

УДК 531.36 : 534.1

© 1998 г. О.В. Холостова

## О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ПРИ РЕЗОНАНСЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Рассматриваются нелинейные колебания  $2\pi$ -периодической по времени гамильтоновой системы с одной степенью свободы. Предполагается, что начало координат является положением равновесия системы, линейризованная система устойчива, ее характеристические показатели  $\pm i\nu$  чисто мнимые, а величина  $4\nu$  близка к целому числу. Методами классической теории возмущений исследование сведено к рассмотрению модельной системы, описываемой гамильтонианом, характерным для задач о движении гамильтоновых систем с одной степенью свободы в случае резонанса четвертого порядка. Проведен подробный анализ такой системы. При помощи теории периодических движений Пуанкаре и КАМ-теории результаты исследования модельной системы перенесены на полную систему. Решен вопрос о существовании, числе и устойчивости  $8\pi$ -периодических движений исходной системы. Показана ограниченность траекторий движения, начинающихся в достаточно малой окрестности начала координат, и дана оценка размеров этой окрестности. В качестве примеров рассмотрено движение тяжелой материальной точки над кривой, имеющей форму эллипса, происходящее с соударениями с этой кривой, а также плоские нелинейные колебания спутника на эллиптической орбите при резонансе четвертого порядка.

**1. Постановка задачи. Преобразование гамильтониана.** Рассмотрим движение системы с одной степенью свободы, описываемой функцией Гамильтона  $H(x, y, t)$  ( $x$  – координата,  $y$  – импульс). Пусть начало координат  $x = y = 0$  – положение равновесия системы, а функция  $H$  аналитична в окрестности  $x = y = 0$  и  $2\pi$ -периодична по  $t$ . Запишем  $H$  в виде

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots \quad (1.1)$$

где  $H_k(x, y, t)$  – многочлен  $k$ -й степени относительно  $x$  и  $y$ .

Пусть соответствующая линейризованная система устойчива по Ляпунову, а ее характеристические показатели  $\pm i\nu$  чисто мнимые. Будем считать, что в системе нет резонансов до третьего порядка включительно, т.е. величины  $2\nu$  и  $3\nu$  не целые числа.

Если имеет место резонанс четвертого порядка ( $4\nu$  – целое число), то нелинейные члены в уравнениях движения могут либо сохранить устойчивость точки  $x = y = 0$ , либо разрушить ее [1].

Цель данной работы – исследование нелинейных колебаний системы в случае, близком к резонансному, когда величина  $4\nu$  близка к целому числу  $N$ . Решается вопрос о существовании, числе и устойчивости  $8\pi$ -периодических движений рассматриваемой системы; показывается ограниченность траекторий ее движения, начинающихся в достаточно малой окрестности начала координат.

Предварительно осуществим ряд канонических замен переменных, преобразующих гамильтониан (1.1) к виду, характерному для рассматриваемого здесь резонансного случая [1]. Сначала при помощи вещественной  $2\pi$ -периодической по  $t$  замены  $x, y \rightarrow q, p$  функцию  $H_2$  можно привести к нормальной форме  $v(q^2 + p^2)/2$ , члены третьей степени уничтожить, а совокупность членов четвертой степени упростить, оставляя в ней лишь резонансные слагаемые. Полагая далее  $q = \varepsilon\sqrt{2R}\sin\theta$ ,  $p = \varepsilon\sqrt{2R}\cos\theta$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ), запишем нормализованный до членов четвертой степени включительно гамильтониан в виде

$$K = vR + \varepsilon^2[c + a\sin(4\theta - Nt) + b\cos(4\theta - Nt)]R^2 + O(\varepsilon^3) \quad (1.2)$$

где  $a, b, c$  – постоянные. Будем считать, что  $c \neq 0$  и  $a^2 + b^2 \neq 0$ .

Пусть  $4v = N + 4\varepsilon^2\chi$ . Сделаем замену переменных  $\theta, R \rightarrow \varphi, r$  по формулам

$$\theta = Nt/4 + \theta_* + \sigma[(1 + \sigma)\pi/8 + \varphi], \quad R = \delta r$$

$$\sigma = \text{sign } c, \quad \delta = (a^2 + b^2)^{-1/2}, \quad \sin 4\theta_* = a\delta, \quad \cos 4\theta_* = b\delta$$

и введем новую независимую переменную  $\tau = \varepsilon^2 t$ . Функция Гамильтона примет следующий окончательный вид:

$$\Gamma = \gamma_0(\varphi, r) + \varepsilon\gamma_1(\varphi, r, \tau, \varepsilon) \quad (1.3)$$

где

$$\gamma_0 = \mu r + (\kappa - \cos 4\varphi)r^2, \quad \mu = \sigma\chi, \quad \kappa = |c|\delta \quad (1.4)$$

Функция  $\gamma_1$   $2\pi$ -периодична по  $\varphi$ ,  $8\pi\varepsilon^2$ -периодична по  $\tau$  и в области  $0 < r \ll 1$  аналитична по всем переменным.

Будем далее полагать, что  $\kappa \neq 1$ . Критический случай  $\kappa = 1$  при точном резонансе ( $\mu = 0$ ) изучен ранее [2].

**2. Фазовые портреты модельной системы.** Рассмотрим сначала движения системы с укороченным (модельным) гамильтонианом (1.4), получаемым из полного гамильтониана (1.3) путем отбрасывания слагаемых порядка  $\varepsilon$  и выше. Соответствующие (1.4) уравнения движения имеют вид

$$dr/d\tau = -4r^2 \sin 4\varphi, \quad d\varphi/d\tau = \mu + 2r(\kappa - \cos 4\varphi) \quad (2.1)$$

а соотношение

$$\gamma_0(\varphi, r) = h = \text{const} \quad (2.2)$$

является их первым интегралом.

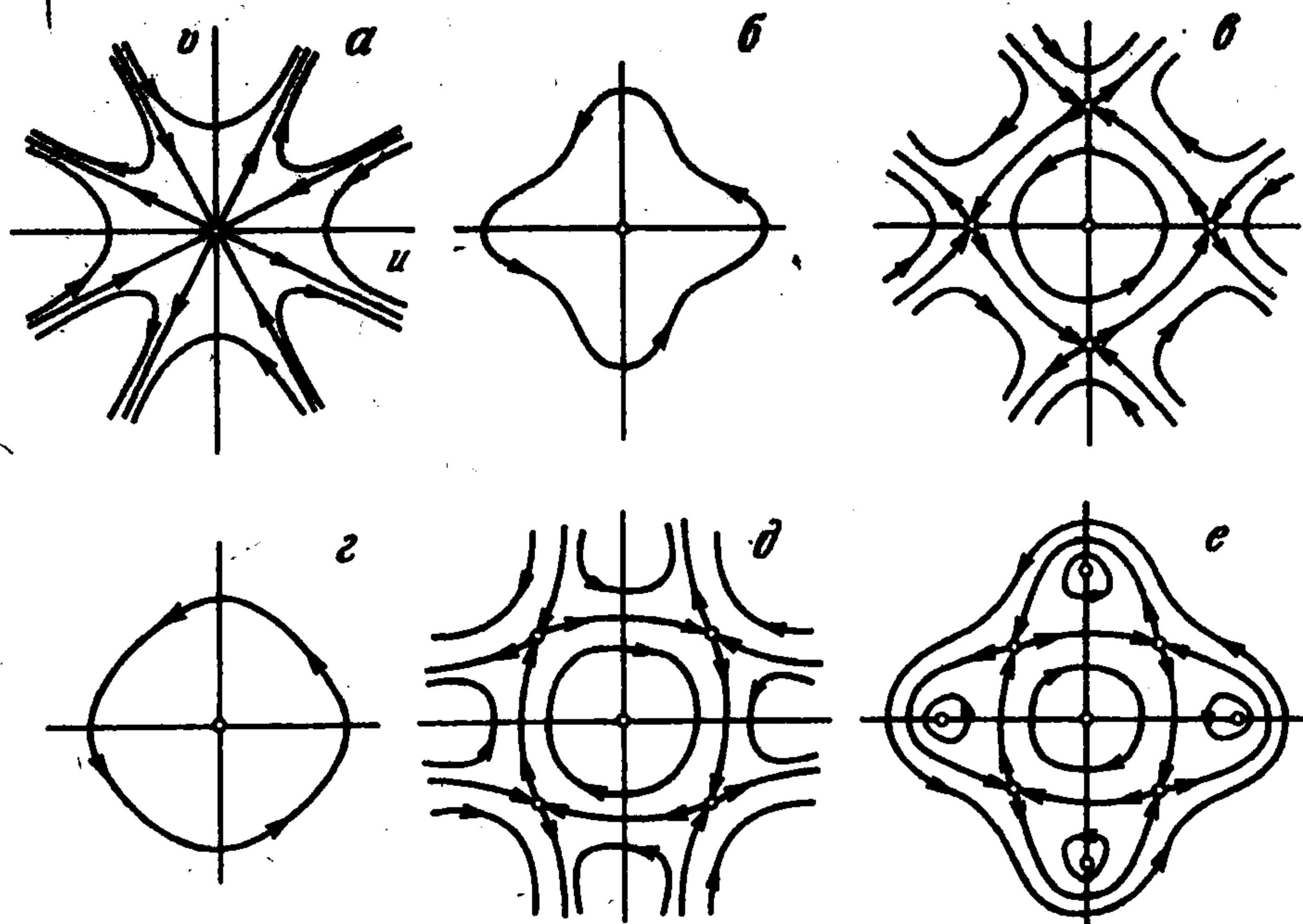
Укажем положения равновесия системы (2.1) и характер их устойчивости. Положение равновесия  $r = 0$  существует при любых значениях параметров  $\kappa$  и  $\mu$ ; если  $\mu = 0$ , оно устойчиво при  $\kappa > 1$  и неустойчиво при  $0 < \kappa < 1$ ; если же  $\mu \neq 0$ , то это положение равновесия устойчиво при любых значениях  $\kappa$ .

Другие положения равновесия  $r = r_*$ ,  $\varphi = \varphi_*$  системы (2.1) определяются из соотношений

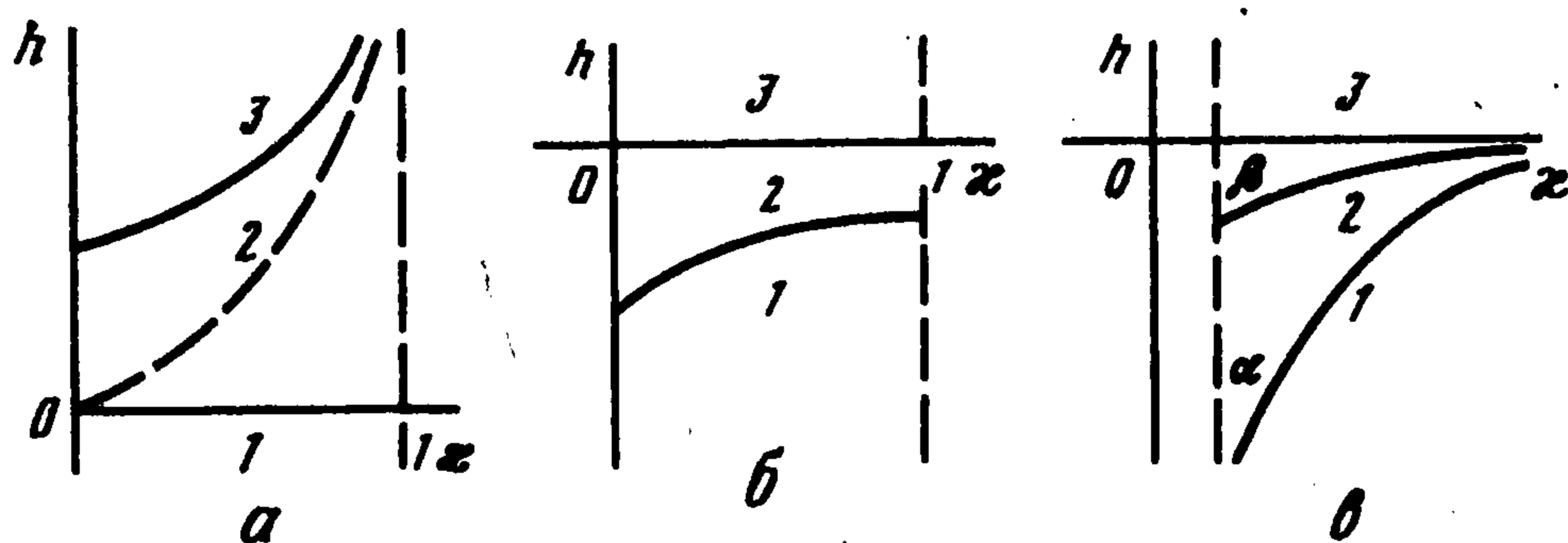
$$\sin 4\varphi_* = 0, \quad \mu + 2r_*(\kappa - \cos 4\varphi_*) = 0 \quad (2.3)$$

В области  $\kappa > 1$ ,  $\mu > 0$  уравнение (2.3) не имеет решений.

В областях  $0 < \kappa < 1$ ,  $\mu > 0$  и  $0 < \kappa < 1$ ,  $\mu < 0$  система (2.3) имеет по четыре решения: в первой из областей  $r_* = \mu/(2(1 - \kappa))$ ,  $\varphi_* = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ , а во второй –  $r_* = |\mu|/(2(1 + \kappa))$ ,  $\varphi_* = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ . Соответствующие им положения равновесия системы (2.1) неустойчивы.



Фиг. 1



Фиг. 2

В области  $\kappa > 1$ ,  $\mu < 0$  система (2.1) имеет восемь положений равновесия:  $r_* = |\mu|/(2(\kappa - 1))$ ,  $\varphi_* = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$  и  $r_* = |\mu|/(2(\kappa + 1))$ ,  $\varphi_* = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ , причем первые четыре из них устойчивы, а остальные неустойчивы.

На фиг. 1 в плоскости переменных  $u = \sqrt{2r} \cos \varphi$ ,  $v = \sqrt{2r} \sin \varphi$  приведены фазовые портреты системы (2.1) для случаев  $0 < \kappa < 1$ ,  $\mu = 0$  (а);  $\kappa > 1$ ,  $\mu = 0$  (б);  $0 < \kappa < 1$ ,  $\mu > 0$  (в);  $\kappa > 1$ ,  $\mu > 0$  (г);  $0 < \kappa < 1$ ,  $\mu < 0$  (д);  $\kappa > 1$ ,  $\mu < 0$  (е). Фазовые портреты симметричны относительно осей координат и биссектрис координатных углов.

При  $\mu = 0$  начало координат – сложная особая точка системы, устойчивая при  $\kappa > 1$  и неустойчивая при  $0 < \kappa < 1$ .

При  $\mu \neq 0$  устойчивым положениям равновесия системы (2.1) отвечают на фиг. 1 особые точки типа "центр", неустойчивым – седловые особые точки. Неустойчивые особые точки системы соединяются сепаратрисами, разделяющими области с различным характером поведения траекторий системы.

Будем далее считать, что  $\mu \neq 0$ . Опишем движения модельной системы при всех возможных значениях параметров  $\mu$ ,  $\kappa$  и  $h$ , используя обозначение  $h_{\pm} = \mu^2/(4(1 \pm \kappa))$ .

Пусть  $0 < \kappa < 1$ ,  $\mu > 0$  (фиг. 1, в). Устойчивому положению равновесия – началу координат отвечает значение  $h = 0$  константы "энергии", а неустойчивым положениям равновесия и сепаратрисам – значение  $h = h_-$ . Считая  $\mu$  произвольной фиксированной величиной ( $\mu > 0$ ), выделим в плоскости  $(\kappa, h)$  три области с границами  $h = 0$  и  $h = h_-$  (фиг. 2, а). Кривая  $h = h_-$  изображена на фиг. 2, а сплошной линией. Если  $h < h_-$  (области 1, 2 и часть прямой  $h = 0$  при  $0 < \kappa < 1$  на фиг. 2, а), то каждому значению параметров  $\kappa$  и  $h$  отвечают четыре траектории на фиг. 1, в – незамкнутые кривые, пересекающие оси координат. Кроме того, каждой точке области 2 ( $0 < h < h_-$ )

соответствует одно из колебаний в окрестности начала координат. При  $h > h_-$  (область 3 на фиг. 2, а) каждому значению  $\kappa$  и  $h$  отвечают четыре незамкнутые траектории, пересекающие биссектрисы координатных углов.

Если  $0 < \kappa < 1$ ,  $\mu < 0$  (фиг. 1, д), то, аналогично, разобьем плоскость  $(\kappa, h)$  на три области (фиг. 2, б) с границами  $h = 0$  и  $h = -h_+$ , соответствующими устойчивому положению равновесия – началу координат и неустойчивым положениям равновесия; точкам кривой  $h = -h_+$  отвечает также движение по сепаратрисам. В области 1 ( $h < -h_+$ ) имеем движения по незамкнутым кривым, пересекающим оси координат, при  $h > -h_+$  (области 2, 3 и часть прямой  $h = 0$  при  $0 < \kappa < 1$ ) – движения по незамкнутым кривым, пересекающим биссектрисы координатных углов; кроме того, каждой точке области 2 ( $-h_+ < h < 0$ ) отвечает колебание в окрестности начала координат.

Если  $\kappa > 1$ ,  $\mu < 0$  (фиг. 1, е), то границами областей с различным характером движений системы (2.1) служат в плоскости параметров  $\kappa, h$  прямая  $h = 0$ , соответствующая устойчивому положению равновесия – началу координат, и кривые  $h = h_-$  и  $h = -h_+$ , отвечающие устойчивым ( $r_* = |\mu|/(2(\kappa - 1))$ ) и неустойчивым ( $r_* = |\mu|/(2(\kappa + 1))$ ) положениям равновесия системы (кривые  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно на фиг. 2, в). Точкам кривой  $\beta$  отвечает также движение по сепаратрисам. При  $h < h_-$  (область 1 на фиг. 2, в) движение невозможно. Каждой точке области 2 ( $h_- < h < -h_+$ ) на фиг. 2, в соответствует четыре колебания системы в окрестности устойчивых положений равновесия, для которых  $r_* = |\mu|/(2(\kappa - 1))$ . Для значений  $\kappa$  и  $h$  из области 3 ( $-h_+ < h < 0$ ) имеем либо колебание в окрестности начала координат, либо одно из вращений – замкнутых траекторий на фиг. 1, е, охватывающих все особые точки системы. Значению  $h = 0$ , кроме устойчивого равновесия – начала координат, отвечает также одно из вращений. Каждой точке области 4 ( $h > 0$ ) на фиг. 2, в соответствует одно вращение.

Наконец, если  $\kappa > 1$ ,  $\mu > 0$  (фиг. 1, з), то при  $h < 0$  движение невозможно, при  $h = 0$  имеем устойчивое равновесие – начало координат, а при  $h > 0$  происходят колебания в окрестности этого равновесия.

**3. Анализ модельной системы. Интегрирование.** Используя интеграл (2.2), исключим  $\varphi$  из первого уравнения системы (2.1). Уравнение для  $r$  будет иметь вид

$$dr/\sqrt{F(r)} = \mp 4dt, \quad F(r) = r^4 - (\mu r + \kappa r^2 - h)^2 \quad (3.1)$$

Верхнему и нижнему знакам в (3.1) отвечают движения в секторах  $\pi k/2 < \varphi < \pi(2k + 1)/4$  и  $\pi(2k + 1)/4 < \varphi < \pi(k + 1)/2$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) убывания и возрастания переменной  $r$  соответственно. Корни многочлена  $F(r)$  имеют вид

$$r_{1,2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4h(1 - \kappa)}}{2(1 - \kappa)}, \quad r_{3,4} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4h(1 + \kappa)}}{2(1 + \kappa)} \quad (3.2)$$

Приведем результаты интегрирования уравнения (3.1) на всех ограниченных траекториях системы (2.1). Зная  $r(\tau)$ , зависимость  $\varphi(\tau)$  на этих траекториях можно получить из соотношения (2.2).

В областях колебаний системы в окрестности начала координат (фиг. 1, в–е), а также в области вращений при  $\kappa > 1$ ,  $\mu < 0$  (фиг. 1, е) все корни многочлена  $F(r)$  вещественные.

Если  $0 < \kappa < 1$ ,  $\mu > 0$  (фиг. 1, в), то в области колебаний ( $0 < h < h_-$ ) имеем  $r_4 < r_3 \leq r \leq r_2 < r_1$ . Полагая  $r(0) = r_3$ , получим из (3.1) [3]

$$r(\tau) = \frac{r_3(r_2 - r_4) - r_4(r_2 - r_3)\operatorname{sn}^2 u}{(r_2 - r_4) - (r_2 - r_3)\operatorname{sn}^2 u} \quad (3.3)$$

Если  $0 < \kappa < 1$ ,  $\mu < 0$  (фиг. 1,  $\delta$ ), то в области колебаний ( $-h_+ < h < 0$ ) имеем  $r_2 < r_1 \leq r \leq r_4 < r_3$  и из (3.1) получим

$$r(\tau) = \frac{r_1(r_4 - r_2) - r_2(r_4 - r_1)\operatorname{sn}^2 u}{(r_4 - r_2) - (r_4 - r_1)\operatorname{sn}^2 u}, \quad r(0) = r_1 \quad (3.4)$$

В (3.3) и (3.4) принято обозначение

$$u = 2 \left[ (1 - \kappa^2)(r_3 - r_1)(r_4 - r_2) \right]^{1/2} \tau \quad (3.5)$$

а модуль  $k$  эллиптического синуса и частота колебаний  $\omega$  определяются соотношениями

$$k = \left[ \frac{(r_4 - r_1)(r_3 - r_2)}{(r_3 - r_1)(r_4 - r_2)} \right]^{1/2}, \quad \omega = \frac{\pi \left[ (1 - \kappa^2)(r_3 - r_1)(r_4 - r_2) \right]^{1/2}}{4K(k)} \quad (3.6)$$

где  $K(k)$  – полный эллиптический интеграл первого рода.

Если  $\kappa > 1$ ,  $\mu < 0$  (фиг. 1,  $e$ ), то в области  $-h_+ < h < 0$  каждой точке  $(\kappa, h)$  соответствует одно колебание в окрестности  $r = 0$  и одно вращение. В этой области имеем  $r_1 < r_4 < r_3 < r_2$ . На траектории, отвечающей колебанию ( $r_1 \leq r \leq r_4$ ), получим из (3.1)

$$r(\tau) = \frac{r_1(r_2 - r_4) + r_2(r_4 - r_1)\operatorname{sn}^2 u}{(r_2 - r_4) + (r_4 - r_1)\operatorname{sn}^2 u}, \quad r(0) = r_1 \quad (3.7)$$

а на траектории, отвечающей вращению ( $r_3 \leq r \leq r_2$ ),

$$r(\tau) = \frac{r_3(r_2 - r_4) - r_4(r_2 - r_3)\operatorname{sn}^2 u}{(r_2 - r_4) - (r_2 - r_3)\operatorname{sn}^2 u}, \quad r(0) = r_3 \quad (3.8)$$

Здесь также принято обозначение (3.5), а модуль  $k$  эллиптического синуса и частота  $\omega$  колебания или вращения имеют вид (3.6).

Для траектории, отвечающей вращению при  $h = 0$ , интегрирование уравнения (3.1) осуществляется в элементарных функциях. Из (3.1) и (2.2) получим

$$r(\tau) = \frac{|\mu|}{\kappa + \cos 4\sqrt{|\mu|}\tau}, \quad \varphi(\tau) = \frac{\pi}{4} + \sqrt{|\mu|}\tau$$

На траекториях системы, отвечающих вращениям при  $h > 0$ , имеем  $r_3 \leq r \leq r_2$ ; зависимость  $r(\tau)$  задается соотношением (3.8), а модуль эллиптической функции и частота вращения – формулами (3.6).

Если  $\kappa > 1$ ,  $\mu > 0$  (фиг. 1,  $z$ ), то для колебаний системы в окрестности начала координат имеем  $r_1 < r_4 < r_3 \leq r \leq r_2$ ; зависимость  $r(\tau)$  на этих траекториях определяется соотношением (3.8), а модуль эллиптической функции и частота – формулами (3.6).

Рассмотрим теперь область колебаний системы в окрестности устойчивых положений равновесия, для которых  $r_* = |\mu|/(2(\kappa - 1))$  (случай  $\kappa > 1$ ,  $\mu < 0$ , фиг. 1,  $e$ ,  $h_- < h < -h_+$ ). В этой области величины  $r_1$  и  $r_2$  вещественные, а  $r_3$  и  $r_4$  комплексно-сопряженные. На траекториях из рассматриваемой области  $r_1 \leq r \leq r_2$ , а зависимость  $r(\tau)$  определяется соотношением [3]

$$r(\tau) = \frac{qr_2 + pr_1 - (qr_2 - pr_1)\operatorname{cn} u}{q + p + (p - q)\operatorname{cn} u}, \quad r(0) = r_1, \quad u = 4\sqrt{2|h|}\tau \quad (3.9)$$

$$p^2 = (m - r_2)^2 + n^2, \quad q^2 = (m - r_1)^2 + n^2$$

$$m = \frac{|\mu|}{2(\kappa + 1)}, \quad n = \frac{[-\mu^2 - 4h(\kappa + 1)]^{1/2}}{2(\kappa + 1)}$$

В (3.9) модуль  $k$  эллиптического косинуса и частота колебаний  $\omega$  имеют вид

$$k = \frac{1}{2} \left[ \frac{\mu^2 + 4h(\kappa - 1)}{2|h|} \right]^{1/2}, \quad \omega = \frac{2\sqrt{2}\pi\sqrt{|h|}}{K(k)} \quad (3.10)$$

Приведем теперь результаты интегрирования уравнения (3.1) на ограниченных сепаратрисах системы. При  $0 < \kappa < 1$ ,  $\mu > 0$  (фиг. 1, в) на сепаратрисе, соединяющей неустойчивые особые точки, имеем  $r_3 \leq r < r_2$ , где  $r_3 = r_3^* = \mu(\sqrt{2} - \sqrt{1 - \kappa}) / (2(1 + \kappa)\sqrt{1 - \kappa})$ ,  $r_2 = \mu / (2(1 - \kappa))$ . Из (3.1) получим [3]

$$r(\tau) = \frac{\mu(1 + e^{2u})}{2(1 - \kappa)(1 + e^{2u}) + 4\sqrt{2(1 - \kappa)}e^u}, \quad r(0) = r_3^*, \quad u = \frac{2\sqrt{2}\mu|\tau|}{\sqrt{1 - \kappa}} \quad (3.11)$$

Для ограниченной сепаратрисы при  $0 < \kappa < 1$ ,  $\mu < 0$  (фиг. 1, д) имеем  $r_1 \leq r < r_3$ ,  $r_1 = r_1^*$ ,  $r_3 = |\mu| / (2(1 + \kappa))$ . Зависимость  $r(\tau)$  для этой траектории получается из соотношения для  $r(\tau)$  в (3.11), а величина  $r_1^*$  — из  $r_3^*$  путем замены  $\mu$  на  $|\mu|$ , а  $\kappa$  на  $-\kappa$ .

Наконец, в случае  $\kappa > 1$ ,  $\mu < 0$  (фиг. 1, е) имеем  $r_1 \leq r < r_3$  ( $r_1 = r_1^*$ ,  $r_3 = |\mu| / (2(\kappa + 1))$ ) для внутренней и  $r_3 < r \leq r_2$  ( $r_2 = r_2^* = |\mu|(\sqrt{2} + \sqrt{\kappa + 1}) / (2(\kappa - 1)\sqrt{\kappa + 1})$ ) для внешней сепаратрис. Зависимость  $r(\tau)$  на них запишется в виде

$$r(\tau) = \frac{|\mu|(1 + e^{2u})}{2(\kappa + 1)(1 + e^{2u}) \pm 4\sqrt{2(\kappa + 1)}e^u}, \quad u = -\frac{2\sqrt{2}|\mu|\tau|}{\sqrt{\kappa + 1}}$$

где верхний и нижний знаки отвечают внутренней (для нее  $r(0) = r_1^*$ ) и внешней (для нее  $r(0) = r_2^*$ ) сепаратрисам соответственно.

*Проверка невырожденности.* Проверим выполнение условия невырожденности гамильтониана  $\gamma_0$  в областях колебаний и вращений системы (фиг. 1, в–е).

Введем переменные действие — угол  $I, \varphi$  [4], полагая

$$I(h) = \frac{1}{2\pi} \oint r(\varphi, h) d\varphi \quad (3.12)$$

Интегрирование в (3.12) проводится вдоль замкнутой траектории  $r = r(\varphi, h)$ , определяемой соотношением (2.2). Обратная к (3.12) функция  $h = h(I)$  представляет собой гамильтониан  $\gamma_0$ , записанный в переменных действие — угол.

Так как справедливо соотношение  $d^2h/dI^2 = \omega d\omega/dh$ , то условие невырожденности  $d^2h/dI^2 \neq 0$  сводится к условию  $d\omega/dh \neq 0$ .

В области колебаний при  $0 < \kappa < 1$ ,  $\mu > 0$  (фиг. 1, в) из (3.2) и (3.6) получим

$$\frac{d\omega}{dh} = \frac{\pi \left\{ K(k) \left[ \kappa \mu^2 + \kappa s - 4h(1 - \kappa^2) \right] - 2\mu^2 \frac{dK}{dk} \right\}}{2\sqrt{2}K^2(k)s \left[ \mu^2 + 4\kappa h + s \right]^{1/2}} \quad (3.13)$$

$$s = \left[ \mu^4 + 8\kappa h \mu^2 - 16h^2(1 - \kappa^2) \right]^{1/2}$$

Расчеты на ЭВМ показали, что для каждого значения параметра  $\mu$  ( $\mu > 0$ ) в плоскости параметров  $(\kappa, h)$  внутри рассматриваемой области колебаний существует кривая  $h = h(\kappa, \mu)$ , на которой обращается в нуль выражение в фигурных скобках в (3.13). Качественно график этой кривой изображен на фиг. 2, *a* штриховой линией. Выше кривой выполняется соотношение  $d\omega/dh < 0$ , а ниже ее — соотношение  $d\omega/dh > 0$ .

Таким образом, почти всюду в рассматриваемой области колебаний (за исключением множества нулевой меры) выполняется условие невырожденности.

Аналогично внутри области колебаний при  $0 < \kappa < 1$ ,  $\mu < 0$  (фиг. 1, *д*) из (3.2) и (3.6) получим выражение, отличающееся от (3.13) заменой в числителе  $h$  на  $-|h|$  и  $dK/dk$  на  $-dK/dk$ , а внутри области колебаний в окрестности устойчивых равновесий, для которых  $r_* = |\mu|/(2(\kappa-1))$  (случай  $\kappa > 1$ ,  $\mu < 0$ , фиг. 1, *e*), имеем из (3.2) и (3.10)

$$\frac{d\omega}{dh} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{K^2(k)} \left[ \frac{K(k)}{|h|^{1/2}} + \frac{\mu^2 dK/dk}{8k|h|^{3/2}} \right]$$

Учитывая, что  $dK/dk > 0$ , заключаем, что в первом из указанных случаев  $d\omega/dh > 0$ , а во втором —  $d\omega/dh < 0$  для всех рассматриваемых значений параметров  $\mu$ ,  $\kappa$ ,  $h$ . Таким образом, всюду в обеих рассматриваемых областях выполняется условие невырожденности.

Для колебаний системы в окрестности начала координат при  $\kappa > 1$  и для вращений при  $\kappa > 1$ ,  $\mu < 0$  (фиг. 1, *з, e*) условие невырожденности может быть легко проверено, если воспользоваться соотношением

$$\frac{d^2h}{dl^2} = \frac{\omega^3}{2\pi} \int \frac{\partial^2 \gamma_0 / \partial r^2}{(\partial \gamma_0 / \partial r)^3} d\varphi = \frac{\omega^3}{2\pi} \int \frac{2(\kappa - \cos 4\varphi)}{(\partial \gamma_0 / \partial r)^3} d\varphi \quad (3.14)$$

получаемым из (2.2) и (3.12).

Числитель дроби в подинтегральном выражении в (3.14) положителен при  $\kappa > 1$ . Для траекторий, отвечающих колебаниям в окрестности начала координат при  $\kappa > 1$ ,  $\mu < 0$  (фиг. 1, *e*),  $d\varphi < 0$  и знаменатель дроби в (3.14) отрицателен ( $\partial \gamma_0 / \partial r = d\varphi/d\tau < 0$ ), так как угол  $\varphi$  на этих траекториях монотонно убывает. Таким образом,  $d^2h/dl^2 > 0$ , и выполняется условие невырожденности. Для траекторий, отвечающих вращениям системы при  $\kappa > 1$ ,  $\mu < 0$  (фиг. 1, *e*) или колебаниям в окрестности начала координат при  $\kappa > 1$ ,  $\mu > 0$  (фиг. 1, *з*),  $d\varphi > 0$  и знаменатель дроби в (3.14) положителен (угол  $\varphi$  монотонно возрастает). Следовательно, справедливо неравенство  $d^2h/dl^2 > 0$  и выполняется условие невырожденности.

**4. О нелинейных колебаниях полной системы.** Выясним, как результаты исследования модельной системы, описываемой гамильтонианом  $\gamma_0$ , могут быть перенесены на полную систему с гамильтонианом  $\Gamma$  (см. (1.3)).

Согласно теории периодических движений Пуанкаре [5], из каждого не совпадающего с началом координат положения равновесия модельной системы рождается, при достаточно малых значениях  $\varepsilon$ , единственное,  $8\pi\varepsilon^2$ -периодическое по  $\tau$ , аналитическое по  $\varepsilon$  решение полной системы, которому отвечает  $8\pi$ -периодическое движение исходной системы с гамильтонианом (1.1).

Неустойчивые положения равновесия системы (2.1) переходят в неустойчивые же периодические решения полной системы, что следует из непрерывности по  $\varepsilon$  характеристических показателей соответствующих линейных уравнений возмущенного движения.

При решении вопроса об устойчивости периодических движений, рождающихся из

устойчивых (случай  $\kappa > 1, \mu < 0$ , фиг. 1,е) положений равновесия модельной системы, будем использовать теорему Арнольда-Мозера [6, 7]. Для получения нормальной формы функции Гамильтона возмущенного движения проведем сначала нормализацию гамильтониана  $\gamma_0$  модельной системы в окрестности этих равновесий. Положим  $\varphi = \varphi_* + \xi, r = r_* + \eta$  ( $\varphi_* = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2; r_* = |\mu|/(2(\kappa-1))$ ), тогда  $\gamma_0$  представляется в виде

$$\gamma_0 = \gamma_0^{(2)} + \gamma_0^{(3)} + \gamma_0^{(4)} + \dots \quad (4.1)$$

$$\gamma_0^{(2)} = 8r_*^2 \xi^2 + (\kappa - 1)\eta^2, \quad \gamma_0^{(3)} = 16r_* \xi^2 \eta, \quad \gamma_0^{(4)} = 8\xi^2 \eta^2 - (32/3)r_*^2 \xi^4$$

где многоточием обозначена совокупность слагаемых выше четвертой степени по  $\xi$  и  $\eta$ . Замена переменных  $\xi = \xi_1/\alpha, \eta = \alpha\eta_1, \alpha = 2^{3/4} \sqrt{r_*} (\kappa - 1)^{-1/4}$  приводит квадратичную часть  $\gamma_0^{(2)}$  к нормальной форме  $\omega(\xi_1^2 + \eta_1^2)/2, \omega = 2\sqrt{2} |\mu| (\kappa - 1)^{-1/2}$ . Затем осуществим каноническое преобразование  $\xi_1, \eta_1 \rightarrow q, p$  типа преобразования Биркгофа, уничтожающее в гамильтониане члены третьей степени и упрощающее члены четвертой степени. В окрестности рассматриваемого равновесия нормальная форма гамильтониана  $\gamma_0$  будет иметь вид

$$Z = \frac{1}{2} \omega(q^2 + p^2) + \frac{1}{4} c(q^2 + p^2)^2 + \dots, \quad c = -2(\kappa + 3) \quad (4.2)$$

Проведем теперь нормализацию полного гамильтониана  $\Gamma$  в окрестности порождаемого рассматриваемым устойчивым равновесием периодического решения полной системы. Нормализованный гамильтониан будет иметь вид (4.2), где коэффициенты  $\omega$  и  $c$  получают поправки порядка  $\varepsilon$ . При достаточно малых значениях  $\varepsilon$  в силу неравенства  $c < 0$  выполняется условие невырожденности гамильтониана  $\Gamma$  в окрестности изучаемого периодического решения. Отсюда на основании теоремы Арнольда-Мозера следует его устойчивость по Ляпунову.

Покажем ограниченность движений полной системы, начинающихся в конечной окрестности начала координат, и оценим размеры этой окрестности.

В конце разд. 3 для всех замкнутых траекторий модельной системы (2.1) (отвечающих колебаниям и вращениям) показано выполнение условия невырожденности гамильтониана  $\gamma_0$ . В частности, для случаев  $0 < \kappa < 1, \mu > 0$  (фиг. 1,в) и  $0 < \kappa < 1, \mu < 0$  (фиг. 1,д) это условие выполняется, например, для траектории, отвечающей колебанию в окрестности начала координат, на которой максимальное значение  $r$  не превосходит величины  $r_3^*/2$  и  $r_1^*/2$  соответственно, где  $r_3^*$  и  $r_1^*$  — минимальные значения  $r$  на соответствующей сепаратрисе, определенные в начале разд. 3.

На основании теоремы Мозера об инвариантных кривых [7] отображение, порождаемое движениями полной системы за период  $8\pi\varepsilon^2$ , при достаточно малых значениях  $\varepsilon$  имеет инвариантную кривую, близкую к указанной траектории. Для всех начинающихся внутри этой кривой траекторий полной системы для случаев  $0 < \kappa < 1, \mu > 0$  и  $0 < \kappa < 1, \mu < 0$  соответственно выполняются соотношения

$$r(\tau) < \frac{1}{2} r_3^* (1 + O(\varepsilon)) \quad \text{и} \quad r(\tau) < \frac{1}{2} r_1^* (1 + O(\varepsilon))$$

Если  $\kappa > 1, \mu < 0$  (фиг. 1,е), то, следуя теореме Мозера, выбираем одну из инвариантных кривых, например, близкую к траектории, отвечающей вращению, на которой величина  $r$  не превосходит  $2r_2^*$ , где  $r_2^*$  — максимальное значение  $r$  на внешней сепаратрисе (см. разд. 3). Для всех начинающихся внутри указанной инвариантной кривой траекторий полной системы имеем

$$|r(\tau)| < 2r_2^* (1 + O(\varepsilon)) \quad (4.3)$$

Наконец, для случая  $\kappa > 1, \mu > 0$  (фиг. 1,2) размеры окрестности начала координат, за пределы которой не выходят траектории, начинающиеся внутри этой окрестности, могут быть оценены, например, неравенством (4.3).

5. Примеры. Проиллюстрируем полученные результаты двумя примерами.

1°. Рассмотрим движение тяжелой материальной точки массы  $m$  над неподвижной абсолютно гладкой кривой, имеющей форму эллипса, задаваемого в неподвижной системе координат  $O\xi\eta$  уравнением  $\xi^2 a^2 + (\eta - b)^2 b^2 = 1$  (ось  $O\eta$  вертикальна). Двигаясь в плоскости  $O\xi\eta$ , точка время от времени соударяется с кривой, при этом удар считается абсолютно упругим, а трение отсутствует.

Существует периодическое движение точки, когда ее траектория лежит на оси  $O\eta$ , а точка в результате соударений с дугой эллипса в начале координат  $\xi = \eta = 0$  периодически подскакивает на высоту  $l$ ; период такого движения равен  $2\sqrt{2l/g}$ . Была исследована [8] задача об изоэнергетической орбитальной устойчивости этого движения.

Пусть в возмущенном движении непосредственно перед первым и вторым соударениями точки имеем  $\xi = lx, p_\xi = m\sqrt{2gl}y$  и  $\xi = lx_1, p_\xi = m\sqrt{2gl}y_1$  соответственно ( $\xi$  и  $p_\xi$  — обобщенные координата и импульс). Исследование изоэнергетической орбитальной устойчивости указанного периодического движения точки было сведено [8] к исследованию устойчивости неподвижной точки  $x = y = 0$  сохраняющего площадь отображения

$$x_1 = x_1(x, y), y_1 = y_1(x, y) \quad (5.1)$$

плоскости в себя. Явный вид отображения (5.1) приведен в [8].

Показано, в частности, что на прямой  $\beta = \alpha/4$  в плоскости параметров  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\alpha = a^2/b^2, \beta = l/b$ ) (фиг. 3) реализуется резонанс четвертого порядка; при этом, если  $0 < \alpha < 5$  или  $\alpha > 10$  (что в обозначениях данной работы соответствует случаю  $\kappa > 1$ ), имеет место орбитальная устойчивость, а при  $5 < \alpha < 10$  (когда  $0 \leq \kappa < 1$ ) — неустойчивость рассматриваемого периодического движения точки [8]. В точках  $c$  (5, 5/4) и  $d$  (10, 5/2) — границах участков устойчивости и неустойчивости (отвечающих критическому значению  $\kappa = 1$ ) — вертикальное периодическое движение точки соответственно орбитально устойчиво и неустойчиво [2].

Пусть теперь величина  $\beta/\alpha$  близка к  $1/4$ . Полагая  $\beta/\alpha = 1/4 + \epsilon^2 \chi/2$ , осуществим замену переменных  $x, y \rightarrow q, p$ , приводящую отображение (5.1) к нормальной форме [8]; переходя далее к переменным  $q = \epsilon^{-1} q_*, p = \epsilon^{-1} p_*$ , получим это нормализованное отображение в виде

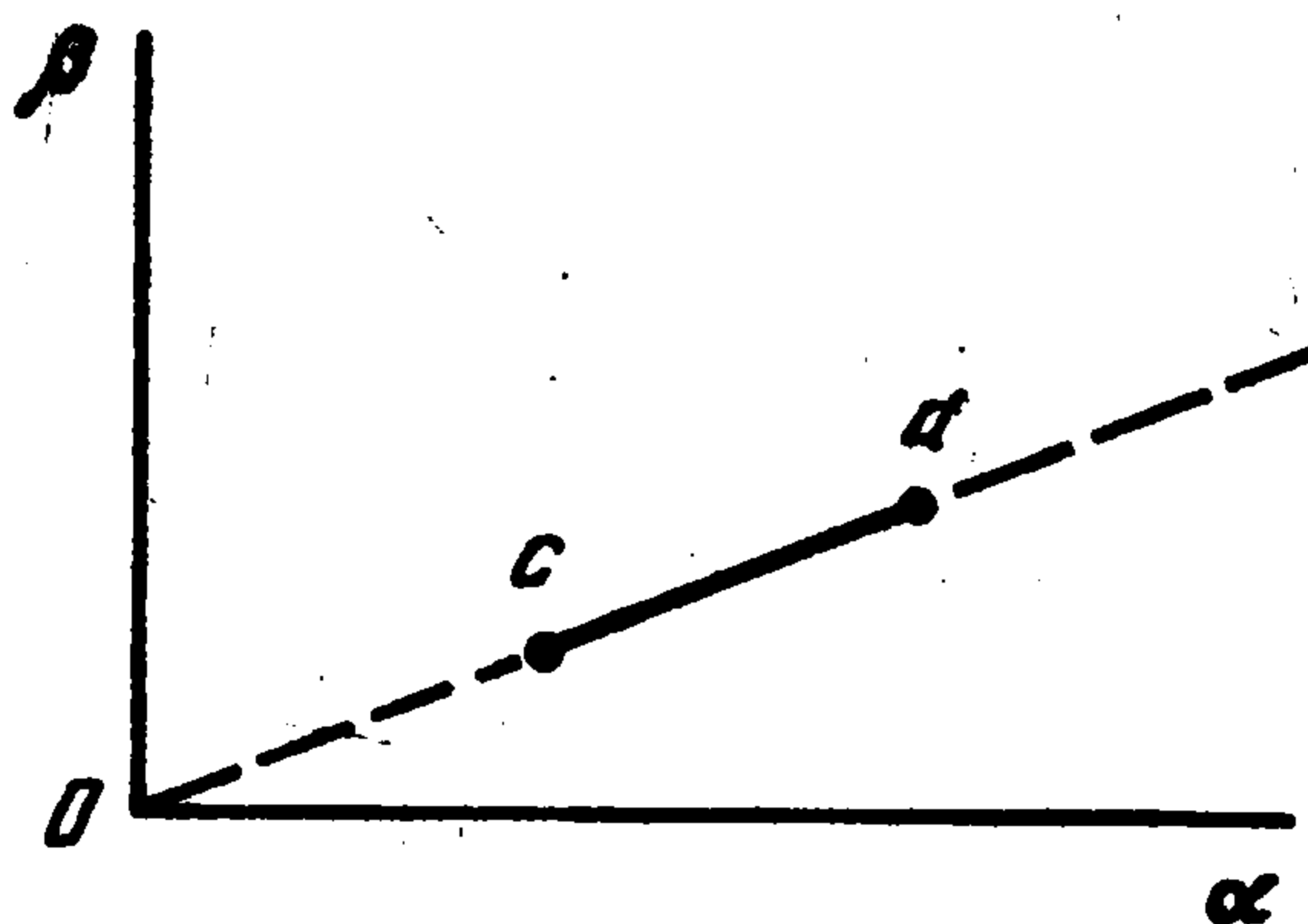
$$\begin{aligned} q_1 &= \cos 2\pi\lambda q + \sin 2\pi\lambda p + \epsilon^2 [\mu_{21}^* q(q^2 + p^2) + \mu_{03}^* q(q^2 - 3p^2)] + O(\epsilon^3) \\ p_1 &= -\sin 2\pi\lambda q + \cos 2\pi\lambda p + \epsilon^2 [\mu_{21}^* p(q^2 + p^2) + \mu_{03}^* p(p^2 - 3q^2)] + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\lambda = \frac{1}{2\pi} \arccos \left( 1 - \frac{4\beta}{\alpha} \right), \mu_{21}^* = \frac{5}{8} - \frac{3\beta}{8}, \mu_{03}^* = -\frac{\beta}{8}$$

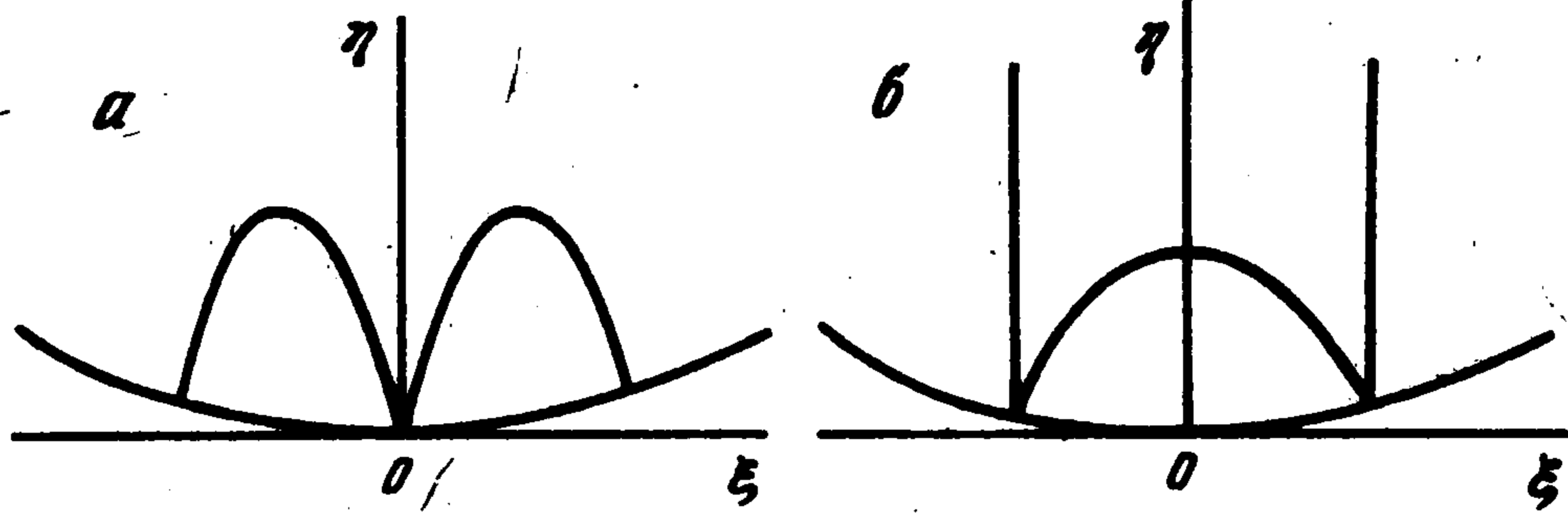
Функция Гамильтона, порождающая отображение (5.2) за период  $2\pi$ , в "полярных" координатах  $\theta, R$  ( $q = \sqrt{2R} \sin \theta, p = \sqrt{2R} \cos \theta$ ) может быть записана следующим образом:

$$H = \lambda R - \frac{\epsilon^2}{2\pi} [\mu_{21}^* + \mu_{03}^* \cos(4\theta - t)] R^2 + O(\epsilon^3) \quad (5.3)$$

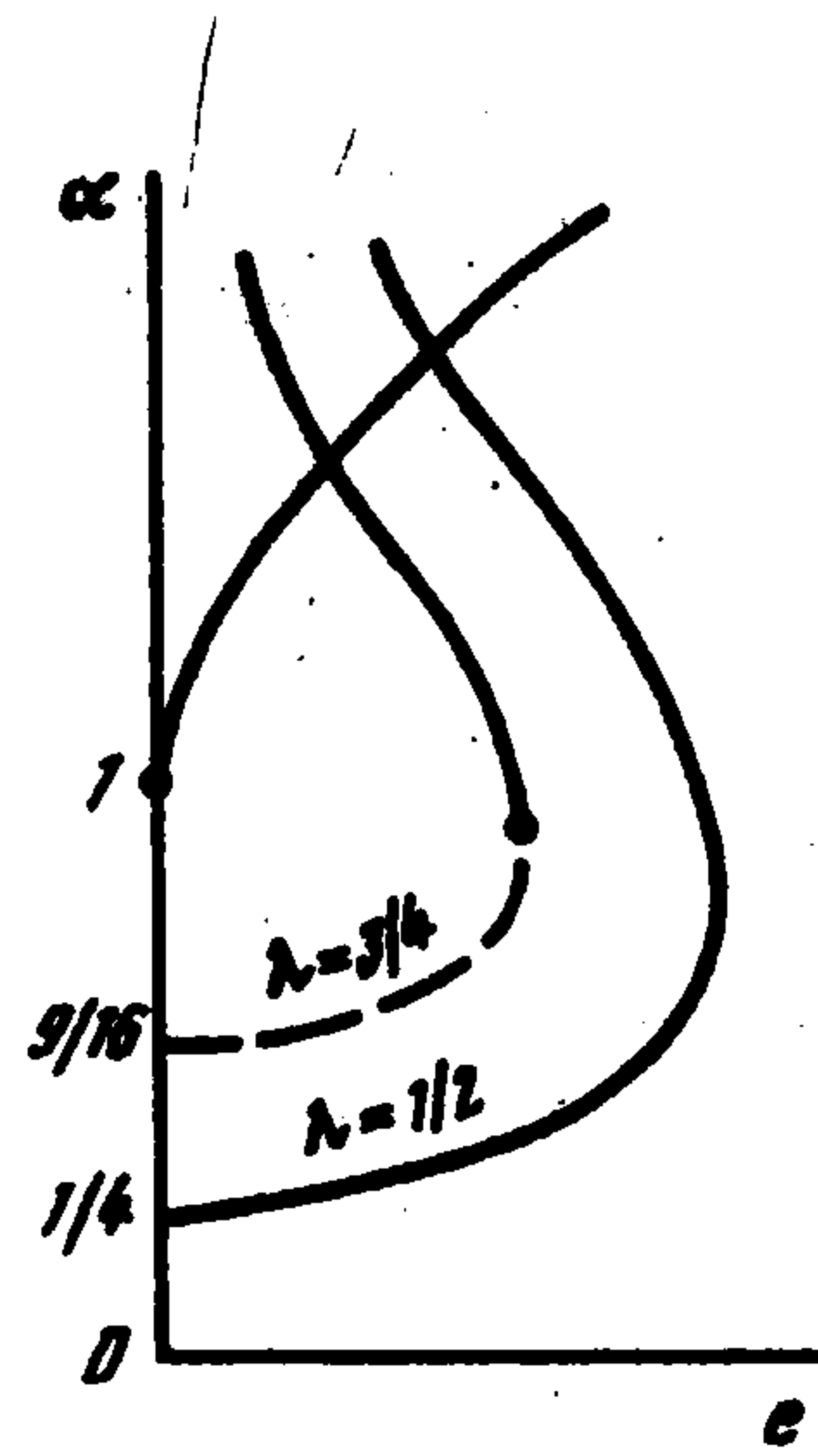
Сделаем замену переменных  $\theta, R \rightarrow \phi, r$ , описанную в разд. 1, полагая  $\theta = t/4 + \sigma[(1 + \sigma)\pi/8 + \phi], R = 2\pi r / |\mu_{03}^*|, \sigma = -\text{sign } \mu_{21}^*$ , и введем новую независимую переменную  $\tau = \epsilon^2 t$ . Гамильтониан (5.3) примет вид (1.3), (1.4), где  $\mu = -\text{sign } \mu_{21}^* \chi, \kappa = |\mu_{21}^* / \mu_{03}^*|$ .



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Используем полученные в разд. 4 выводы применительно к рассматриваемой здесь задаче.

Кроме периодического движения точки вдоль вертикали  $O\eta$  (орбитально устойчивого при  $\mu \neq 0$ ), в изучаемом резонансном случае существуют еще другие периодические движения (с периодом  $T = 8\sqrt{2l/g}$ ), происходящие в окрестности указанного вертикального движения. Они отвечают  $8\pi$ -периодическим движениям системы с гамильтонианом (5.3). Как показывает анализ,  $T$ -периодические движения точки могут быть двух типов. Если пренебречь членами  $O(\epsilon^2)$ , то соответствующие им траектории точки имеют вид, показанный на фиг. 4. Для движения первого типа (фиг. 4,а) абсциссы точек пересечения траектории точки с дугой эллипса равны  $-A, 0, A$ , а для движения второго типа —  $-A\sqrt{2}/2, A\sqrt{2}/2$ , где  $A = 4\epsilon l \sqrt{\pi r_* / |\mu_{03}^*|}$ , а  $r_*$  — соответствующее равновесное значение переменной  $r$  модельной системы.

Для точек  $(\alpha, \beta)$ , лежащих в окрестности прямой  $\beta = \alpha/4$  (фиг. 3) на участках  $0 < \alpha < 5$  и  $\alpha > 10$  (где  $\kappa > 1$ ), ниже этой прямой ( $\mu > 0$ ) нет периодических движений точки, отличных от вертикального; выше этой прямой ( $\mu < 0$ ) на тех же участках изменения  $\alpha$  имеются еще два  $T$ -периодических движения точки — движения первого и второго типов (фиг. 4). При  $0 < \alpha < 5$  движение первого типа неустойчиво, а движение второго типа орбитально устойчиво; при  $\alpha > 10$ , наоборот, движение первого и второго типов соответственно орбитально устойчиво и неустойчиво.

В малой окрестности прямой  $\beta = \alpha/4$  на участке  $5 < \alpha < 10$  (где  $0 \leq \kappa < 1$ ) выше и ниже этой прямой ( $\mu < 0$  и  $\mu > 0$  соответственно), помимо вертикального периодического движения точки, существует еще одно  $T$ -периодическое движение, являющееся неустойчивым. Для точек  $(\alpha, \beta)$ , лежащих выше прямой  $\beta = \alpha/4$  при  $5 < \alpha < 20/3$  и ниже этой прямой при  $20/3 < \alpha < 10$ , это движение первого типа, а для точек  $(\alpha, \beta)$  ниже прямой  $\beta = \alpha/4$  при  $5 < \alpha < 20/3$  и выше этой прямой при  $20/3 < \alpha < 10$  — движение второго типа. Окрестность критической точки  $(20/3, 5/3)$  прямой  $\beta = \alpha/4$  (где  $\kappa = 0$ ) исключена из рассмотрения.

Любые движения точки, начинающиеся в достаточно малой окрестности ее вертикального периодического движения, остаются ограниченными: из результатов разд. 4 следует, что для таких движений справедлива оценка

$$|\xi(t)| < 2l\sqrt{\rho^*} \epsilon(1 + O(\epsilon))$$

где  $\rho^* = r_1^*$  для области  $5 < \alpha < 10, \beta > \alpha/4$ ;  $\rho^* = r_3^*$  для области  $5 < \alpha < 10, \beta < \alpha/4$ ;  $\rho^* = 4r_2^*$  в областях  $0 < \alpha < 5$  и  $\alpha > 10$  по обе стороны от прямой  $\beta = \alpha/4$ . Величины  $r_i^*$  ( $i = 1, 2, 3$ ) определены в первой части разд. 3.

2°. Рассмотрим плоские нелинейные колебания спутника — твердого тела относительно центра масс на эллиптической орбите, описываемые уравнением [9]

$$(1 + e \cos v) \frac{d^2 \psi}{dv^2} - 2e \sin v \frac{d\psi}{dv} + \alpha \sin \psi \cos \psi = 2e \sin v \quad (5.4)$$

где  $\psi$  — угол между одной из главных центральных осей эллипсоида инерции спутника,

лежащих в плоскости орбиты, и радиус-вектором его центра масс,  $\nu$  – истинная аномалия,  $e$  – эксцентриситет орбиты,  $\alpha$  – инерционный параметр ( $|\alpha| \leq 3$ ).

Рассмотрим одну из областей в плоскости параметров  $e, \alpha$  (фиг. 5), где существует единственное  $2\pi$ -периодическое решение  $\psi = \psi_*(\nu)$  уравнения (5.1), устойчивое в линейном приближении (характеристические показатели  $\pm i\lambda$  соответствующей линеаризованной системы чисто мнимые) и переходящее при  $e = 0$  в положение равновесия спутника в орбитальной системе координат [10]. Эта область ограничена кривой ветвления (выходящей из точки  $(0, 1)$ ), кривой  $\lambda = 1/2$  и прямой  $e = 0$  (фиг. 5).

На кривой  $\lambda = 3/4$ , проходящей через рассматриваемую область, реализуется резонанс четвертого порядка. На части резонансной кривой, изображенной на фиг. 5 штриховой линией, решение  $\psi_*(\nu)$  устойчиво (здесь  $\kappa > 1$ ), на другой части, изображенной сплошной линией, неустойчиво ( $0 < \kappa < 1$ ); граничная точка областей устойчивости и неустойчивости ( $\kappa = 1$ ) имеет координаты  $(0,097; 0,85)$  [11].

Выделим часть резонансной кривой вблизи граничной точки по обе стороны от этой точки и рассмотрим вопрос о существовании и устойчивости  $8\pi$ -периодических движений спутника для значений  $e$  и  $\alpha$ , лежащих в малой окрестности указанной части кривой  $\lambda = 3/4$ . Всюду в этой окрестности коэффициент  $c$  нормальной формы функции Гамильтона отрицателен [11]; для точек  $(e, \alpha)$  слева и справа от резонансной кривой имеем  $\chi > 0, \mu < 0$  и  $\chi < 0, \mu > 0$  соответственно (обозначения  $c, \chi, \mu$  введены в разд. 1). Поэтому (см. разд. 4) для точек  $(e, \alpha)$ , находящихся по обе стороны от резонансной кривой выше граничной ее точки (где  $0 < \kappa < 1$ ), существует неустойчивое  $8\pi$ -периодическое движение спутника, происходящее в окрестности его  $2\pi$ -периодического движения, описываемого решением  $\psi = \psi_*(\nu)$ . Для точек  $(e, \alpha)$  в окрестности резонансной кривой, где  $\kappa > 1$  (ниже граничной точки), слева от этой кривой существуют два  $8\pi$ -периодических движения спутника, одно из которых устойчиво, а другое неустойчиво; для точек  $(e, \alpha)$  справа от этой части кривой нет  $8\pi$ -периодических движений спутника, отличных от рассматриваемого  $2\pi$ -периодического движения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00665).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
2. Маркеев А.П. О критическом случае резонанса четвертого порядка в гамильтоновой системе с одной степенью свободы // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 369–376.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
4. Борн М. Лекции по атомной механике. Харьков, Киев: Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1934. 312 с.
5. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
6. Арнольд В.И. Об устойчивости положений равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. № 2. С. 255–257.
7. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
8. Маркеев А.П. О сохраняющих площадь отображениях и их применении в динамике систем с соударениями // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 37–54.
9. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
10. Златоустов В.А., Охоцимский Д.Е., Сарычев В.А., Торжевский А.П. Исследование колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты // Космич. исследования. 1964. Т. 2. Вып. 5. С. 657–666.
11. Zlatoustov V.A., Markeev A.P. Stability of planar oscillations of a satellite in an elliptic orbit // Celest. Mech. 1973. V. 7. № 1. P. 31–45.

Москва

Поступила в редакцию  
17.XI.1997