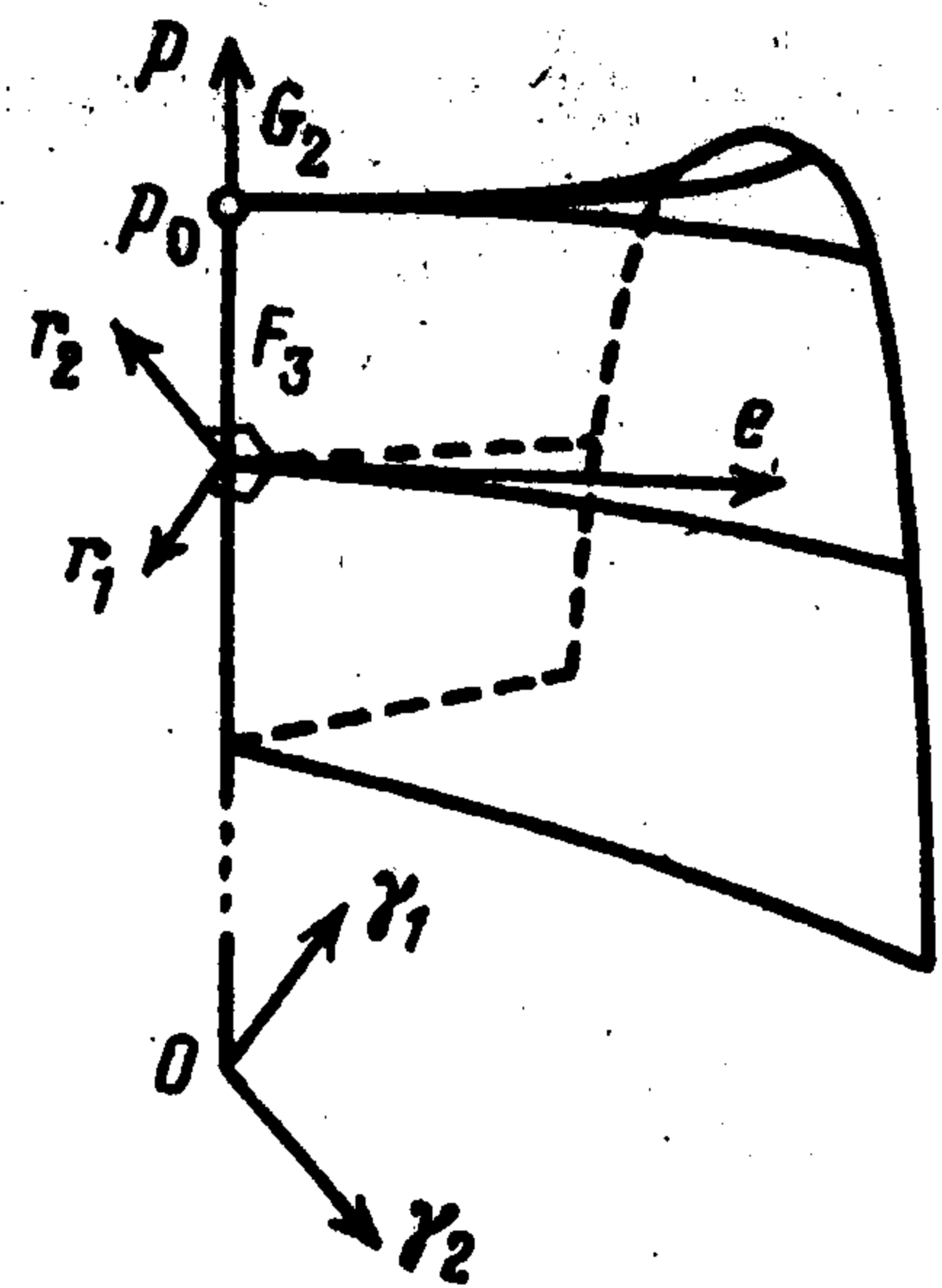
Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-00735).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
2. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15. Вып. 3. С. 3–80.
3. Seyranian A.P. Sensitivity analysis of multiple eigenvalues // Mech. Struct. and Mach. 1993. V. 21. № 2. P. 261–284.
4. Левантовский Л.В. О границе множества устойчивых матриц // Успехи мат. наук. 1980. Т. 35. Вып. 2. С. 213–214.
5. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 127 с.
6. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
7. Herrmann G., Jong I.-C. On the destabilizing effect of damping in nonconservative elastic systems // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1965. V. 32. № 3. P. 592–597.
8. Сейранян А.П. О стабилизации неконсервативных систем диссипативными силами и неопределенности критической нагрузки // Докл. РАН. 1996. Т. 348. № 3. С. 323–326.

Москва

Поступила в редакцию  
20.11.1997



Фиг. 6