

УДК 531.36

© 1998 г. Ю.Г. Булычев, А.В. Елисеев

ПРОБЛЕМА ЖЕСТКОСТИ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ И МЕТОД ЕЕ РЕШЕНИЯ

На основе точных или приближенных первых интегралов так называемой усеченной системы дифференциальных уравнений показана возможность повышения устойчивости численного анализа динамических систем, описываемых жесткими стохастическими дифференциальными уравнениями. Приводится численный пример.

Решение широкого класса задач анализа и синтеза динамических систем, функционирующих в условиях случайных возмущений, зачастую сводится к интегрированию стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). При этом ряд целевых задач, таких как фильтрация, идентификация, прогнозирование и оптимальное управление, требуют построения решений СДУ в реальном времени. Однако это, как правило, сопряжено с трудностями вычислительного характера, обусловленными необходимостью интегрирования СДУ высокой размерности [1, 2]. Данные трудности еще более очевидны при интегрировании СДУ, для которых характерно явление жесткости [3–8], выражающееся в наличии пограничных слоев.

Жесткость является внутренним свойством динамической системы, когда для ее адекватного описания в любой точке отрезка наблюдения необходимы два вида функции: быстроубывающие функции с большими производными и функции с малыми производными.

Необходимость выделения жестких динамических систем в отдельный класс вызвана трудностями численного интегрирования СДУ классическими методами типа Адамса и Рунге-Кутты. Известно [3, 5–8], что малый шаг интегрирования, используемый для воспроизведения быстропротекающих процессов в пограничном слое, не может быть увеличен и вне пограничного слоя, хотя производные здесь и становятся существенно меньше. Даже незначительное увеличение шага может привести к резкому возрастанию ("взрыву") погрешности. В этом проявляется противоречие между достаточно большим шагом интерполяции полученного решения и допустимым шагом интегрирования.

Были предложены [3–8] численные методы, допускающие увеличение шага интегрирования вне пограничного слоя. Однако в этих работах в основном рассматриваются неявные методы, которые не нашли широкого применения в теории и практике оптимальной фильтрации, идентификации, прогнозирования и управления.

Ниже приводится новый метод преобразования исходного СДУ, позволяющий на основе найденных заранее первых интегралов так называемой усеченной системы дифференциальных уравнений устранить описанное выше явление жесткости и, как следствие, обеспечить требуемую устойчивость используемых численных методов при существенном увеличении шага интегрирования.

1. Основные определения. Постановка задачи. Пусть вектор состояния $X^T(t) = [x_i(t)]$ динамической системы описывается СДУ в симметризованной форме

$$dX/dt = A(t, X) + G(t)n(t), \quad X(t_0) = X_0 \quad (1.1)$$

где $A^T(t, X) = [a_i(t, x)]$, $G(t) = [g_{ij}(t)]$ – известные матрицы с элементами $a_i(t, x)$ и $g_{ij}(t)$, являющимися непрерывно дифференцируемыми функциями, удовлетворяющими условию Липшица, $n^T(t) = [n_i(t)]$ – вектор формирующих белых гауссовских шумов с задан-

ными статистическими характеристиками: $\langle \mathbf{n}(t) \rangle = 0$, $\langle \mathbf{n}(t) \mathbf{n}^T(t + \tau) \rangle = U \delta(\tau)$, $U = [u_{ij}]$ – симметричная неотрицательно определенная матрица интенсивностей белых шумов, T – символ транспонирования, $\langle \cdot \rangle$ – знак математического ожидания: выше и всюду далее, если не оговорено противное, $t \in [t_0, t_0 + T]$, индексы i, j принимают значения $1, 2, \dots, N$.

Известно [3], что жесткость СДУ вида (1.1) определяется поведением решения усеченной детерминированной системы

$$d\bar{X} / dt = A(t, \bar{X}), \quad \bar{X}(t_0) = \bar{X}_0 = X_0 \quad (1.2)$$

Определение 1 [8]. Система СДУ вида (1.1) называется жесткой, если спектр матрицы $[\partial A(t, \bar{X}) / \partial \bar{X}]$ достаточно четко делится на две части (полагаем $N = K + M$): жесткий спектр, для собственных чисел которого выполняются условия

$$\operatorname{Re} \lambda_k^* \leq -L, \quad \operatorname{Im} \lambda_k^* < |\operatorname{Re} \lambda_k^*|, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

мягкий спектр, для собственных чисел которого выполняются условия

$$|\tilde{\lambda}_m| \leq l \ll L, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Отношение L/l называют показателем жесткости системы.

Для практических расчетов также применимо следующее определение жесткости.

Определение 2 [3]. Система СДУ (1.1) называется жесткой, если выполняется условие

$$|\lambda_i| \exp(\operatorname{Re} \lambda_i \tau_{ps}) \leq L_{ps} / N_{ps}, \quad \operatorname{Re} \lambda_i < 0; \quad (1.3)$$

$$|\lambda_i| \leq L_{ps} / N_{ps}, \quad \operatorname{Re} \lambda_i \geq 0$$

$$L_{ps} = \max |\lambda_i|, \quad N_{ps} \geq 1, \quad \tau_{ps} \leq T$$

Следствие. Непосредственно из (1.3) следует, что в жесткой системе не может быть больших по модулю собственных чисел (порядка L_{ps}) с положительной действительной частью. Для собственных чисел, имеющих величину модуля порядка L_{ps} , должно иметь место неравенство $\exp(\operatorname{Re} \lambda_i \tau_{ps}) \leq N_{ps}^{-1}$, $N_{ps} \geq 1$, т.е. они должны обладать большими по модулю отрицательными действительными частями.

Выявить жесткость системы (1.1) можно также путем ее интегрирования на начальном участке методом Эйлера. При этом решение с малым шагом Δt дискретности ($\Delta t \leq \|\partial A(t, \bar{X}) / \partial \bar{X}\|^{-1}$) приводит к тому, что при попытке увеличения шага экспоненциально возрастает погрешность.

Следует отметить, что критерий жесткости может несколько меняться в зависимости от вида СДУ. Покажем это на примере СДУ следующего вида:

$$dX / dt = A(t, X) + \sum_{m=1}^M G_m(t, X) n_m(t), \quad X(t_0) = X_0 \quad (1.4)$$

где $A(t, X) = [a_i(t, X)]^T$, $G_j(t, X) = [g_{ij}(t, X)]^T$ – известные вектор-функции, $n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)$ – независимые между собой белые гауссовские шумы с заданными статистическими характеристиками.

В этом случае в рассмотренных выше критериях необходимо анализировать собственные числа матрицы вида [4]

$$\hat{H}(t) = H(t) + H^T(t) + \sum_{m=1}^M B_m(t) B_m^T(t) \quad (1.5)$$

$$H(t) = \partial A(t, X) / \partial X, \quad B_m(t) = \partial G_m(t, X) / \partial X, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Рассмотренное выше понятие жесткости является, как правило, причиной нарушения устойчивости численных методов, привлекаемых для интегрирования СДУ (1.1), (1.4). Очевидно, что для обеспечения устойчивости необходимо выбирать достаточно мелкий шаг интегрирования. Это в свою очередь приводит к нерациональному использованию вычислительных средств.

2. Преобразование стохастических дифференциальных уравнений. Пусть для системы (1.2) известно ее точное или приближенное аналитическое решение

$$\bar{X}(t) = F(t, \bar{X}_0), \quad \bar{X}(t_0) = \bar{X}_0 = X_0 \quad (2.1)$$

Для построения приближенного аналитического решения возможно использовать метод опорных интегральных кривых [9–12], согласно которому

$$\bar{X}(t) = C(\bar{X}_0)V(t)$$

где $C(\bar{X}_0) = [c_{ij_0}(\bar{X}_0)]$ ($j_0 = 1, 2, \dots, N_0$) – матрица известных коэффициентов, непрерывно зависящих от начального условия \bar{X}_0 , $V(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_{N_0}(t)]^T$ – вектор независимых функций.

По аналогии с принятым ранее подходом [13] определим для (1.2) с учетом (2.1) вектор независимых первых интегралов

$$W(t, \bar{X}, \bar{X}_0) = \bar{X} - F(t, \bar{X}_0) \quad (2.2)$$

$W(t, \bar{X}, \bar{X}_0) = [w_i(t, \bar{X}, \bar{X}_0)]^T$, $d\bar{X}_0/dt \equiv 0$, удовлетворяющий условию

$$\frac{\partial}{\partial t} W(t, \bar{X}, \bar{X}_0) + \{A^T(t, \bar{X})D_X[W(t, \bar{X}, \bar{X}_0)]\}^T = 0 \quad (2.3)$$

и на любом решении $\bar{X}(t)$ системы (1.2), обращающийся в тождество

$$W(t, \bar{X}(t), \bar{X}_0) = \bar{X}(t) - F(t, \bar{X}_0) \equiv 0, \quad (2.4)$$

$$D_{\bar{X}}[W(t, \bar{X}, \bar{X}_0)] = [\partial w_i / \partial \bar{x}_j]^T$$

Очевидно, что выражение $J\{W(t, \bar{X}, \bar{X}_0)\}$ (где $J\{\cdot\}$ – произвольная дифференцируемая функция) также является первым интегралом системы (1.2).

Если в (2.4) вместо решения $\bar{X}(t)$ подставить решение $X(t)$, удовлетворяющее СДУ (1.1), то вектор \bar{X}_0 необходимо заменить на вектор $Q(t) = [q_i(t)]^T$, такой, что

$$W(t, X(t), Q(t)) = X(t) - F(t, Q(t)) = 0, \quad dQ/dt \neq 0 \quad (2.5)$$

Дифференцируя левую и правую части выражения (2.5) по t , учитывая (1.1) и замечая, что в силу (2.3)

$$D_X^T[W(t, X, Q)]G(t)n(t) + D_Q^T[W(t, X, Q)]\frac{dQ}{dt} = 0$$

получим

$$D_X^T[W(t, X, Q)]G(t)n(t)_0 + D_Q^T[W(t, X, Q)]\frac{dQ}{dt} = 0 \quad (2.6)$$

$$D_X[W(t, X, Q)] = [\partial w_i / \partial x_j]^T, \quad D_Q[W(t, X, Q)] = [\partial w_i / \partial q_j]^T$$

С учетом (2.5) и (2.6) имеем

$$G(t)n(t) - D_Q^T[F(t, Q)]\frac{dQ}{dt} = 0$$

Отсюда

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = [D_{\mathbf{Q}}^T[\mathbf{F}(t, \mathbf{Q})]]^{-1} G(t)\mathbf{n}(t) = \tilde{\mathbf{G}}(t, \mathbf{Q})\mathbf{n}(t) = \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{G}}_j(t, \mathbf{Q})n_j(t), \quad \tilde{\mathbf{G}}_j = [\tilde{g}_{ij}]^T \quad (2.7)$$

При этом предполагается выполненным условие $\det D_{\mathbf{Q}}^T[\mathbf{F}(t, \mathbf{Q})] \neq 0$ ($t \in [t_0, t_0 + T]$), обеспечивающее существование обратной матрицы $[D_{\mathbf{Q}}^T[\mathbf{F}(t, \mathbf{Q})]]^{-1}$.

Теорема. Система СДУ вида (2.7) не является жесткой.

Доказательство. Учитывая, что система (2.7) имеет вид, близкий к (1.4), то для оценивания ее жесткости необходимо провести анализ собственных чисел матрицы (1.5). Применительно к (2.7) имеем

$$\tilde{\mathbf{H}}(t) = \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{B}}_j(t)\tilde{\mathbf{B}}_j^T(t), \quad \tilde{\mathbf{B}}_j(t) = \partial \tilde{\mathbf{G}}_j / \partial \mathbf{Q} \quad (2.8)$$

Матрица вида (2.8) является симметричной (вещественной эрмитовой) положительно определенной, и, следовательно, ее собственные числа вещественные и положительные [14]. Из этого можно сделать вывод, что условия жесткости согласно определений 1,2 и следствия не выполняются и СДУ вида (2.7) не является жестким.

Таким образом, на основе развитого выше метода исходная жесткая стохастическая система (1.1) преобразована в новую нежесткую систему (2.7), что позволяет ослабить ограничения на выбор величины шага интегрирования в известных методах решения дифференциальных уравнений, и следовательно, повысить оперативность получения искомой оценки в указанных ранее задачах фильтрации, идентификации, прогнозирования и управления.

Решение исходной системы (1.1) с учетом (2.7) находится следующим образом:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{Q}(t))$$

Как указывалось выше, для нахождения искомых первых интегралов для нелинейной модели (1.1) можно использовать приближенные аналитические методы, в том числе и метод опорных интегральных кривых [9–12].

Разработанный метод имеет наиболее простое и наглядное применение для линейных СДУ. В этом случае формулу (2.1) можно записать так:

$$\bar{\mathbf{X}}(t) = \Phi(t, t_0)\bar{\mathbf{X}}_0$$

где $\Phi(y, t_0)$ – фундаментальная матрица решений однородной системы (1.2). Тогда (2.7) примет вид

$$d\mathbf{Q}/dt = \Phi^{-1}(t, t_0)G(t)\mathbf{n}(t) \quad (2.9)$$

Развитый метод имеет наибольшую вычислительную эффективность в случае, когда решение $\mathbf{X}(t)$ уравнения (1.1) необходимо знать не на каждом шаге интегрирования $t_k \in [t_0, t_0 + T]$ ($k = 1, 2, \dots, K$) уравнения (2.7), а только в некоторые промежуточные t_l ($l \in \{1, 2, \dots, K\}$) или конечный $t_K = t_0 + T$ моменты времени.

3. Пример. Рассмотрим применение разработанного метода к задаче субоптимального оценивания параметров движения летательного аппарата (ЛА). Пусть на интервале времени $[t_0, t_0 + T]$ наблюдается реализация случайного процесса

$$\xi(t) = S(t, \mathbf{X}) + h(t) \quad (3.1)$$

где $h(t)$ – широкополосная флуктуационная помеха, аппроксимирующая белый гауссовский шум с характеристиками: $\langle h(t) \rangle = 0$, $\langle h(t)h(t + \tau) \rangle = V\delta(\tau)$.

Полезный сигнал в (3.1) определяется выражением [2]

$$S(t, \mathbf{X}) = A_0(t)\cos[\omega_0(t - 2c^{-1}D_r(t)) + \varphi(t)] \quad (3.2)$$

где $A_0(t)$ и ω_0 – амплитуда и несущая частота полезного сигнала, $D_r(t)$ – наклонная дальность от ЛА до точки отражения сигнала, $\varphi(t)$ – случайная фаза сигнала.

В качестве математической модели, характеризующей движение ЛА и фазовые флуктуации полезного сигнала, примем модель [2]

$$\frac{dD_r}{dt} = W_r, \quad \frac{dW_r}{dt} = a_r, \quad \frac{da_r}{dt} = -\alpha a_r + \sqrt{2\alpha\sigma_a^2} n_a, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \Delta\omega + \sqrt{\frac{N_\varphi}{2n_\varphi}}$$

$$\frac{d\Delta\omega}{dt} = -\gamma_\omega \Delta\omega + \sqrt{2\gamma_\omega \sigma_\omega^2} n_\omega$$
(3.3)

где W_r – проекция путевой скорости ЛА на направление луча измерителя скорости, a_r – случайный процесс, определяющий радиальную составляющую ускорения ЛА, $\Delta\omega$ – некомпенсированный доплеровский сдвиг частоты, γ_ω , α – параметры, характеризующие ширину спектра доплеровских частот, и спектра флуктуаций величины a_r соответственно.

Таким образом, в рассматриваемой задаче вектор состояния $\mathbf{X}(t)$ имеет вид

$$\mathbf{X}^T = [x_1 = D_r, x_2 = W_r, x_3 = a_r, x_4 = \varphi, x_5 = \Delta\omega]$$

Вектор состояния $\mathbf{x}(t)$, подлежащий оцениванию, удовлетворяет априорному уравнению

$$d\mathbf{X}/dt = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{G}\mathbf{N}, \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$$
(3.4)

где $\mathbf{N}^T(t) = [0, 0, n_a(t), n_\varphi(t), n_\omega(t)]$ – вектор формирующих белых гауссовых шумов с нулевыми математическими ожиданиями и единичными интенсивностями, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{G} = [g_{ij}]$ – матрицы с отличными от нуля элементами: $a_{12} = a_{23} = a_{45} = 1$, $a_{33} = -\alpha$, $a_{55} = -\gamma_\omega$, $g_{33} = \sqrt{2\alpha\sigma_a^2}$, $g_{44} = \sqrt{N_\varphi/2}$, $g_{55} = \sqrt{2\gamma_\omega\sigma_\omega^2}$. В рассматриваемом примере $N = 5$, т.е. $i, j = 1, 2, \dots, 5$.

Уравнение, определяющее алгоритм квазиоптимального оценивания вектора, применительно к (3.1), (3.2) и (3.4) после соответствующих преобразований приводится к виду

$$d\hat{\mathbf{X}}/dt = \mathbf{A}(t)\hat{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{F}_1(t, \hat{\mathbf{X}}), \quad \hat{\mathbf{X}}(t_0) = \mathbf{X}_0$$
(3.5)

$$\mathbf{F}_1^T(t, \mathbf{X}) = [4\omega_0 c^{-1} V^{-1} A_0(t) \xi(t) \sin(\hat{\Phi}_0), 0, 0, -2V^{-1} A_0(t) \xi(t) \sin(\hat{\Phi}_0), 0]$$

$$\hat{\Phi}_0 = [\omega_0(t - 2\hat{D}_r(t)c^{-1}) + \hat{\varphi}(t)]$$

где $\mathbf{K}(t) = [k_{ij}]$ – ковариационная матрица ошибок фильтрации.

Потенциальные характеристики точности и помехоустойчивости оптимального устройства приема и обработки сигналов (3.2) могут быть получены на основании решения уравнения для ковариационной матрицы ошибок фильтрации [2]. Применительно к рассматриваемой задаче указанное уравнение примет вид

$$d\mathbf{K}/dt = \mathbf{A}\mathbf{K} + \mathbf{K}\mathbf{A}^T + \mathbf{P} + \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{G}\mathbf{G}^T$$
(3.6)

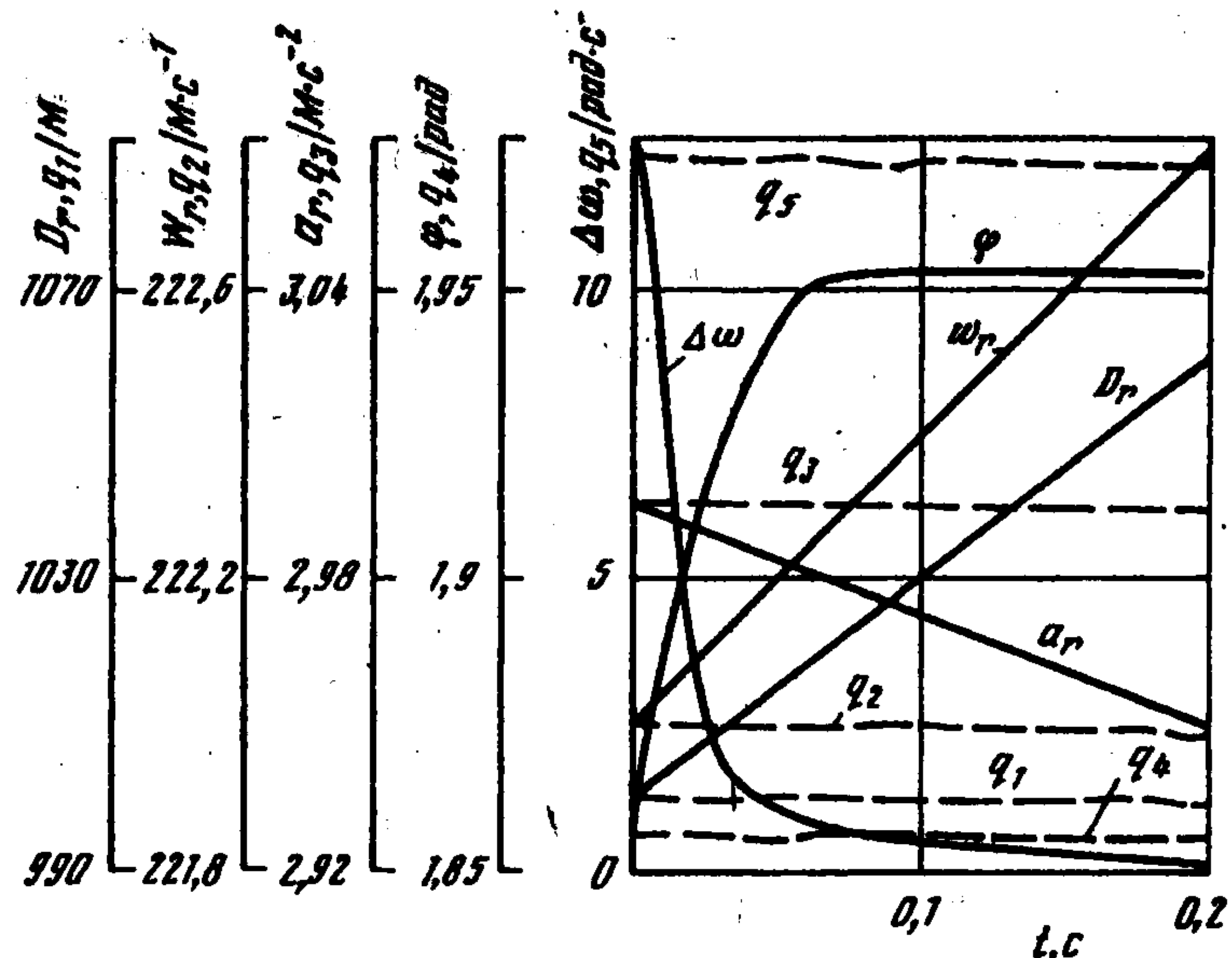
Отличные от нуля элементы матриц $\mathbf{P} = [p_{ij}]$ и $\mathbf{R} = [r_{ij}]$ определяются выражениями:

$$p_{33} = 2\alpha\sigma_a^2, \quad p_{44} = \gamma_\omega D_\varphi, \quad p_{55} = 2\gamma_\omega\sigma_\omega^2, \quad r_{11} = -(8\omega_0^2/c^2)V^{-1}A_0^2$$

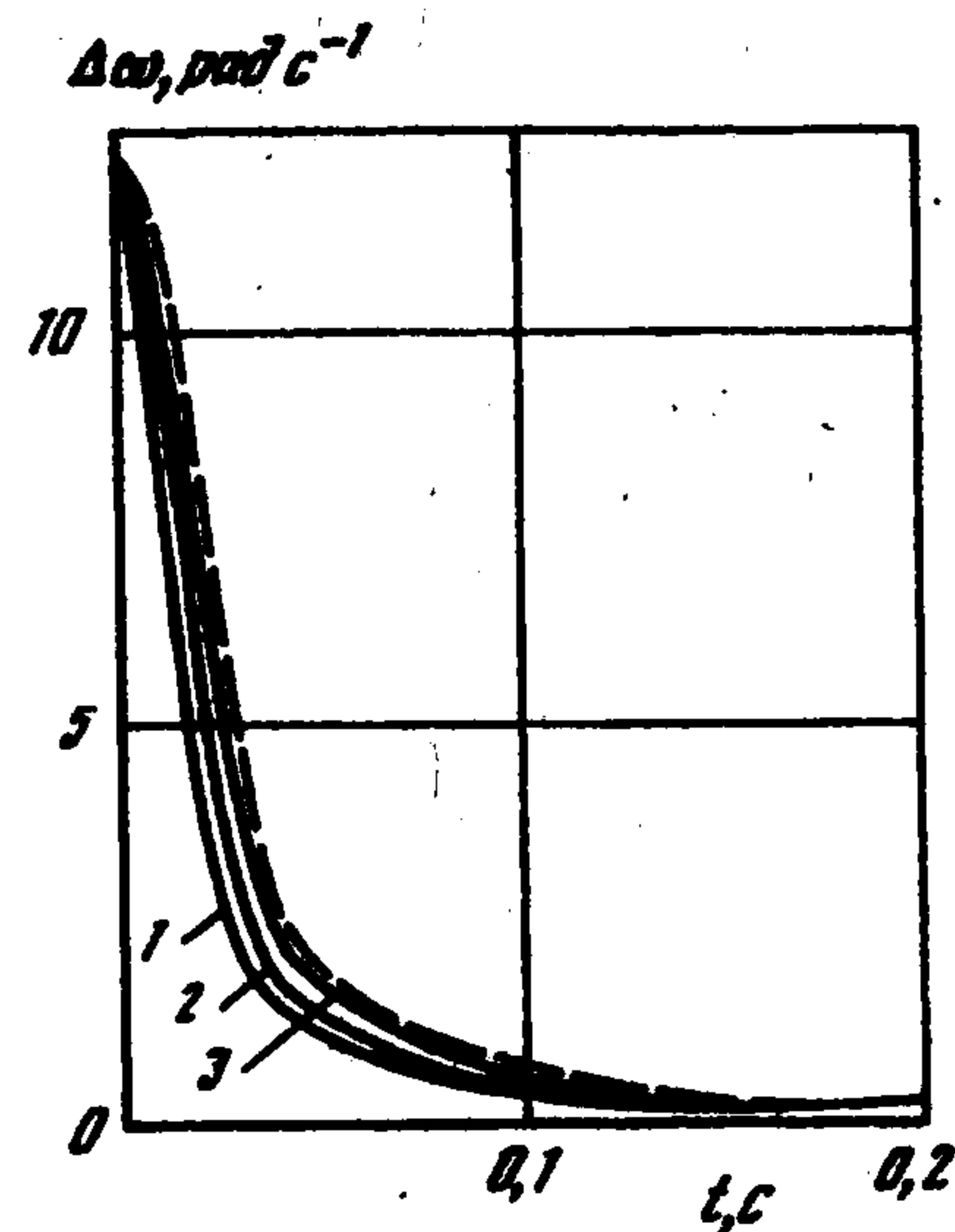
$$r_{14} = r_{41} = (4\omega_0/c)V^{-1}A_0^2, \quad r_{44} = -2V^{-1}A_0^2$$

Для оценки жесткости исходной системы (3.4) по критерию (1.3) (с учетом того, что $\tau_{ps} = 10^{-2}c$) определяем собственные числа матрицы $\mathbf{A}(t)$: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 5 \cdot 10^{-2}$, $\lambda_4 = 0$, $\lambda_5 = -100$. Согласно (1.3) для найденных значений λ_3 и λ_5 соответственно имеем $N_{ps} = 2010$, $N_{ps} = 22026$, что свидетельствует о жесткости системы (3.4) (так как $N_{ps} \gg 1$).

Кроме того, спектр матрицы $\mathbf{A}(t)$ делится достаточно четко на жесткий и мягкий [8], при этом $N = 5$, $K = 1$, $M = 4$, $\tilde{\lambda} = \lambda_5$, $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1$, $\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2$, $\tilde{\lambda}_3 = \lambda_3$, $\tilde{\lambda}_4 = \lambda_4$. Следовательно, показатель жесткости, определяемый, например, как $L/l = 2000$ (согласно определению 1), также подтверждает жесткость задачи.



Фиг 1



Фиг 2

Согласно полученным ранее результатам [3] при численном интегрировании систем (3.5), (3.6) шаг Δt , обеспечивающий устойчивость интегрирования, задается из условия $\Delta t \leq \|A(t)\|^{-1}$.

Для устранения жесткости используем разработанный выше метод. В соответствии с (2.9) определим фундаментальную матрицу решений $\Phi(t, t_0)$ для усеченной системы вида (1.2).

Отличные от нуля элементы матрицы $\Phi(t, t_0) = [\varphi_{ij}]$ таковы:

$$\varphi_{11} = \varphi_{22} = \varphi_{44} = 1, \quad \varphi_{12} = t - t_0, \quad \varphi_{13} = \alpha^{-2} \{ \alpha(t - t_0) - 1 + \xi_\alpha \}$$

$$\varphi_{23} = \alpha^{-1} \{ 1 - \xi_\alpha \}, \quad \varphi_{33} = \xi_\alpha, \quad \varphi_{45} = \gamma^{-1} \{ 1 - \xi_\gamma \}, \quad \varphi_{55} = \xi_\gamma$$

$$(\xi_\alpha = \exp[\alpha(t - t_0)], \quad \xi_\gamma = \exp[\gamma(t - t_0)])$$

Соответственно элементы матрицы $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi_1(t, t_0)$ определяются аналогичным образом, с тем лишь отличием, что

$$\varphi_{(1)12} = -\varphi_{12}, \quad \varphi_{(1)13} = \alpha^{-2} \{ \xi_\alpha - \alpha(t - t_0) - 1 \}$$

Применительно к рассматриваемой задаче нежесткий алгоритм квазиоптимального оценивания (3.5), (3.6) примет вид

$$d\hat{Q}/dt = \tilde{K}F_1(t, \hat{Q}), \quad \hat{Q}(t_0) = \hat{X}(t_0) \quad (3.7)$$

$$d\tilde{K}/dt = \tilde{P} + \tilde{K}R\tilde{K}, \quad \tilde{P} = \tilde{G}\tilde{G}^T, \quad \tilde{K}(t_0) = K(t_0)$$

где $\tilde{G} = \Phi^{-1}(t, t_0)G$.

Переход от \hat{Q} к \hat{X} осуществляется по формуле

$$\hat{X}(t) = \Phi(t, t_0)\hat{Q}(t) \quad (3.8)$$

Отличные от нуля элементы вектора $F_1(t, \hat{Q}) = [f_{(1)i}]^T$ определяются выражениями

$$f_{(1)1} = 4\omega_0 c^{-1} V^{-1} A_0(t) \xi(t) \sin(\hat{\Phi}_2), \quad f_{(1)4} = 2V^{-1} A_0(t) \xi(t) \sin(\hat{\Phi}_2)$$

$$\hat{\Phi}_2 = \omega_0 \{ t - 2c^{-1} [\hat{q}_1(t) + \hat{q}_2(t)(t - t_0) + \alpha^{-2} [\alpha(t - t_0) - 1 + \xi_\alpha^{-1}] \hat{q}_3(t)] + \gamma^{-1} [1 - \xi_\gamma^{-1}] \hat{q}_4(t) \}$$

Величина $A_0^2/(2\gamma V)$ характеризует отношение сигнал/помеха в наблюдаемой реализации $\xi(t)$.

Моделирование на ЭВМ проводилось при следующих исходных данных: $\gamma_\omega = 10^2 \text{ с}^{-1}$, $\alpha = 5 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $\sigma_D = 10^2 \text{ м}$, $\sigma_W = 30 \text{ мс}^{-1}$, $\sigma_a = 10 \text{ мс}^{-2}$, $\sigma_\omega = 1 + 10 \text{ Гц}$, $\sigma_\varphi = \pi/\sqrt{3}$.

Результаты моделирования представлены на фиг. 1. Сплошными линиями показана оценка вектора состояния $X(t)$, полученная в результате интегрирования системы квазиоптимального оценивания (3.5), (3.6) методом Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом $\Delta t = 10^{-3}$ с, которая в дальнейшем принимается за точную. Вид кривой для $\Delta\omega$ свидетельствует о жесткости системы (3.4). Штриховой линией показан результат интегрирования системы (3.7), полученной в результате применения разработанного метода компенсации жесткости к стохастической системе (3.4). Сравнение полученных оценок $X(t)$, $Q(t)$ показывает, что после применения преобразования явление жесткости не наблюдается.

Для оценки вычислительной эффективности алгоритмы квазиоптимального оценивания (3.5), (3.6) и (3.7) интегрировались с различным шагом. Результаты численного интегрирования параметра $\Delta\omega$ представлены на фиг. 2. Кривая 3 показывает вид оценки этого параметра, полученной с помощью разработанного нежесткого алгоритма (3.7)–(3.8), при $\Delta t = 10^{-2}$ с, кривые 1, 2 – оценки, полученные с помощью традиционного алгоритма фильтрации (3.5), (3.6) при $\Delta t = 10^{-2}$ с и $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$ с соответственно, а штриховой линией – точное решение.

Видно, что уже при шаге интегрирования $\Delta t = 10^{-2}$ с разработанной алгоритм фильтрации обеспечивает приемлемую точность оценивания $\epsilon \leq 1\%$ при числе шагов интегрирования $S_0 = T/\Delta t = 200$, тогда как традиционный алгоритм обеспечивает такую же точность при $\Delta t = 10^{-3}$ с и $S_0 = 2000$.

Таким образом, применение разработанного подхода позволяет значительно увеличить шаг Δt при гарантированной точности вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В.И. Развитие прикладных методов оптимальной фильтрации // Радиотехника. 1996. № 7. С. 55–58.
2. Ярлыков М.С. Статистическая теория радионавигации. М.: Радио и связь, 1985. 344 с.
3. Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979. 208 с.
4. Артемьев С.С. Устойчивость в среднем квадратичном численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений // Докл. РАН. 1993. Т. 333. № 4. С. 421–422.
5. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ. Киев, Наук. думка, 1986. 583 с.
6. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 430 с.
7. Curtiss C.F., Hirschfelder J.O. Integration of stiff equations. // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1952. V. 38. № 3. P. 235–242.
8. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: МФТИ, 1994. 526 с.
9. Булычев Ю.Г. Методы численно-аналитического интегрирования дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1991. Т. 31. № 9. С. 1305–1319.
10. Булычев Ю.Г. Метод опорных интегральных кривых решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28. № 10. С. 1482–1490.
11. Булычев Ю.Г. Численно-аналитическое интегрирование дифференциальных уравнений с использованием обобщенной интерполяции // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34. № 4. С. 520–532.
12. Булычев Ю.Г., Манин А.А. Синтез субоптимального управления стохастическими системами на основе прогнозирующей модели // Проблемы математического моделирования. 1996. Т. 60. № 4. С. 553–563.
13. Булычев Ю.Г. Метод первых интегралов в задаче нелинейной фильтрации // Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34. № 11. С. 2337–2344.
14. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980. 400 с.