УДК 531.36

© 1998 г. Дж. Дзаппала

О ВЛИЯНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ДВУМ МЕТРИКАМ

Исследуется задача об устойчивости по двум метрикам под действием возмущений. Решаются задачи об устойчивости положения равновесия механической системы с переменными массами под действием возмущений.

1. Рассматривается система, описываемая уравнениями

$$\dot{y} = Y(t, y) + F(t, y), \quad Y, F \in C(R^+ \times E \to R^n) \tag{1.1}$$

где $R^+ = [0, +\infty[$, R^n – n-мерное пространство y-векторов с нормой $\|y\|$, $E \subset R^n$ – открытая область. Функция F выражает действие некоторых возмущений, так что при их отсутствии движение описывается уравнениями

$$\dot{y} = Y(t, y) \tag{1.2}$$

Предполагается, что функции Y и F удовлетворяют условиям существования и единственности решений систем (1.1) и (1.2), $y(t) = y(t, t_0, y_0)$ – решение системы (1.1), $\tilde{y}(t) = \tilde{y}(t, t_0, y_0)$ – решение системы (1.2), такие, что $y(t_0, t_0, y_0) = y_0$, $\tilde{y}(t_0, t_0, y_0) = y_0$.

Пусть K – класс функций типа Хана, а $h_0 \in C$ $(R^n \times E \to R^+)$ и $h \in C^1(R^+ \times E \to R^+)$ – функции, удовлетворяющие условиям:

1) $\inf(h_0(t, y),\ t \in R^+ : t = \text{const},\ y \in E) = 0, \quad h(t, y) \neq 0$;

2) $\exists \lambda > 0$, $\exists m \in K$, такие, что, если $h_0(t, y) < \lambda$, тогда $h \leqslant m(h_0) \leqslant m(\lambda)$ (здесь и далее K – класс функций типа Хана [1]).

Введением функций h и h_0 задача об устойчивости по двум метрикам [2] может быть сформулирована следующим удобным образом [3].

Определение 1.1. Система (1.2) называется (h_0, h)-устойчивой, если $\forall \varepsilon > 0) \times (\forall t_0 \geqslant 0)$ $(\exists \delta > 0)$ $(\forall y_0 : h_0(t_0, y_0) > \delta)$, $(h(t, \tilde{y}(t)) < \varepsilon \forall t \geqslant t_0)$.

Следуя [3, 4], введем следующие определения, соответствующие определению устойчивости нулевого решения при постоянно действующих возмущениях [5], полагая $S_q = \{(t, y) \in R^+ \times E : h(t, y) < q\}$, где $q = m(\lambda)$.

Определение 1.2. Система (1.2) называется (h_0, h)-устойчивой при постоянно действующих возмущениях (ПДВ), если $(\forall \varepsilon > 0)(\forall t_0 \geqslant 0)(\exists \delta > 0)(\exists d > 0) \times (\forall y_0 : h_0(t_0, y_0) < \delta)$ $(\forall F : \| F \| < d$ на $S_\varepsilon)$, $(h(t, y(t)) < \varepsilon \forall t \geqslant t_0)$.

Определение 1.3. Система (1.2) называется сильно (h_0, h)-устойчивой при ПДВ, если она устойчива в смысле определения 1.2, а также $(\forall \varepsilon > 0)(\forall t_0 \geqslant 0)(\exists \delta > 0) \times (\forall \eta \in]0, \varepsilon[)(\exists d_1 \in]0, d[)(\forall y_0 : h_0(t_0, y_0) < \delta)(\forall F : \|F\| < d_1$ на $S_\varepsilon)(\exists T > 0)$, $(h(t, y(t)) < \eta \forall t \geqslant t_0 + T)$.

Если в определениях 1.1–1.3 числа δ, d, d_1, T не зависят от t_0, то имеем соответствующие определения равномерной (h_0, h)-устойчивости при ПДВ.

Определение 1.4. Система (1.2) называется (h_0, h)-устойчивой при ПДВ, малых в среднем, если

$$(\forall\varepsilon > 0)(\forall t_0 \geqslant 0)(\forall T > 0)(\exists\delta > 0 : m(\delta) < \varepsilon)(\exists d > 0)(\forall y_0 : h(t_0, y_0) < \delta)\times$$

$$\times\left(\forall F: \int\limits_{t=t_0}^{t_0+T} \sup(\| F(u,y)\| \text{ на } S_\varepsilon\right)du < d, \quad (h(t, \ y(t)) < \varepsilon\forall t \geqslant t_0).$$

Определение 1.5. Система (1.2) называется (h_0, h)-устойчивой при ПДВ, малых интегрально, если в определении 1.1 условие относительно F определить в виде

$$\left(\forall F: \int\limits_{t=t_0}^{t_0+T} \sup(\| F(u,y)\| \text{ на } S_\varepsilon\right)du < d$$

2. Применим к поставленной задаче метод функций Ляпунова.

Теорема 2.1. Предположим, что $h \in C^1(R^+ \times E \to R^+)$ и существует функция Ляпунова $W = W(t, y, h) \in C^1(R^+ \times E \times R^+ \to R)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $a(h) \leqslant W(t, y, h) \leqslant \alpha(t)b(h_0)$, $\dot W_{(1.2)}(t,y,h) \leqslant -\beta W(t,y,h)$, $\forall(t, y) \in S_q$, где $a, b \in K$, $\alpha(t) > 0$, $\beta = \text{const} = 0$;

2) существует число $M > 0$, такое, что

$$\left\|\frac{\partial W}{\partial y}\right\|, \quad \left|\frac{\partial W}{\partial h}\right|\left\|\frac{\partial h}{\partial y}\right\| \leqslant M \quad \forall(t, \ y) \in S_q$$

Тогда система (1.1) (h_0, h)-устойчива при ПДВ.

Доказательство. Для заданных $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geqslant 0$ определим число $\delta > 0$ согласно равенству $\alpha(t_0)b(\delta) = a(\varepsilon)$. Для каждого $y_0 \in \{h_0(t_0, y) < \delta\}$ тогда находим $W(t_0, y_0, h(t_0, y_0)) < \alpha(t_0)b(\delta) < a(\varepsilon)$.

Пусть $y(t) = y(t, t_0, y_0)$, $y_0 \in \{h_0(t_0, y) < \delta\}$ – решение системы (1.1) и $W(t) = W(t, y(t), h(t, y(t))$ – функция, определяемая на этом равенстве.

Имеем $W(t_0) < a(\varepsilon)$. Покажем, что если возмущение $F(t, y)$ удовлетворяет оценке $\|F(t, y)\| < \alpha a(\varepsilon)/(2M)$, то для всех $t \geqslant t_0$ выполняется соотношение $h(t, y(t)) < \varepsilon$. При каждом таком возмущении из оценки типа известного соотношения Малкина [5] получаем

$$\dot W_{(1.1)} = \dot W_{(1.2)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial y_i}F_i + \frac{\partial W}{\partial h}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial y_i}F_i \leqslant -\alpha W + 2M \| F_i \| \leqslant -\alpha W + \alpha a(\varepsilon)$$

Таким образом, функция $W(t)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\dot W(t) \leqslant -\alpha W(t) + \alpha a(\varepsilon)$$

из которого следует $a(h(t, y(t, t_0, y_0)) \leqslant W(t) < a(\varepsilon)$ и соответственно $h(t, y(t, t_0, x_0)) \leqslant \varepsilon$ для всех $t \geqslant t_0$. Теорема доказана.

Теорема 2.2. Предположим, что вместо условия *1* теоремы 2.1. выполняется условие $a(h) \leqslant W(t, y, h) \leqslant b(h)$, $\dot W(t,y,h) \leqslant -c(h)\forall(t,y) \in S_q$, где функции $a, b, c \in K$.

Тогда для системы (1.1) имеет место сильная равномерная (h_0, h)-устойчивость при ПДВ.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.1.

3. Рассмотрим поставленную задачу в предположении, что правая часть невозмущенной системы (1.2) ограничена и удовлетворяет условию Липшица на каждом компакте $K \subset E$. При этих условиях система (1.2) предкомпактна [6], так что для ее решений имеет место свойство квазиинвариантности положительного предельного мно-

жества [6]. Техника исследования свойств устойчивости на основе предельных систем и функций Ляпунова со знакопостоянной производной из [7, 8] позволяет также получить определенные результаты и в поставленной задаче.

Теорема 3.1. Предположим, что

1) существует область $\Gamma_0 \subset E$, $\sup (h_0(t, y),\ t \geq 0,\ y \in \Gamma_0) \leq \lambda > 0$, такая, что решения возмущенной системы (1.1) из этой области равномерно ограничены конечной областью Γ;

2) решения невозмущенной системы (1.2) из Γ равномерно ограничены компактной областью Γ_1, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \subsetneq \Gamma_1 \subset E$;

3) существует функция Ляпунова $W = W(t, y, h) \in C^1(R^+ \times E \times R^+ \to R)$, такая, что

$$a(h) \leq W(t,y,h) \leq b(h), \quad \dot{W}_{(1.2)}(t,y,h) \leq -V(t,y) \leq 0$$

$$\forall (t,y) \in S_q, \quad q = m(\lambda)$$

4) для каждой предельной к (Y, V) пары (Φ, Ω) максимально инвариантное относительно системы $\dot{y} = \Phi(t,y)$ подмножество множества $\{\Omega(t, y) = 0\}$ содержится в множестве $\{h(t, y) = 0\}$.

Тогда возмущенная система (1.1) сильно равномерно (h_0, h)-устойчива при ПДВ.

Доказательство. Определим свойства невозмущенной системы (1.2). Из условия *3* теоремы прежде всего следует, что множество $\{h(t, y) = 0\}$ инвариантно и, значит, $Y(t, y) \equiv 0$ при $(t, y) \in \{h(t, y = 0)\}$.

На основе условий *2–4*, следуя доказательству теоремы 2.4 из [8], можно получить, что невозмущенная система (1.2) равномерно асимптотически (h, h)-устойчива и область Γ лежит в области равномерного h-притяжения.

Из этих свойств системы (1.2) аналогично выводу теоремы 2.1 из [3] или теоремы обращения 14.1 из [9] можно вывести, что в области Γ существует функция $W(t, y)$, удовлетворяющая условиям теоремы 2.2. На основании этого и условия *1* данной теоремы достигается искомый результат.

Пример. Уравнения движения материальной точки переменной массы вдоль оси Ox [10, 11] представимо в виде

$$(r(t)\dot{x})^{\cdot} = -f(t,x,\dot{x}) - p(t)g(x) + F(t,x,\dot{x}) \tag{3.1}$$

где $r(t)$ – масса точки, x – ее координата, а правая часть уравнения выражает действие всех возможных сил: реактивной, трения, потенциальной, неизвестных возмущений.

Приведем уравнение (3.1) к системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\frac{\dot{r}(t)}{r(t)}y - \frac{f(t,x,y)}{r(t)} - \frac{p(t)}{r(t)}g(x) + F_1(t,x,y) \tag{3.2}$$

и исследуем устойчивость (3.1) или (3.2) по двум метрикам

$$h_0 = \sup(|x|,\ |y|), \quad h(t,x,y) = 2\int_0^x g\tau d\tau + \frac{r(t)}{p(t)}y^2$$

Допустим, что величины, входящие в (2.3), удовлетворяют условиям

1) $g(x)x \geq 0, \quad g(0) = 0, \quad \int_0^x g(\tau)d\tau \to +\infty$ при $x \to +\infty$;

2) $r(t) > 0, \quad p(t) > 0, \quad 0 < m \leq \dfrac{r(t)}{p(t)} \leq M, \quad \dfrac{\dot{r}(t)}{r(t)} + \dfrac{\dot{p}(t)}{p(t)} \geq l > 0 \forall t \in R^+$;

3) $f(t,x,y)y \geq a(|y|) \forall (t,x,y) \in R^+ \times R^2$;

4) движения возмущенной системы из области $\{|\dot{x}_0|< H,\ |x_0|< H > 0\}$ равномерно ограничены.

Положив, что функция Ляпунова $W = h$, для ее производной (при отсутствии F_1) находим оценку $\dot{W} = -a(|y|) \leq 0$. Отсюда, согласно теореме 3.1, следует, что при указанных условиях движение точки будет сильно равномерно (h_0, h)-устойчиво при ПДВ $F_1(t, x, y)$.

4. Рассмотрим задачу о влиянии на (h_0, h)-устойчивость иных ПДВ.

Теорема 4.1. В условиях теоремы 2.2 система (1.2) равномерно (h_0, h)-устойчива при ПДВ, малых в среднем.

Теорема 4.2. Если условие теоремы 2.2 относительно $\dot{W}_{(1.2)}$ изменить на более слабое $\dot{W}_{(1.2)}(t, y, h) \leq 0$, сохранив остальные условия, то система (1.2) будет равномерно (h_0, h)-устойчивой при ПДВ, малых интегрально.

Теоремы выводятся из теоремы 2.2 аналогично выводу теоремы 4 в работе [12].

Пример. Уравнения движения голономной механической системы с N переменными массами $m_r(t)$ под действием потенциальных, гироскопических, диссипативных и возмущающих сил могут быть записаны в виде [10, 11]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = P_i + \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\dot{q}_j + \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} + F_i \qquad (4.1)$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_n$ – обобщенные координаты, $T = T_2 + T_1 + T_0$ – кинетическая энергия, P_i – реактивные силы, $g_{ij} = -g_{ji}(t, q)$ – коэффициенты гироскопических сил, $\partial U/\partial q_i$ – потенциальные силы, $2R = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$ – диссипативная функция, F_i – возмущающие силы.

Допустим, что для кинетической энергии системы $\partial T/\partial t = 0$, имеет место соотношение $T_0 + U \leq 0$, $T_0 + U = 0$ при $q = 0$, отделение и присоединение частиц к точкам системы таковы, что

$$\sum_{r=1}^{N} \dot{m}_r(\mathbf{V}_r \cdot \mathbf{v}_r) \leq 0$$

где $\dot{m}_r$ – изменение масс точек системы, $\vec{\mathbf{V}}_r$ и $\vec{\mathbf{v}}_r$ – относительные и переносные скорости отделяющихся и присоединяющихся частиц, $(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})$ – скалярное произведение.

Положим $h_0 = \sup(\|\dot{q}\|, |U|)$, $\|\dot{q}\|^2 = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \ldots + \dot{q}_n^2$, $h = T_2 - T_0 - U$. Для производной $W = h$ при отсутствии возмущений F_i находим оценку

$$\dot{W} = -2R + \sum_{r=1}^{N} \dot{m}_r(\mathbf{V}_r \cdot \mathbf{v}_r) \leq 0$$

На основании теоремы 4.1 имеем, что система (4.1) будет равномерно (h_0, h)-устойчивой при ПДВ, малых интегрально.

К задаче об (h_0, h)-устойчивости при действии возмущений может быть применен также метод, основанный на принципе сравнения с векторной функцией Ляпунова [9, 10, 13].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1990. 300 с.
2. *Мовчан А.А.* Устойчивость процессов по двум метрикам // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 988–1001.
3. *Lakshmikantham U., Salvadori L.* On Massera type converse theorems in terms of two different measures // Boll. Un. Mat. Ital. Ser. A. 1976. V. 13. N 2. P. 293–301.

4. *Seibert P.* Stability under perturbations in generalized dynamical systems // Proc. Int. Symp. Nonlin. Differ. Equat. and Nonlin. Mech. Colorado Springs, 1961. N.Y., L.: Acad. Press, 1963. P. 463–473.
5. *Малкин И.Г.* Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях // ПММ. 1944. Т. 8. Вып. 3. С. 241–245.
6. *Artstein Z.* Topological dynamics of an ordinary differential equations // J. Different. Equat. 1977. V. 23. N 2. P. 216–223.
7. *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 225–232.
8. *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы относительно части переменных // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 707–713.
9. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
10. *Gotusso G.* Problemi con massa variable in meccanica classica // Ist. Lombardo Rend. Acad. Sci. Left. Rend. Ser. A. 1959. V. 93. P. 3–28.
11. *Новоселов В.С.* Аналитическая механика систем с переменными массами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1969. 239 с.
12. *Озиранер А.С.* Об устойчивости движения относительно части переменных при постоянно действующих возмущениях // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 419–427.
13. *Хатвани Л.* О применении дифференциальных неравенств к теории устойчивости // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. 1975. № 3. С. 83–89.

Италия

Поступила в редакцию
21.VIII.1996