УДК 531.36

© 1998 г. А.И. Овсеевич, Т.Ю. Фигурина

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ ДОСТИЖИМОСТИ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Исследуется асимптотика областей достижимости сингулярно-возмущенных линейных автономных управляемых систем. Показано, что если подействовать на область достижимости явно задаваемым масштабирующим линейным оператором, то полученные области сходятся.

Рассматривается сингулярно-возмущенная линейная автономная управляемая система с малым параметром ε при производных быстрых компонент вектора состояния на конечном интервале времени $t \in [0, T]$ и исследуется асимптотическое поведение ее областей достижимости (ОД) $K(\varepsilon, t)$ при $\varepsilon \to 0$. Для систем, устойчивых по быстрым переменным, была доказана [1] сходимость $K(\varepsilon, t)$. Для систем, в которых отсутствуют медленные переменные, была обнаружена [2] сходимость не самих ОД, а их форм (под формой множества подразумевается совокупность всех его образов при невырожденных линейных преобразованиях).

В рассматриваемом общем случае удается указать такую масштабирующую матричную функцию $R(\varepsilon, t)$, что ее произведение на ОД $K(\varepsilon, t)$ имеет предел при $\varepsilon \to 0$, и таким образом описать асимптотику самих ОД. В терминологии форм (применимой только к вполне управляемым системам, ОД которых полноразмерны) это означает сходимость форм ОД $K(\varepsilon, t)$.

1. Постановка задачи. Рассмотрим сингулярно-возмущенную линейную автономную управляемую систему

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + By + Fu, \quad x(0) = y(0) = 0 \\ &\varepsilon\dot{y} = Cx + Dy + Gu, \quad t \in [0, T] \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $x \in V_x = \mathbf{R}^n$, $y \in V_y = \mathbf{R}^m$ – медленные и быстрые компоненты вектора состояния, $\varepsilon > 0$ – положительный малый параметр, допустимые управления $u(t)$ в каждый момент времени лежат в выпуклом, содержащем нуль компакте $U \subset \mathbf{R}^k$ и являются измеримыми функциями времени. Будем считать, что D – невырожденная матрица (что существенно), среди чисто мнимых собственных значений которой нет кратных (что упрощает вид матрицы $R(\varepsilon, t)$).

Пусть $K(\varepsilon, t)$ – ОД системы (1.1), т.е. множество всех точек пространства $V = V_x \oplus V_y$, в которые можно попасть, используя допустимые управления $u(\tau)$, $\tau \in [0, t]$. Для любых ε, t множество $K(\varepsilon, t)$ – выпуклый компакт, содержащий нуль.

Пусть S_0 и S_1 – множества из V. Расстояние Хаусдорфа между ними можно определить как

$$\rho(S_0, S_1) = \inf\{r : \forall s_i \in S_i \; \exists s_{1-i} \in S_{1-i} : |s_0 - s_1| < r, \; i = 0, 1\}$$

Будем исследовать асимптотику множеств $K(\varepsilon, t)$ при $\varepsilon \to 0$ в метрике Хаусдорфа.

2. Разделение быстрых и медленных переменных. Сделаем в (1.1) замену переменных

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = T_0 \begin{Vmatrix} x \\ z \end{Vmatrix}, \quad T_0 = \begin{Vmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{Vmatrix}$$

(Здесь и далее I обозначает единичные матрицы соответствующих размерностей и единичные операторы.) Ей соответствует представление пространства $V = V_x \oplus V_z$. Замена приводит систему (1.1) к виду

$$\begin{Vmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A_1 & B \\ C_1 & \varepsilon^{-1}D_1(\varepsilon) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x \\ z \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} F \\ \varepsilon^{-1}G_1(\varepsilon) \end{Vmatrix} u, \quad x(0) = z(0) = 0 \tag{2.1}$$

$A_1 = A - BD^{-1}C$, $C_1 = D^{-1}C(A - BD^{-1}C)$, $D_1(\varepsilon) = D + D^{-1}CB\varepsilon$, $G_1(\varepsilon) = G + D^{-1}CF\varepsilon$.

Преобразование координат T_0 привело матрицу системы от вида $\begin{Vmatrix} A & B \\ \varepsilon^{-1}C & \varepsilon^{-1}D \end{Vmatrix}$, к виду $\begin{Vmatrix} A_1 & B \\ C_1 & \varepsilon^{-1}D_1(\varepsilon) \end{Vmatrix}$, повысив порядок по ε внедиагонального блока. Аналогичными преобразованиями можно привести матрицу системы к матрице со сколь угодно большим порядком малости по ε во внедиагональных блоках.

Действительно, пусть в некоторой системе координат матрица системы имеет вид

$$\begin{Vmatrix} A(\varepsilon) & \varepsilon^l B(\varepsilon) \\ \varepsilon^k C(\varepsilon) & \varepsilon^{-1}D(\varepsilon) \end{Vmatrix} \tag{2.2}$$

где A, B, C, D – матричные многочлены от ε, матрица $D(0)$ обратима и $k \geqslant 0$, $l \geqslant 0$. Рассмотрим замены координат с матрицами

$$\begin{Vmatrix} I & 0 \\ \varepsilon^{k+1}Y & I \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} I & \varepsilon^{l+1}X \\ 0 & I \end{Vmatrix}; \quad X = B(0)D^{-1}(0), \quad Y = -D^{-1}(0)C(0)$$

При таких заменах матрица системы (2.2) принимает вид, аналогичный (2.2), причем k заменяется на $k + 1$ при первой замене и l заменяется на $l + 1$ – при второй; все функции по-прежнему являются многочленами от ε, причем главные члены разложений диагональных блоков по ε не изменяются.

Было показано [3], что при всех достаточно малых ε существует замена координат $S(\varepsilon)$:

$$\begin{Vmatrix} x \\ z \end{Vmatrix} = S(\varepsilon) \begin{Vmatrix} p \\ q \end{Vmatrix}$$

близкая к единичной и приводящая матрицу системы (2.1) к матрице с нулевыми внедиагональными блоками. Можно показать, что функция $S(\varepsilon)$ – аналитическая и может быть представлена в виде

$$S(\varepsilon) = \begin{Vmatrix} I & \varepsilon X(\varepsilon) \\ \varepsilon Y(\varepsilon) & I \end{Vmatrix}, \quad X(0) = BD^{-1}, \quad Y(0) = -D^{-1}C_1$$

Итак, замена координат $S(\varepsilon)$ приводит систему (2.1) к виду

$$\begin{Vmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A(\varepsilon) & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1}D(\varepsilon) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} p \\ q \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} F(\varepsilon) \\ \varepsilon^{-1}G_2(\varepsilon) \end{Vmatrix} u, \quad p(0) = q(0) = 0 \tag{2.3}$$

Здесь все функции аналитичны, $A(0) = A_1$, $D(0) = D$, $F(0) = F - BD^{-1}G$, $G_2(0) = G$. Такой замене соответствует представление пространства $V = V_p \oplus V_q$, причем $V_p \to V_x$ и $V_q \to V_z$ при $\varepsilon \to 0$. В уравнении (2.3) путем выбора подходящей системы координат, зависящей от ε, были разделены быстрые и медленные переменные в динамике, и связь между ними осталась только через управление.

3. Декомпозиция операторов D и $D(\varepsilon)$ на неустойчивую, нейтральную и устойчивую компоненты и соответствующее разложение пространств быстрых переменных V_z и V_q. Рассмотрим оператор, действующий в пространстве V_z и заданный матрицей D в координатах z. Рассмотрим преставление пространства V_z

$$V_z = V_z^+ \oplus V_z^0 \oplus V_z^-$$

соответствующее разложению оператора D в прямую сумму неустойчивого, нейтрального и устойчивого операторов в соответствии со знаком действительных частей их собственных значений

$$D = D_+ \oplus D_0 \oplus D_-$$

$$\lambda(D_i) = \lambda_i, \quad i = +, 0, -; \quad \operatorname{Re}\lambda_+ > 0, \quad \operatorname{Re}\lambda_0 = 0, \quad \operatorname{Re}\lambda_- < 0$$

Введем в пространствах V_z^i координаты z_i. Можно, без ограничения общности, считать, что $z = \operatorname{col}(z_+, z_0, z_-)$. Это предположение выполнено, если матрица D имеет блочно-диагональный вид с матрицами операторов D_i по диагонали. Но этого всегда можно добиться при замене $y = H\tilde{y}$ в системе (1.1).

Собственные числа $\lambda(\varepsilon)$ оператора $D(\varepsilon)$, действующего в пространстве V_q, непрерывно зависят от ε. Распределим их в три семейства в соответствии с их предельными значениями: $\lambda_+(\varepsilon) \to \lambda_+$, $\lambda_0(\varepsilon) \to \lambda_0$, $\lambda_-(\varepsilon) \to \lambda_-$. Рассмотрим представление пространства V_q

$$V_q = V_r^+ \oplus V_r^0 \oplus V_r^-$$

соответствующее разложению оператора $D(\varepsilon)$ в прямую сумму

$$D(\varepsilon) = D_+(\varepsilon) \oplus D_0(\varepsilon) \oplus D_-(\varepsilon), \quad \lambda(D_i(\varepsilon)) = \lambda_i(\varepsilon), \quad i = +, 0, -$$

Поскольку матрицы D и $D(\varepsilon)$, а также и пространства V_z и V_q близки при малых ε, то близки и подпространства, т.е. имеем $V_r^i \to V_z^i$, $i = +, 0, -$ при $\varepsilon \to 0$. Введем в пространствах V_r^i координаты r_i, близкие к z_i, а в пространстве V_q – координаты $r = \operatorname{col}(r_+, r_0, r_-)$. Перейдем в уравнениях (2.3) к переменным $\operatorname{col}(p, r)$. Матрица замены координат $S_1(\varepsilon)$:

$$\left\| \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\| = S_1(\varepsilon) \left\| \begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right\|$$

аналитическая и близка к единичной. Уравнения (2.3) принимают вид

$$\operatorname{col}(\dot{p}, \dot{r}_+, \dot{r}_0, \dot{r}_-) = \operatorname{diag}(A(\varepsilon), \varepsilon^{-1}D_+(\varepsilon), \varepsilon^{-1}D_0(\varepsilon), \varepsilon^{-1}D_-(\varepsilon)) \operatorname{col}(p, r_+, r_0, r_-) +$$

$$+ \operatorname{col}(F(\varepsilon), \varepsilon^{-1}G(\varepsilon))u \tag{3.1}$$

Функция $G(\varepsilon)$ – аналитическая и $G(0) = G$. В уравнении (3.1) переменные разделились на медленные, быстрые неустойчивые, быстрые нейтральные и быстрые устойчивые, связанные лишь через управление. С переменными x, z они связаны аналитической матрицей, близкой к единичной.

4. Введение масштабирующего оператора. Сходимость областей, связанных с областями достижимости. Введем масштабирующий оператор $R(\varepsilon, t)$. В представлении пространства

$$V = V_p \oplus V_r^+ \oplus V_r^0 \oplus V_r^-$$

он равен прямой сумме операторов из соответствующих подпространств

$$R(\varepsilon, t) = R_p \oplus R_r^+ \oplus R_r^0 \oplus R_r^-$$

$$R_p = I, \quad R_r^+ = \exp(-\varepsilon^{-1} D_+(\varepsilon) t), \quad R_r^0 = \varepsilon I, \quad R_r^- = I$$

(Если, в общем случае, собственные значения $i\omega_k$ оператора D_0 имеют кратность m_k ($k = 1,\ldots N$), то матрица оператора R_r^0 должна иметь вид

$$R_r^0 = \operatorname{diag}(R_1,\ldots,R_N), \quad R_k = \operatorname{diag}(\varepsilon, \varepsilon^2,\ldots,\varepsilon^{m_k}), \quad k = 1,\ldots,N$$

в том базисе, где матрица оператора D_0 жорданова. Можно доказать, что для такого R_r^0 будут верны все сформулированные ниже результаты.)

Подействуем на ОД масштабирующим оператором и рассмотрим полученную область $Q(\varepsilon, t) = R(\varepsilon, t) K(\varepsilon, t)$. Область $Q(\varepsilon, t)$ является областью значения вектора

$$\operatorname{col}(p, s) = R(\varepsilon, t) \operatorname{col}(p, r)$$

$\operatorname{col}(p, s) = \operatorname{col}(p, s_+, s_0, s_-) = \operatorname{diag}(I, \exp(-\varepsilon^{-1} D_+(\varepsilon) t), \varepsilon I, I) \operatorname{col}(p, r_+, r_0, r_-)$. Для описания асимптотического поведения ОД $K(\varepsilon, t)$ исследуем асимптотику областей $Q(\varepsilon, t)$. Докажем, что области $Q(\varepsilon, t)$ сходятся в метрике Хаусдорфа при $\varepsilon \to 0$ и любом $t \in [0, T]$.

Введем еще несколько обозначений. Пусть $V^0 = V_r^0 \oplus V_p$ – прямая сумма пространств медленных и быстрых нейтральных переменных. Обозначим через $(\cdot)_+$, $(\cdot)_0$, $(\cdot)_-$ операторы проекции на пространства V_r^+, V^0, V_r^-, а через Π и Π_0 – операторы проекций на V_p и V_r^0 (и пространства и операторы аналитически зависят от ε, хотя для краткости это не указано явно в их обозначениях).

Теорема 1. Для любого $t \in [0, T]$ существуют пределы при $\varepsilon \to 0$ проекций областей $Q(\varepsilon, t)$ на пространства V_r^+, V_r^- и $V^0 = V_r^0 \oplus V_p$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} Q_i(\varepsilon, t) = Q_i \subset V_z^i, \quad i = +, -; \quad \lim_{\varepsilon\to 0} Q_0(\varepsilon, t) = Q_0(t) \subset V_z^0 \oplus V_x$$

Доказательство. Докажем сходимость $Q_-(\varepsilon, t)$. Имеем

$$\operatorname{col}(p, s)_- = s_- = r_- = \int_0^{t/\varepsilon} \exp\left(D_-(\varepsilon)\left(\frac{t}{\varepsilon} - s\right)\right)(G(\varepsilon) u(\varepsilon s))_- ds \tag{4.1}$$

$$Q_-(\varepsilon, t) = \int_0^{t/\varepsilon} \exp(D_-(\varepsilon) s)(G(\varepsilon) U)_- ds$$

Поскольку при малых ε имеем $\operatorname{Re}\lambda_-(\varepsilon) < \tilde{\lambda} < \theta$, и множество управлений U ограничено, то $|\exp(D_-(\varepsilon)s)(G(\varepsilon)U)_-| < \operatorname{cont}\exp(\tilde{\lambda}s)$. Так как несобственный интеграл от мажорирующей функции сходится и для всех s:

$$\exp(D_-(\varepsilon)s)(G(\varepsilon)U)_- \to \exp(D_- s)(GU)_- \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

то по теореме Лебега

$$\lim_{\varepsilon\to 0} Q_-(\varepsilon, t) = \int_0^\infty \exp(D_- s)(GU)_- ds = Q_- \subset V_z^- \tag{4.2}$$

Сходимость $Q_+(\varepsilon, t)$ доказывается аналогично. Имеем

$$\operatorname{col}(p, s)_+ = s_+ = \exp(-\varepsilon^{-1} D_+(\varepsilon) t) r_+ = \int_0^{t/\varepsilon} \exp(-D_+(\varepsilon) s)(G(\varepsilon) u(\varepsilon s))_+ ds \tag{4.3}$$

откуда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} Q_+(\varepsilon, t) = \int_0^\infty \exp(-D_+ s)(GU)_+ ds = Q_+ \subset V_z^+ \tag{4.4}$$

Рассмотрим, наконец, проекции $Q_0(\varepsilon, t)$. Множество $Q_0(\varepsilon, t)$ является областью значений вектора col (p, s_0), где

$$p(\varepsilon, t) = \int_0^t \exp(A(\varepsilon)s)F(\varepsilon)u(t-s)ds$$

$$s_0(\varepsilon, t) = \int_0^t \exp(\varepsilon^{-1}D_0(\varepsilon)s)\Pi_0 G(\varepsilon)u(t-s)ds \tag{4.5}$$

Обозначим через h и $H_{\varepsilon,t}$ опорные функции множеств U и $Q_0(\varepsilon, t)$. Зафиксируем вектор ξ из V и рассмотрим значение $H_{\varepsilon,t}$ на нем:

$$H_{\varepsilon,t}(\xi) = \sup_{(p,s_0)\in Q_0} (p^*\Pi\xi + s_0^*\Pi_0\xi) =$$

$$= \int_0^t \sup_u (u^* F^*(\varepsilon)\exp(A^*(\varepsilon)s)\Pi\xi + u^* G^*(\varepsilon)\Pi_0^* \exp(\varepsilon^{-1}D_0^*(\varepsilon)s)\Pi_0\xi)ds =$$

$$= \varepsilon\int_0^{t/\varepsilon} h(F^*(\varepsilon)\exp(A^*(\varepsilon)\varepsilon s)\Pi\xi + G^*(\varepsilon)\Pi_0^* \exp(D_0^*(\varepsilon)s)\Pi_0\xi)ds \tag{4.6}$$

(звездочка означает операцию сопряжения). Можно считать, что матрица $D_0^*(\varepsilon)$ жорданова (в подходящем базисе в пространстве V_r^0). Поскольку собственные значения D_0 различны, то же верно и для $D_0^*(\varepsilon)$, и матрица $D_0^*(\varepsilon)$ диагональна. Ее собственные значения имеют вид

$$\lambda_k^0(\varepsilon) = \alpha_k(\varepsilon) + i\omega_k(\varepsilon) = \varepsilon\alpha_k^1 + \varepsilon^2\alpha_k^2 + \ldots + i(\omega_k + \varepsilon\omega_k^1 + \varepsilon^2\omega_k^2 + \ldots), \quad k = 1,\ldots,N$$

Соответственно матричные элементы $\exp(D_0^*(\varepsilon)s)$ имеют вид

$$\exp(\varepsilon s\alpha_k^1 + \varepsilon^2 s\alpha_k^2 + \ldots)\exp(i\omega_k s)\exp(i(\varepsilon s\omega_k^1 + \varepsilon^2 s\omega_k^2 + \ldots)), \quad k = 1,\ldots,N$$

Отсюда видно, что в (4.6) можно рассматривать $h(\cdot)$ как функцию f переменных $\omega_1 s,\ldots\omega_N s$, εs, ε, которая 2π-периодична по первым N аргументам и непрерывна по совокупности аргументов. С любой точностью ее можно приблизить конечным тригонометрическим многочленом

$$f(\omega_1 s,\ldots\omega_N s, \varepsilon s, \varepsilon) \sim \sum_{m\in\mathbb{Z}^N} a_m(\varepsilon s, \varepsilon)\exp(is(m,\omega))$$

Тогда

$$H_{\varepsilon,t}(\xi) = \varepsilon\int_0^{t/\varepsilon} f(\omega_1 s,\ldots\omega_N s, \varepsilon s, \varepsilon)ds \sim \sum_{m\in\mathbb{Z}^N} \varepsilon\int_0^{t/\varepsilon} 0a_m(\varepsilon s, \varepsilon)\exp(is(m,\omega))ds$$

Для m таких, что $(m, \omega) = 0$, имеем

$$\int_0^{t/\varepsilon} a_m(\varepsilon s, \varepsilon)\exp(is(m,\omega))ds = \int_0^1 a_m(t, \varepsilon)dt \to \int_0^1 a_m(t, 0)dt \quad \text{при } \varepsilon \to 0$$

Для m таких, что $(m, \omega) = \alpha \neq 0$ имеем

$$\varepsilon\int_0^{t/\varepsilon} a_m(\varepsilon s, \varepsilon)\exp(is\alpha)ds = \int_0^1 a_m(t, \varepsilon)\exp(i\alpha t/\varepsilon)dt \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0$$

по лемме Римана – Лебега. Таким образом, получаем, что для любого ξ

$$H_{\varepsilon,t}(\xi) \to \int_0^1 \sum_{m\in \mathbf{Z}^N,\,(m,\omega)=0} a_m(t,0)dt \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0 \tag{4.7}$$

Утверждение. Сходимость последовательности выпуклых компактных множеств S_n, содержащих нуль, в метрике Хаусдорфа эквивалентна поточечной сходимости и равномерной ограниченности последовательности их опорных функций $H_n(\xi)$ на сфере $|\xi| = 1$.

Доказательство. Сходимость последовательности S_n эквивалентна равномерной сходимости опорных функций $H_n(\xi)$ на сфере $|\xi| = 1$. Это следует из того, что $\rho(S_n, S) = \max |H_n(\xi) - H(\xi)|$ [4]. Кроме того, известно, что равномерная сходимость опорных функций эквивалентна их поточечной сходимости и равномерной ограниченности.

Поскольку опорные функции выпуклых множеств $Q_0(\varepsilon, t)$ поточечно сходятся и равномерно ограничены (что видно из (4.6)), то в силу утверждения существует и предел самих этих множеств:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} Q_0(\varepsilon, t) = Q_0(t) \subset V_z^0 \oplus V_x$$

и теорема доказана.

Теорема 2. Для любого $t \in [0, T]$ область $Q(\varepsilon, t)$ стремится при $\varepsilon \to 0$ к прямому произведению своих проекций на пространства V_r^+, V_r^- и $V^0 = V_r^0 \oplus V_p$

$$Q(\varepsilon, t) \to Q_+(\varepsilon, t) \oplus Q_0(\varepsilon, t) \oplus Q_-(\varepsilon, t) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0$$

Доказательство. Из формул (4.3), (4.5), (4.1) видно, что на проекции $\operatorname{col}(p, s)_i$, $i = +, 0, -$ существенно влияют лишь управления на временах, соответственно близких к нулю, промежуточных и близких к t. За время $[0, \sqrt{t\varepsilon}]$ можно привести систему (3.1) в точку с проекцией на V_r^-, близкой к любой точке из $Q_+(\varepsilon, t)$, затем за время $[\sqrt{t\varepsilon}, t - \sqrt{t\varepsilon}]$ перевести ее в точку с проекцией на V^0, близкой к любой точке из $Q_0(\varepsilon,t)$, мало изменив при этом первую проекцию; и затем за время $[t - \sqrt{t\varepsilon}, t]$ перевести ее в точку с проекцией на V_r^-, близкой к любой точке из $Q_-(\varepsilon, t)$, мало изменив первые две проекции. Но это и означает, что область $Q(\varepsilon, t)$ близка к прямому произведению своих проекций на V_r^+, V^0, V_r^-. Заметим еще, что $p(\varepsilon, t)$ и $s_0(\varepsilon, t)$ зависят от управления на одном и том же интервале времени, и поэтому их совместная область значений $Q_0(\varepsilon, t)$ не близка к прямому произведению своих проекций $\Pi Q(\varepsilon, t)$ и $\Pi_0 Q(\varepsilon, t)$.

Замечание. Поскольку $K(\varepsilon, t) = R^{-1}(\varepsilon, t)Q(\varepsilon, t)$, то из теоремы 2 следует, что ОД $K(\varepsilon, t)$ можно приближать прямым произведением множеств из пространств V_r^+, V^0, V_r^-, первое из которых экспоненциально растет, третье постоянно и второе растет вдоль пространства V_r^0 со скоростью $1/\varepsilon$

$$K(\varepsilon, t) \sim \exp(\varepsilon^{-1} D_+(\varepsilon)t) Q_+(\varepsilon, t) \oplus (I \oplus \varepsilon^{-1} I) Q_0(\varepsilon, t) \oplus Q_-(\varepsilon, t)$$

Левая и правая части эквивалентности близки в метрике Банаха – Мазура, которая будет определена ниже.

Из теорем 1, 2 непосредственно следует

Теорема 3. Для любого $t \in [0, T]$ существует предел областей $Q(\varepsilon, t)$, равный прямому произведению множеств Q_+, $Q_0(t)$, Q_- из пространств $V_z^+, V_z^0 \oplus V_x, V_z^-$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} Q(\varepsilon, t) = Q(t) = Q_+ \oplus Q_0(t) \oplus Q_-$$

Из теоремы 3 следует наш главный результат.

Теорема 4. Для линейной сингулярно-возмущенной автономной управляемой системы (1.1) существует предел областей, полученных при действии определенного выше линейного оператора $R(\varepsilon, t)$ на ОД $K(\varepsilon, t)$ при $\varepsilon \to 0$ и любом $t \in [0, T]$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} R(\varepsilon, t)K(\varepsilon, t) = Q(t) = Q_+ \oplus Q_0(t) \oplus Q_-$$

и предельное множество определяется своими проекциями, заданными формулами (4.2), (4.4), (4.7).

Сформулируем полученный результат на языке *форм* множеств. Под формой $\overline{\Omega}$ множества Ω подразумевается совокупность всех его образов при невырожденных линейных преобразованиях $\overline{\Omega} = \{G\Omega, \det G \neq 0\}$. Для множеств, содержащих полноразмерную окрестность нуля, определено расстояние Банаха – Мазура между ними

$$\rho(\Omega_1, \Omega_2) = \log(g(\Omega_1, \Omega_2)g(\Omega_2, \Omega_1)), \quad g(\Omega_1, \Omega_2) = \inf\{g \geqslant 1; g\Omega_1 \supset \Omega_2\}$$

и расстояние между их формами

$$\rho(\overline{\Omega}_1, \overline{\Omega}_2) = \inf_{\det G \neq 0} \rho(G\Omega_1, \Omega_2)$$

Предположим, что пары (A_1, F_1) и (D, G) вполне управляемы. Тогда [5] система (1.1) вполне управляема при отсутствии ограничений на управление и всех достаточно малых ε. Следовательно, области $K(\varepsilon, t)$ содержат полноразмерную окрестность нуля. Так как формы областей $K(\varepsilon, t)$ и $R(\varepsilon, t)K(\varepsilon, t)$ совпадают, то результат теоремы 4 можно сформулировать в терминах форм ОД.

Теорема 5. Существует предел форм ОД сингулярно-возмущенной автономной управляемой системы (1.1) при $\varepsilon \to 0$ и любом $t \in [0, T]$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \overline{K}(\varepsilon, t) = \overline{K}(t).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dontchev A.L., Veliov V.M.* Singular perturbation in Mayer's problem for linear systems // SIAM J. Control and Optimiz. 1983. V. 21. № 4. P. 566–581.
2. *Ovseevich A.I.* Limit behavior of attainable and superattainable sets // Proc. Conf. on Modeling, Estimation and Control of Systems with Uncertainty. Sopron, Hungary, 1990. Birkhäuser, Basel, Switzerland. 1991. P. 324–333.
3. *Kokotovic P.V., Haddad A.H.* Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. V. 20. №1. P. 111–113.
4. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. 335 с.
5. *Sanutti P.* On the controllability of singularly perturbed systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1977. V. 22. № 4. P. 622–624.

Москва

Поступила в редакцию
23.VII.1997