УДК 531.36:534.1

© 1998 г. В.И. Юдович

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ НА ВИБРИРУЮЩЕЙ ГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Методом осреднения Ван-дер-Поля – Крылова – Боголюбова [1–5] в форме, изложенной автором ранее [6] для систем со связями, исследуется динамика материальной частицы на гладкой поверхности, совершающей быстрые осцилляции в поле консервативных сил. Изучен общий случай твердой вибрирующей поверхности, а также случай эллипсоида с пульсирующими осями.

Далеко не всегда полезно, рассматривая механическую систему со связями, переходить к уравнениям Лагранжа второго рода, исключая уравнения связей. Зачастую это и практически неосуществимо. Поэтому во многих приложениях лучше иметь дело с уравнениями Лагранжа первого рода, включающими реакции связей. В данной работе рассматриваются идеальные голономные связи, зависящие от времени $(2\pi/\omega)$-периодически, причем частота ω очень велика. Предполагается, что амплитуда колебаний скорости остается ограниченной, когда $\omega \to \infty$.

В этих условиях движение разделяется на быструю и медленную компоненты, и при этом быстрая компонента выражается через медленную, а эволюция медленной компоненты описывается осредненными уравнениями движения. Уравнение связи также осредняется по быстрому времени. Осредненные уравнения содержат новую силу, возникающую в результате нелинейного взаимодействия вибраций и называемую виброгенной. Распространенный в литературе термин "вибрационная сила" кажется неподходящим, поскольку эта сила автономна (не зависит от быстрого времени), хотя и имеет вибрационное происхождение.

В работе разобраны две частные задачи. Первая из них – движение частицы в поле силы тяжести вдоль произвольной гладкой поверхности, которая вибрирует, сохраняя форму. В случае, когда поверхность – сфера (или окружность на плоскости), получается классическая задача движения маятника с вибрирующим подвесом ([1], см. также [2–5]). Заметим, что использование криволинейных лагранжевых координат, даже когда оно возможно, обычно требует введения трансцендентных функций, что создает известные трудности при численном анализе. Применяемый формализм свободен от этого недостатка. Его эффективность продемонстрирована на примере эллиптического маятника.

Вторая задача – о движении частицы в поле силы тяжести вдоль эллипсоида, который вибрирует около некоторого равновесного положения; допускается как вращательная вибрация, так и осцилляция осей эллипсоида.

В обеих задачах указаны ограничения на вибрацию, при которых равновесия сохраняются независимо от ее интенсивности (как известно, равновесиям осредненной системы соответствуют $(2\pi/\omega)$-периодические режимы исходной). Поскольку виброгенная сила в осредненных уравнениях потенциальна [6], для их устойчивости применима теорема Лагранжа. Приведенные результаты говорят о многообразных возможностях вибрационного управления устойчивостью равновесия.

В работе рассматриваются системы без трения. Заметим, что линейная по скорости рэлеевская сила трения без изменения переходит в осредненные уравнения, делая устойчивые равновесия асимптотически устойчивыми и сохраняя неустойчивость равновесий.

1. Постановка задачи и осредненные уравнения. Движение материальной частицы в поле консервативных сил с потенциальной энергией V вдоль вибрирующей поверхности будем описывать уравнениями Лагранжа первого рода

$$\ddot{x} = -\nabla V(x) - \Lambda\nabla\Phi \tag{1.1}$$

$$\Phi(x, \tau) = 0, \ \tau = \omega t \tag{1.2}$$

Здесь x – неизвестная вектор-функция со значениями $x(t)$ в R^3, Λ – множитель Лагранжа, $-\Lambda\nabla\Phi$ – реакция идеальной связи (1.2). Предполагается, что Φ зависит 2π-периодически от быстрого времени τ. Частота ω – большой параметр.

Дополнительно предположим, что функция Φ допускает при $\omega \to \infty$ асимптотику

$$\Phi(x,\tau) = \overline{\Phi}(x) + \varepsilon\varphi(x,\tau) + O(\varepsilon^2), \ \ \varepsilon = 1/\omega \tag{1.3}$$

где среднее $\bar{\varphi}(x) = 0$ для всех x. С учетом 2π-периодичности среднее определяется равенством

$$\overline{\Phi}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(x,\tau)d\tau \tag{1.4}$$

Заметим, что в случае гладкой зависимости $\bar{\Phi}$ от ε достаточно в дальнейшем использовать значение $\bar{\Phi}$ при $\varepsilon = 0$.

Далее допустим, что уравнение

$$\bar{\Phi}(x) = 0 \tag{1.5}$$

определяет замкнутую гладкую поверхность Γ в R^3, причем $\nabla\bar{\Phi}(x) \neq 0$ при $x \in \Gamma$.

В каждой точке $x \in \Gamma$ определим проекторы P_x, Q_x – на касательную плоскость и на нормаль соответственно:

$$P_x h = h - \zeta^{-2}(h,\zeta)\zeta, \ \ Q_x h = \zeta^{-2}(h,\zeta)\zeta, \ \ \zeta = \nabla\overline{\Phi}, \ \ \zeta^2 = (\zeta,\zeta) \tag{1.6}$$

для любого векторного поля h на Γ.

Далее рассматривается задача о $(2\pi/\omega)$-периодических решениях системы (1.1), (1.2), а также задача Коши

$$x(0) = x_0, \ \ \dot{x}(0) = v_0 \tag{1.7}$$

Чтобы эти условия были совместимы со связью, требуется выполнение равенств

$$\Phi(x_0,0) = 0, \ \ \omega\Phi_\tau(x_0,0) + (\nabla\Phi(x_0,0),v_0) = 0$$

Асимптотическое решение обеих задач (x_0, v_0 не зависят от ω) имеет вид [2, 3]

$$x = \bar{x}(t) + \omega^{-1}\xi(\tau,\bar{x}), \ \ \Lambda = \overline{\Lambda}(t) + \omega\lambda(\tau,\bar{x}) \tag{1.8}$$

Быстрые неизвестные ξ, λ определяются из системы

$$\xi'' = -\lambda\zeta, \ \ \bar{\xi} = 0, \ \ \bar{\lambda} = 0 \tag{1.9}$$

$$(\xi,\zeta) + \varphi = 0, \ \ \zeta = \zeta(\bar{x}) = \nabla\overline{\Phi}(\bar{x}) \tag{1.10}$$

Штрих означает дифференцирование по τ; $\bar{x}$ присутствует в качестве параметра. Решение системы (1.9), (1.10) имеет вид

$$\xi = -\mu\zeta, \ \ \mu = \varphi\zeta^{-2}, \ \ \lambda = \varphi''\zeta^{-2} \tag{1.11}$$

где μ – функция, однозначно определяемая условиями

$$\mu'' = \lambda, \ \ \bar{\mu} = 0 \tag{1.12}$$

Подстановка (1.8) в (1.1) и (1.2) с учетом (1.11) дает осредненную систему [6]

$$\ddot{\bar{x}} = -\nabla V(\bar{x}) - \nabla V_\varphi(\bar{x}) - \bar{\Lambda}\nabla\bar{\Phi} \tag{1.13}$$

$$\bar{\Phi}(\bar{x}) = 0 \tag{1.14}$$

Второе слагаемое в (1.13) – виброгенная сила, а отвечающая ей виброгенная потенциальная энергия есть

$$V_\varphi = -1/2\overline{\xi'^2} = -1/2\overline{\varphi'^2}\zeta^{-2} \tag{1.15}$$

Если решается задача Коши, то асимптотические начальные условия следует брать в виде

$$\bar{x}(0) = x_0, \ \dot{\bar{x}}(0) = v_0 - \xi'(0, x_0) = v_0 + \varphi'(0, x_0)\zeta^{-2}\zeta$$

При этом условие касания осредненной скорости $\dot{\bar{x}}(0)$ к поверхности (1.14) выполнено в силу (1.10); $(2\pi/\omega)$-периодическим решениям исходной системы отвечает равновесие осредненной системы (1.13), (1.14).

Остальная часть работы посвящена анализу устойчивости равновесий системы (1.13), (1.14) в случае, когда на частицу действует сила тяжести, так что

$$V = V_g = (-\mathbf{g}, x) \tag{1.16}$$

Вертикальную ось направим вверх. Тогда вектор ускорения силы тяжести есть $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$.

2. Частица на твердой вибрирующей поверхности. Предположим, что материальная точка двигается вдоль поверхности

$$\Phi(W_\varepsilon(\tau)x) = 0 \tag{2.1}$$

где $W_\varepsilon(\tau)$ – гладкое семейство движений (изометрических преобразований) пространства R^3, определенное для всех $\tau \in R$ и для малых $\varepsilon \in R$. Зависимость от τ предполагается 2π-периодической. Допустим, что при малых ε равномерно по $\tau \in R$ выполнено асимптотическое равенство

$$W_\varepsilon(\tau) = I + \varepsilon U(\tau) + O(\varepsilon^2), \ \ \varepsilon \to 0 \tag{2.2}$$

причем $\bar{U} = 0$. Таким образом, поверхность (2.1), не меняя своей формы, совершает быстрые колебания около некоторого среднего положения.

Уравнение движения (1.1) для частицы под действием силы тяжести имеет вид

$$\ddot{x} = \mathbf{g} - \Lambda\nabla\Phi \tag{2.3}$$

Если на момент приписать параметру ε смысл времени, то из равенства

$$U(\tau)x = d/d\varepsilon\,|_{\varepsilon=0}\ W_\varepsilon(\tau)x \tag{2.4}$$

будет видно, что $U(\tau)$, подобно скорости твердого тела, допускает представление

$$U(\tau)x = \eta(\tau) + S(\tau)x \tag{2.5}$$

Здесь $\eta(\tau)$ не зависит от x и задает поступательное движение, а оператор-функция $S(\tau)$ отвечает вращательному движению. Для каждого τ оператор $S(\tau)$ кососимметричен: $S^*(\tau) = -S(\tau)$. В случае R^3 можно ввести псевдовектор $\mathbf{q}(\tau)$ угловой скорости, и тогда $S(\tau)x = \mathbf{q} \times x$.

Теперь конкретизируем для рассматриваемого случая виброгенную потенциальную энергию (1.15). Уравнение связи (2.1) ввиду (2.2) записывается следующим образом:

$$\Phi(x) + \varepsilon(U(\tau)x, \zeta(x)) + O(\varepsilon^2) = 0, \ \ \varepsilon \to 0; \ \ \zeta(x) = \nabla\Phi(x) \tag{2.6}$$

т.е. в данном случае

$$\varphi(x,\tau)=(\zeta,U(\tau)x)=(\zeta,\eta(\tau))+(\zeta,S(\tau)x) \tag{2.7}$$

В результате подстановки (2.7) в (1.15) получаем представление V_φ в виде

$$V_\varphi=V_\varphi^\eta+V_\varphi^S+V_\varphi^{\eta S} \tag{2.8}$$

$$V_\varphi^\eta=-\tfrac{1}{2}\overline{(n(x),\eta')^2},\quad V_\varphi^S=-\tfrac{1}{2}\overline{(n(x),S'x)^2},\quad V_\varphi^{\eta S}=-\overline{(n,\eta')(n,S'x)}$$

Здесь $n=n(x)=\zeta(x)/|\zeta|(\zeta=\nabla\Phi)$ – нормальное к Г поле единичных векторов, определенное в некоторой окрестности поверхности Г: $\Phi(x)=0$. Слагаемые $V_\varphi^\eta,V_\varphi^S,V_\varphi^{\eta S}$ означают соответственно вклады в виброгенную потенциальную энергию от поступательной вибрации, вращательной вибрации и от их взаимодействия.

Осредненные уравнения записываются в виде

$$\ddot{\bar{x}}=\mathbf{g}-\nabla V_\varphi(\bar{x})-\bar{\Lambda}\nabla\Phi(\bar{x}),\quad \Phi(\bar{x})=0 \tag{2.9}$$

В координатной записи имеем выражения

$$\begin{aligned} &V_\varphi^\eta=-\tfrac{1}{2}n_i(x)n_k(x)\varepsilon_{ik},\quad \varepsilon_{ik}=\overline{\eta_i'\eta_k'}\\ &V_\varphi^S=-\tfrac{1}{2}\varkappa_{ik}(x\times n)_i(x\times n)_k,\quad \varkappa_{ik}=\overline{q_i'q_k'}\\ &V_\varphi^{\eta S}=-\nu_{ik}n_i(x\times n)_k,\quad \nu_{ik}=\overline{\eta_i'q_k'}\end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь $\eta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ определяет поступательную скорость вибрации η', а $\mathbf{q}=(q_1,q_2,q_3)$ – угловую скорость $\mathbf{q}'$. Матрицы (ε_{ik}), $(\varkappa_{ik})$ симметричны и положительны (хотя и не всегда положительно определены). Выходит, что общая вибрация задается $6+6+9=21$ параметрами ε_{ik}, $\varkappa_{ik}$ $(1\leqslant i\leqslant k\leqslant 3)$ и ν_{ik} $(1\leqslant i,k\leqslant 3)$. Можно доказать, что они независимы, так что любая их комбинация может быть реализована при надлежащем выборе вибрации.

Стабилизирующее и дестабилизирующее действие вибрации. Рассмотрим случай, когда равновесие $x_0=0$ (которое принято за начало координат), имеющееся при отсутствии вибрации, сохраняется и при ее наличии, и притом независимо от абсолютных величин вектора η и псевдовектора $\mathbf{q}$. Найдем условия такого сохранения и выясним, как влияет вибрация на устойчивость.

Итак, предполагается, что $\Phi(0)=0$, и в точке $x=0$ выполнено уравнение равновесия

$$\mathbf{g}-\Lambda\nabla\Phi=0,\quad \Lambda=(\mathbf{g},n)/|\nabla\Phi| \tag{2.11}$$

Равновесие $x_0=0$ сохраняется после введения вибрации, если виброгенная сила $-\nabla V_\varphi$ в точке $x=0$ вертикальна.

В окрестности нуля поверхность Г может быть задана уравнением $x_3=F(x_1,x_2)$. Поворотом осей x_1,x_2 в горизонтальной плоскости можно привести второй дифференциал функции F к сумме квадратов и записать уравнение поверхности в виде

$$x_3=F(x_1,x_2)=\frac{1}{2}(b_1x_1^2+b_2x_2^2)+\frac{1}{6}(c_{30}x_1^3+c_{21}x_1^2x_2+c_{12}x_1x_2^2+c_{03}x_2^3)+\ldots \tag{2.12}$$

Соответственно для компонент нормального поля

$$n=(n_1,n_2,n_3)=\frac{(-F_{x_1},-F_{x_2},1)}{(1+F_{x_1}^2+F_{x_2}^2)^{1/2}}$$

получаем следующие разложения в ряды Тейлора вплоть до членов второго порядка

$$n_1 = -b_1 x_1 + n_1^{(2)}(x_1, x_2) + \ldots;\quad n_1^{(2)} = -\tfrac{1}{6}(3c_{30}x_1^2 + 2c_{21}x_1x_2 + c_{12}x_2^2)$$

$$n_2 = -b_2 x_2 + n_2^{(2)}(x_1, x_2) + \ldots;\quad n_2^{(2)} = -\tfrac{1}{6}(c_{21}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + 3c_{03}x_2^2)$$

$$n_3 = 1 + n_3^{(2)}(x_1, x_2) + \ldots;\quad n_3^{(2)} = -\tfrac{1}{2}(b_1^2x_1^2 + b_2^2x_2^2)$$

Подставляя эти разложения в (2.10), получаем

$$\begin{aligned}
2V_\varphi^\eta &= -\varepsilon_{33} + 2(\varepsilon_{13}b_1x_1 + \varepsilon_{23}b_2x_2) + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})b_1^2x_1^2 - \\
&-2b_1b_2\varepsilon_{12}x_1x_2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{22})b_2^2x_2^2 - 2(\varepsilon_{13}n_1^{(2)} + \varepsilon_{23}n_2^{(2)}) + \ldots \\
2V_\varphi^S &= -\varkappa_{22}x_1^2 + 2\varkappa_{12}x_1x_2 - \varkappa_{11}x_2^2 + \ldots \qquad (2.13) \\
V_\varphi^{\eta S} &= \nu_{32}x_1 - \nu_{31}x_2 - \nu_{12}b_1x_1^2 + [(\nu_{11} - \nu_{33})b_1 + (\nu_{33} - \nu_{22})b_2]x_1x_2 + \nu_{21}b_2x_2^2 + \ldots.
\end{aligned}$$

Чтобы нулевое равновесие осредненных уравнений (2.9) сохранялось при включении вибрации, нужно выполнение условий

$$\frac{\partial}{\partial x_i} V_\varphi(x_1, x_2, F(x_1, x_2)) = 0,\quad i = 1,2$$

при $x_1 = x_2 = 0$. Согласно (2.13), эти условия принимают вид

$$\varepsilon_{13}b_1 + \nu_{32} = 0,\quad \varepsilon_{23}b_2 - \nu_{31} = 0 \qquad (2.14)$$

В таком случае для виброгенной потенциальной энергии имеем разложение

$$\begin{aligned}
2V_\varphi &= -\varepsilon_{33} + px_1^2 + 2qx_1x_2 + rx_2^2 + \ldots \\
p &= (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})b_1^2 - \varkappa_{22} - 2\nu_{12}b_1 + \varepsilon_{13}c_{30} + \tfrac{1}{3}\varepsilon_{23}c_{21} \qquad (2.15) \\
q &= \varkappa_{12} - b_1b_2\varepsilon_{12} + b_1(\nu_{11} - \nu_{33}) + b_2(\nu_{33} - \nu_{22}) + \tfrac{1}{3}(\varepsilon_{13}c_{21} + \varepsilon_{23}c_{12}) \\
r &= (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{22})b_2^2 - \varkappa_{11} + 2\nu_{21}b_2 + \tfrac{1}{3}\varepsilon_{13}c_{12} + \varepsilon_{23}c_{03}
\end{aligned}$$

Поскольку $V_g = gx_3 = gF(x_1, x_2)$, из (2.12), (2.13) для полной потенциальной энергии $V = V_g + V_\varphi$ получаем разложение

$$2V = -\varepsilon_{33} + (p + gb_1)x_1^2 + 2qx_1x_2 + (r + gb_2)x_2^2 + \ldots$$

Согласно теореме Лагранжа, равновесие $x_0 = 0$ устойчиво, если оно является точкой строгого минимума для V. Для этого достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$p + gb_1 > 0,\quad r + gb_2 > 0,\quad (p + gb_1)(r + gb_2) - q^2 > 0 \qquad (2.16)$$

С другой стороны, из теоремы Ляпунова об обращении теоремы Лагранжа [7] следует, что равновесие неустойчиво, если хотя бы одно из этих неравенств заменено на противоположное строгое неравенство. Заметим, что второе неравенство (2.16) следует из остальных двух.

Приведем простейший пример применения этих результатов. Пусть материальная частица (малый твердый шарик) вынуждена двигаться вдоль эллипса (тонкой замкнутой трубки), который, не меняя формы и размеров, совершает вибрационное движение в плоскости x_1, x_3. Тогда в (2.5) $\eta = (\eta_1, 0, \eta_3)$, $q = (0, q_2, 0)$. Предположим, что в среднем положении одна из осей эллипса вертикальна, так что его уравнение имеет вид

$$\Phi(x) \equiv x_1^2/a_1^2 + x_3^2/a_3^2 - 1 = 0 \qquad (2.17)$$

Чтобы применить критерий устойчивости (2.16), нужно перенести начало координат в исследуемое положение равновесия x^0. Это достигается заменой $x \to x + x^0$ и соответственно $\eta \to \eta + q \times x^0$, $q \to q$ в выражениях (2.10) для всех ε_{ik}, $\varkappa_{ik}$, ν_{ik}. Среди них в данном случае отличными от нуля могут быть лишь ε_{11}, ε_{13}, ε_{33}, $\varkappa_{22}$, ν_{12}, ν_{32}.

Верхнее положение равновесия $x^0 = (0, a_3)$, согласно (2.14), сохраняется при вибрациях, если выполнено равенство

$$\delta\varepsilon_{13} - a_1(1-\delta^2)\nu_{32} = 0, \quad \delta = a_3 / a_1$$

Здесь учтено, что локальное уравнение эллипса (2.17) вблизи точки $(0, a_3)$ имеет вид $x_3 = a_3 - x_1^2 a_3/(2a_1^2) + \ldots$, так что $b_1 = -\delta/a_1$. Условие устойчивости есть первое неравенство (2.16), которое теперь запишется в виде

$$\delta^2(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11}) - (1-\delta^2)^2 a_1^2 \varkappa_{22} + 2a_3(1-\delta^2)\nu_{12} - ga_3 > 0 \tag{2.18}$$

Его можно также записать в виде

$$\delta^2\varepsilon_{33} - \overline{[\delta\eta_1' - (1-\delta^2)a_1 q_2']^2} - ga_3 > 0 \tag{2.19}$$

Отсюда следует, что увеличением интенсивности вертикальных вибраций ε_{33} можно добиться устойчивости верхнего положения равновесия. Что касается горизонтальной и вращательной вибраций, то их влияние всегда дестабилизирует верхнее равновесие, но сводится на нет в случае, когда $\delta\eta_1'(\tau) = (1-\delta^2)q_2' a_1$ для всех τ.

Результаты для нижнего равновесия получаются аналогично. Условие его сохранения: $\delta\varepsilon_{13} + a_1(1-\delta^2)\nu_{32} = 0$, так что оба равновесия сохраняются при $\varepsilon_{13} = 0$ и $\nu_{32} = 0$. Оно устойчиво при выполнении условия, отличающегося от (2.19) заменой a_1, a_3 на $-a_1, -a_3$.

Как видим, вертикальная вибрация делает его еще устойчивее, но оно может быть дестабилизировано действием горизонтальной и вращательной вибрации.

При $a_1 = a_3$ получаются классические результаты [1–5] для кругового маятника.

Из (2.15), (2.16) следует, что вертикальная вибрация маятник стабилизирует, а горизонтальная и вращательная вибрации дестабилизируют. В то же время их взаимодействие может оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее влияние.

3. Материальная точка на пульсирующем эллипсоиде. Эллипсоид в R^m, деформирующийся со временем, зададим уравнением

$$\Phi(x, \tau) = \tfrac{1}{2}[(A_\varepsilon(\tau)x, x) - 1] = 0 \tag{3.1}$$

где A_ε для всех τ и малых $\varepsilon = 1/\omega$ есть положительно определенный линейный оператор. Предположим, что он 2π-периодически зависит от быстрого времени $\tau = \omega t$, а при $\varepsilon \to 0$ допускает асимптотическое представление

$$A_\varepsilon(\tau) = A_0 + \varepsilon S(\tau) + O(\varepsilon^2)$$

При этом $\overline{S} = 0$ и оператор A_0 положительно определен. Соответственно уравнение (3.1) записывается в виде

$$\Phi_0(x) + \varepsilon\varphi(x, \tau) = O(\varepsilon^2)$$

$$\Phi_0(x) = \tfrac{1}{2}[(A_0 x, x) - 1], \quad \varphi(x, \tau) = \tfrac{1}{2}(S(\tau)x, x)$$

Виброгенная потенциальная энергия материальной частицы, движущейся по эллипсоиду (3.1), вычисляется по формуле (1.15). С учетом равенства $\zeta(x) = \nabla\Phi_0(x) = A_0 x$ получаем (в тензорной записи)

$$V_\varphi = -\frac{(Wx \otimes x, x \otimes x)}{8(A_0 x, A_0 x)}, \quad W = \overline{S'(\tau) \otimes S'(\tau)} \tag{3.2}$$

Таким образом, V_φ определяется оператором W, действующим в тензорном квадрате $R^m \otimes R^m = R^{m^2}$. Его матрица есть осредненный кронекеровский квадрат матрицы

$(s'_{ik}(\tau))$ оператора $S'(\tau)$. В координатах имеем

$$V_\varphi = -\sum_{i,j,k,l=1}^{m} \overline{s'_{ij}s'_{kl}} x_i x_j x_k x_l \left(8 \sum_{i,j,k=1}^{m} a_{ij} a_{jk} x_i x_k \right)^{-1} \tag{3.3}$$

где (a_{ij}) – матрица оператора A_0. Так как оператор $S(\tau)$ симметричен для всех τ, среди коэффициентов в числителе имеется всего $q(a + 1)/2$ $(q = m(m + 1)/2)$ различных. Надлежащим образом выбирая вибрацию, можно реализовать произвольный набор этих параметров.

Рассмотрим подробнее случай, когда все полуоси эллипсоида сохраняют направление и одна из них вертикальна. Тогда выполняются равенства

$$A_0 e_j = a_j^{-2} e_j, \quad S(\tau) e_j = s_j(\tau) e_j, \quad j = 1, \dots, m$$

где $e_1, \dots, e_m$ – векторы канонического базиса в R^m, через $a_1, \dots, a_m$ обозначены длины полуосей эллипсоида E: $(A_0 x, x) = 1$, а $s_1(\tau), \dots, s_m(\tau)$ – собственные числа оператора $S(\tau)$. Выражение (3.3) упрощается:

$$V_\varphi = -\sum_{i,j=1}^{m} \gamma_{ij} x_i^2 x_j^2 \left(8 \sum_{j=1}^{m} \frac{x_j^2}{a_j^4} \right)^{-1}, \quad \gamma_{ij} = \overline{s'_i s'_j} \tag{3.4}$$

Если j-я полуось эллипсоида колеблется по закону $a_j + \varepsilon \eta_j(\tau) + O(\varepsilon^2)$, то $s_j = -2\eta_j / a_j^3$.

Осредненные уравнения (1.13), (1.14) записываются в виде

$$\ddot{\bar{x}} = g e_m - \nabla V_\varphi - \bar{\Lambda} \nabla \Phi_0, \quad \Phi_0(\bar{x}) = 0$$

При отсутствии вибраций имеется ровно два равновесия: верхнее $x^u = (0, \dots, 0, a_m)$ и нижнее $x^l = (0, \dots, 0, -a_m)$. Для их сохранения нужно, чтобы виброгенная сила была в них вертикальна. В случае потенциальной энергии (3.4) это условие, очевидно, выполнено.

Теперь изучим влияние вибрации на устойчивость равновесий x^l и x^u. По теореме Лагранжа, для устойчивости равновесия достаточно, чтобы потенциальная энергия V достигала на нем строгого минимума. Как доказал Ляпунов, в случае, когда второй дифференциал d^2V невырожден, это условие является также и необходимым (см. [7], где рассмотрены также и некоторые вырожденные случаи).

Ограничиваясь случаем невырожденности равновесий, вычислим второй дифференциал d^2V полной потенциальной энергии $V = V_\varphi + V_g$ в точках x^l и x^u на эллипсоиде E. В окрестности каждой из этих точек можно взять $x_1, \dots, x_{m-1}$ в качестве координат на E. Выражая в (3.4) x_m через $x_1, \dots, x_{m-1}$ из уравнения эллипсоида E: $(A_0 x, x) = 1$ и разлагая V_φ в ряд Тейлора вплоть до членов второго порядка, для обоих равновесий имеем

$$V_\varphi = -\frac{1}{8} \gamma_{mm} a_m^6 + \sum_{i=1}^{m-1} \varkappa_i^\varphi x_i^2 + \dots$$

$$\varkappa_i^\varphi = \frac{1}{8} a_m^4 [\gamma_{mm} (\varepsilon_i^2 + \varepsilon_i^4) - \gamma_{im}], \quad \varepsilon_i = \frac{a_m}{a_i}$$

Для гравитационной потенциальной энергии V_g аналогично получаем

$$V_g = \pm g a_m + \sum_{i=1}^{m-1} \varkappa_i^g x_i^2 + \dots, \quad \varkappa_i^g = \mp \frac{g a_m}{2 a_i^2}$$

Верхние знаки соответствуют верхнему, а нижние – нижнему равновесию.

Равновесие устойчиво по Ляпунову, если все его коэффициенты устойчивости Пуанкаре (см. [7]) $\varkappa_i = \varkappa_i^{\varphi} + \varkappa_i^{g}$ строго положительны, и неустойчиво, если хотя бы один из них отрицателен. В результате получается, что равновесие устойчиво, если выполняются строгие неравенства

$$\gamma_{mm}(\varepsilon_i^2 + \varepsilon_i^4) - 2\gamma_{im} \mp 4g/(a_i^2 a_m^3) > 0, \quad i = 1, \ldots, m-1 \tag{3.5}$$

Здесь верхний знак относится к x^u, а нижний – к x^l. Равновесие неустойчиво, если хотя бы одно из этих неравенств грубо нарушено, так что знак > заменен на <.

Приведем некоторые выводы, вытекающие из этих условий.

Пульсация вертикальной полуоси эллипсоида оказывает стабилизирующее влияние на оба равновесия x^l и x^u, а эффект чисто горизонтальной вибрации пренебрежимо мал при больших частотах ω. Во всяком случае он может сказаться лишь в критическом случае, когда в (3.5) для некоторых i имеет место равенство. Вместе с тем взаимодействие горизонтальной и вертикальной вибраций, определяемое коэффициентом γ_{im}, может как стабилизировать (при $\gamma_{im} < 0$), так и дестабилизировать равновесие (если $\gamma_{im} > 0$). Увеличивая все абсолютные величины $-\gamma_{im} > 0$ ($i = 1, \ldots, m-1$), можно сделать оба равновесия x^l и x^u устойчивыми.

Из (3.5) следует кажущийся парадоксальным вывод, что стабилизирующая интенсивность вертикальных вибраций падает, когда увеличивается вертикальная ось эллипсоида. Это перестает казаться странным, если заметить, что для сплюснутого по вертикали эллипсоида частица имеет большую свободу в горизонтальных движениях. В предельном случае плоской границы вертикальные вибрации ее вообще не ограничивают.

Если устойчиво верхнее равновесие, то устойчиво и нижнее. Если неустойчиво нижнее равновесие, то неустойчиво и верхнее.

При $\gamma_{mm} = 0$ (тогда и все $\gamma_{im} = 0$) верхнее равновесие неустойчиво, а нижнее – устойчиво. Будем увеличивать γ_{mm}, считая остальные параметры фиксированными. При этом нижнее положение равновесия останется устойчивым, а при больших γ_{mm}, как видно из (3.5), станет устойчивым и верхнее.

Пусть при некоторых значениях параметров γ_{mm} и γ_{im} оба равновесия неустойчивы. Критическим значением параметра γ_{mm} для данного равновесия называется то, для которого хотя бы один из коэффициентов устойчивости обращается в нуль. Если γ_{mm}^* – наибольшее критическое значение для x^u, то при $\gamma_{mm} > \gamma_{mm}^*$ оба равновесия устойчивы. Когда γ_{mm}, возрастая, пересекает значение γ_{mm}^*, согласно теории Пуанкаре [7], от x^u ответвляется пара (или несколько пар; в случае эллипсоидов вращения даже континуум) устойчивых равновесий осредненной системы – квазиравновесий исходной. При дальнейшем увеличении γ_{mm} все они не могут исчезнуть – потенциальная энергия V должна где-то достигать максимума, а равновесия x^l и x^u при больших γ_{mm} – локальные минимумы.

Аналогичная бифуркация происходит при увеличении γ_{mm} и около нижнего равновесия, если оно при некотором значении γ_{mm} неустойчиво. Разумеется, бифурцируют и неустойчивые равновесия – каждый раз, когда меняет знак один из их коэффициентов устойчивости. Когда γ_{mm} становится очень большим, для V имеем асимптотику

$$V = -\frac{1}{8}\gamma_{mm} x_m^4 \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i^2}{a_i^4} \right)^{-1} + O(1), \quad \gamma_{mm} \to \infty$$

Отсюда можно вывести, что все равновесия, отличные от x^l и x^u, стремятся при $\gamma_{mm} \to \infty$ к экваториальному эллипсоиду $x_m = 0$, $x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 + \ldots + x_{m-1}^2/a_{m-1}^2 = 1$.

Как видим, и в этом случае вибрация может создавать новые равновесия осредненной системы.

В условиях невесомости (при $g = 0$) динамика частицы на пульсирующем эллипсоиде остается достаточно богатой. Отметим, что вибрация одной единственной оси эллипсоида делает устойчивыми равновесия на ее концах.

Автор благодарит И.И. Блехмана, С.М. Зеньковскую и Л.Г. Куракина за обсуждения, Е.В. Ширяеву – за помощь при оформлении рукописи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01791, 96-15-96081).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Капица П.Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. Вып. 5. С. 588–597.
2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
3. *Стрижак Т.Г.* Метод усреднения в задачах механики. Киев; Донецк: Вища шк., 1982. 254 с.
4. *Sanders J.A., Verhulst F.* Averaging methods in nonlinear dynamical systems. N.y.e.a.: Springer, 1985. 247 p.
5. *Блехман И.И.* Вибрационная механика. М.: ВО "Наука"; Изд. фирма "Физ.-мат. лит.", 1994. 394 с.
6. *Юдович В.И.* Вибродинамика систем со связями // Докл. РАН. 1997. Т. 354. № 5. С. 622–624.
7. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955. 207 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
27.1.1998