УДК 531.37

© 1998 г. В.М. Матросов, И.А. Финогенко

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МНОЖЕСТВА ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ АВТОНОМНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ТРЕНИЕМ СКОЛЬЖЕНИЯ

Изучаются вопросы устойчивости множества положений равновесия автономных дифференциальных уравнений, к которым приводятся уравнения движения механических систем с трением скольжения (см. [1, 2]). В исследованиях существенно учитывается структура уравнений, обусловленная спецификой системы, используются общие свойства движений, изученные ранее в [3–7], и множества, возникающие при анализе уравнений и обладающие свойствами абсолютного сектора.

1. К постановке задачи. Уравнения движения исследуемой механической системы для обобщенных координат $q = (q^1, \ldots, q^k)$ (записанные в векторной форме) имеют вид

$$A(q)\ddot{q} = q(q,\dot{q}) + Q^A(q,\dot{q}) + Q^T(q,\dot{q},\ddot{q}) \tag{1.1}$$

Здесь $A(q) = [a_{ij}(q)]_1^k$ – матрица коэффициентов инерции, $Q^A(q,\dot{q})$ и $g(q,\dot{q})$ – векторные функции, представляющие активные силы, обобщенные гироскопические силы, переносные силы инерции и другие силы, $Q^T(q,\dot{q},\ddot{q})$ – обобщенные силы трения, выражающиеся формулами

$$Q_s^T(q,\dot{q},\ddot{q}) = \begin{cases} -f_s(q^s,\dot{q}^s)\,|\,N_s\,|\,\mathrm{sgn}\,\dot{q}^s, & \text{если} \quad \dot{q}^s \neq 0 \\ f_s(q^s,0)\,|\,N_s\,|\,\mathrm{sgn}\,Q_s^{T0}, & \text{если} \quad \dot{q}^s = 0; \quad |\,Q_s^{T0}\,| > f_s(q^s,0)\,|\,N_s\,|_{\ddot{q}^s=0} \\ Q_s^{T0}, \quad \text{если} \quad \dot{q}^s = 0; & Q_s^{T0}\,| \leqslant f_s(q^s,0)\,|\,N_s\,|_{\ddot{q}^s=0} \end{cases}$$

$$Q_s^{T0} \triangleq \sum_{j=1,\ j\neq s}^{k} a_{s,j}(q)\ddot{q}^j - [g_s(q,\dot{q}) + Q_s^A(q,\dot{q})]_{\dot{q}^s=0} \tag{1.2}$$

$1 \leqslant s \leqslant k_*$, $k_* \leqslant k$, где $f_s(q^s,\dot{q}^s) > 0$ – коэффициенты трения, $|N_s|$ – модули нормальных реакций, Q_s^{T0} – силы трения при относительном покое; для $s = k_* + 1, \ldots, k$ считаем $f_s = 0$.

Более детально уравнения движения (в общем неавтономном случае) описаны в [1, 2] и исследованы в [3–7], где были получены условия разрешимости уравнений (1.1) относительно $\ddot{q}$ и приводимости их к виду

$$\ddot{q} = G(q,\dot{q}) \tag{1.3}$$

с разрывной, вообще говоря, функцией $G : \Omega \to R^k$, определенной в некоторой области $\Omega \subset R^{2k}$, доказано существование правосторонних решений (1.3) и изучены их общие свойства. Эти условия (неравенства (3.1) в [2], неравенства (2) в [7]), а также необходимые свойства непрерывности и дифференцируемости функций, фигурирующих в системе (1.1), (1.2), в дальнейшем предполагаются выполненными.

На пути применения функций Ляпунова к анализу неявных систем вида (1.1) могут возникнуть трудности, связанные с установлением знакоопределенности производных этих функций в силу уравнений (1.1). Здесь исследуются свойства решений уравнения (1.1) вблизи множества положений равновесия, которые позволяют ослабить эти трудности. Решения понимаются как правосторонние. Для удобства дальнейших обозначений и доказательств уравнение (1.3) преобразуется к виду

$$\dot{x} = f(x); \quad x = (q,\dot{q}), \quad f = (G_1, G), \quad G_1 = \dot{q} \tag{1.4}$$

Для каждой точки $x \in \Omega$ обозначим

$$\Gamma = \Gamma(x) \overset{\Delta}{=} \{x' = (q',\dot{q}') \in R^{2k} : \dot{q}'^s = 0, \quad \text{если} \quad s \in \mathcal{N}, \quad f_s \mid N_s \mid > \mid Q_s^{T0} \mid;$$

$$\dot{q}'^s Q_s^{T0} \leqslant 0, \quad \text{если} \quad s \in \mathcal{N}, \quad f_s \mid N_s \mid \leqslant \mid Q_s^{T0} \mid, \quad \mid N_s \mid \neq 0\}$$

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(\dot{q}) \overset{\Delta}{=} \{s \in (1, \ \ldots, \ k_*) : \dot{q}^s = 0\}$$

где значение функций f_s, $|N_s|$, Q_s^{T0} соответствуют $(q,\dot{q})$, значение $\ddot{q}$ в выражениях для $|N_s|$ и Q_s^{T0} считается равным $G(q,\dot{q})$.

Положим

$$S_\delta = S_\delta(x) \overset{\Delta}{=} \{x' \in \Omega : \| x - x' \| < \delta\}, \quad \Omega_\delta = \Omega_\delta(x) \overset{\Delta}{=} S_\delta(x) \cap \Gamma(x)$$

Если $\mathcal{N} = \phi$ или $|N_s| = 0$ для всех $s \in \mathcal{N}$, то считаем $\Gamma \overset{\Delta}{=} R^{2k}$.

Приведем свойства функции f, которые понадобятся в дальнейшем.

Лемма 1.1. В каждой точке $x \in \Omega$ выполняются свойства:

1) функция f локально ограничена;

2) функция f непрерывна вдоль множества $\Gamma(x)$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, такое, что $\|f(x) - f(x')\| < \varepsilon \forall x' \in \Omega_\delta(x)$;

3) $f(x) \in \Gamma(x)$;

4) существует локально липшицевая функция $V_x : R^{2k} \to R^1$, такая, что

$$V_x(x') \geqslant 0; \quad V_x(x') = 0 \Leftrightarrow x' \in \Gamma(x) \tag{1.5}$$

и, если $\Gamma(x) \neq R^{2k}$, то существуют числа $\alpha = \alpha(x) > 0$ и $\delta = \delta(x) > 0$, такие, что

$$D^+V_x(x') < -\alpha \forall x' \in S_\delta(x) \backslash \Gamma(x) \tag{1.6}$$

где $D^+V_x(x') \overset{\Delta}{=} \lim_{h\to+0}[V_x(x' + hf(x')) - V(x')]/h$ – правая производная в силу уравнения (1.4).

Свойства 1, 2 (в иных обозначениях) установлены в (5) (леммы 1 и 4). Свойство 3 следует из формулы (1,2), леммы 2 [2] и определения множеств Г. Свойство 4 доказано в [5] (лемма 8) применительно к Δ-решениям уравнения (1.3), т.е. таким непрерывным функциям, которые (в случае автономного уравнения (1.3)) удовлетворяют соотношениям

$$D^+q(t) = \dot{q}(t), \quad \| D^+\dot{q}(t) - G(q(t), \ \dot{q}(t)) \| < \Delta, \quad \forall t \in [0,a)$$

Здесь следует лишь заметить, что любое правостороннее решение уравнения (1.4) является также Δ-решением уравнения (1.3), а правая (верхняя правая) производная локально липшицевой функции вдоль правостороннего решения может быть вычислена в соответствии с теоремой Иосидзавы ([8], с. 269).

2. Вспомогательные утверждения. Из (1.5), (1.6) вытекает, что для любого $x \in \Omega$ при соответствующем выборе числа $\delta > 0$ множество $\Omega_\delta(x)$ обладает свойством абсолютного сектора, а именно: траектория любого решения с начальным условием $x(0) \in \Omega_\delta(x)$ остается в $\Omega_\delta(x)$ для всех $t \geq 0$, при которых $x(t) \in S_\delta(x)$. Чтобы указывать на это свойство множества $\Omega_\delta(x)$, будем называть его абсолютным сектором, порожденным множеством $\Gamma(x)$ или, кратко, Г-сектором с вершиной x и радиусом δ, всегда при этом имея в виду, что для числа $\delta > 0$ выполняется условие (1.6). Для случая $\Gamma(x) = R^{2k}$ выполняется равенство $\Omega_\delta(x) = S_\delta(x)$ и радиусом считается произвольное положительное число. Если же $\Gamma(x) \neq R^{2k}$ и $\delta > 0$ – радиус Г-сектора, то любое число $\delta' \in (0, \delta)$ также является радиусом сектора, порожденного тем же самым множеством $\Gamma(x)$. Это очевидное свойство в дальнейшем используется без оговорок. В частности, всегда считается, что для любого $x \in \Omega$ выбор δ обеспечивает выполнение условия $\overline{S_\delta(x)} \subset \Omega$, где черта сверху означает замыкание множества. Тогда из теоремы 1 [6] о продолжимости следует, что любое решение $x(t)$, определенное на правом максимальном промежутке $[0, \omega)$ с начальным условием $x(0) \in S_\delta(x)$, существует для всех $t \geq 0$, при которых $x(t) \in \overline{S_\delta(x)}$.

Для произвольного множества $M \subset R^{2k}$ и числа $\beta > 0$ через M^β будем обозначать β-окрестность множества M, т.е. $M^\beta \triangleq \{x' \in R^{2k} : d(x', A) < \beta\}$, где d – расстояние от точки до множества. Для каждого $x \in \Omega$ β-окрестность множества $\Gamma(x)$ обозначим $\Gamma^\beta(x)$.

Лемма 2.1. Пусть $x \in \Omega$ и $\delta = \delta(x) > 0$ – радиус Г-сектора $\Omega_\delta(x)$. Тогда для любых чисел $\tau > 0$, $\beta \in (0, \delta)$ существуют $\tau_0 \in (0, \tau)$, $\beta_0 \in (0, \beta)$, такие, что для любого решения $x(t)$:

$$(x(0) \in \Gamma^{\beta_0}(x) \cap S_{\delta-\beta}(x)) \Rightarrow (x(\tau_0) \in \Gamma(x) \cap S_\beta(x(0))) \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть $\beta \in (0, \delta)$ и $\tau > 0$ произвольны. В силу локальной ограниченности функция f ограничена на компактном множестве $\overline{S_\delta(x)}$. Поэтому существует $\tau_0 \in (0, \tau)$, настолько малое, что для всех решений $x(t)$

$$(x(0) \in S_{\delta-\beta}(x)) \Rightarrow (\forall t \in [0, \tau_0], \quad x(t) \in S_\beta(x(0))) \tag{2.2}$$

Если $\Gamma(x) = R^{2k}$, то (2.1) следует из (2.2) при $\beta_0 > 0$ произвольном.

Пусть $\Gamma(x) \neq R^{2k}$ и $\alpha = \alpha(x) > 0$ – число, для которого справедливо неравенство (1.6). Используя условие (1.5), выберем $\beta_0 \in (0, \beta)$ так, чтобы

$$V_x(x') < \alpha\tau_0 \forall x' \in \Gamma^{\beta_0}(x) \cap S_\delta(x) \tag{2.3}$$

Предположим, что $x(t)$ – решение с начальным условием $x(0) \in \Gamma^{\beta_0}(x) \cap S_{\delta-\beta}(x)$. Тогда из (2.2) вытекает

$$x(t) \in S_\beta(x(0)), \quad \forall t \in [0, \tau_0] \tag{2.4}$$

Если при этом $x(0) \in \Gamma(x)$, то из (2.4) и очевидного соотношения $S_\beta(x(0)) \subset S_\delta(x)$ заключаем, что $x(t) \in \Omega_\delta(x)$, $\forall t \in [0, \tau_0]$, и тогда включение (2.1) доказано. Если же $x(0) \notin \Gamma(x)$, то из (1.6), (2.3) получаем

$$V_x(x(t)) < V_x(x(0)) - \alpha t < \alpha(\tau_0 - t)$$

для всех $t > 0$, таких, что $x(t) \in S_\delta(x) \backslash \Gamma(x)$. Так как функция V_x неотрицательна и на отрезке $[0, \tau_0]$ выполняется включение $x(t) \in S_\delta(x)$, то найдется точка $t_1 \in (0, \tau_0)$, такая, что $V_x(x(t_1)) = 0$. Тогда $x(t_1) \in \Gamma(x)$ и $x(t) \in \Omega_\delta(x)$ для всех $t \in [t_1, \tau_0]$ откуда, учитывая (2.4), получаем (2.1).

Всюду в дальнейшем через $M \subset \Omega$ обозначается компактное множество, удовлетворяющее для каждого $x \in M$ условию $M \subset \Gamma(x)$. Очевидно, последнее включение выполняется всегда, если M – множество положений равновесия уравнения (1.1).

Лемма 2.2. **Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$, конечный набор Г-секторов $\Omega_{\delta_i}(x_i)$ с вершинами в точках $x_i \in M$ и радиусами $\delta_i \in (0, \varepsilon)$ и числа $\lambda_i \in (0, \delta_i)$** ($i \in J$, $J \triangleq (i = 1,\ldots,n)$), такие, что

$$M \subset \{\cup\Omega_{\lambda_i}(x_i) : i \in J\} \tag{2.5}$$

и любое решение $x(t)$ обладает свойством: если

$$(x(0) \in \Omega_{\lambda_i}(x_i) \cap M^{\varepsilon_0}) \wedge (\forall t \in [0, t^*),\ x(t) \in M^{\varepsilon_0}) \tag{2.6}$$

для некоторого индекса $i \in J$ и промежутка $[0, t^*)$ (конечного или бесконечного), то

$$x(t) \in \{\cup\Omega_{\delta_i}(x_i),\ i \in J\},\quad \forall t \in [0, t^*) \tag{2.7}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Учитывая компактность множества M, покроем его конечным числом шаров $S_{\delta_i/2}(x_i)$ $(i \in J)$, где $\delta_i \in (0, \varepsilon)$ – радиусы Г-секторов с центрами в точках $x_i \in M$. Так как функция f локально ограничена, то, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\|f(x)\| \leq L$ для всех $x \in \{\cup S_{\delta_i}(x_i) : i \in J\}$, где $L > 0$ – некоторая постоянная. Положим $\eta = \min\{\delta_i/4L : i \in J\}$ и для произвольных $\beta_i \in (0, \delta_i/4)$, $\tau \in (0, \eta)$ через $\beta_{0i} \in (0, \beta_i)$, $\tau_{0i} \in (0, \tau)$ обозначим числа, существование которых для каждой точки x_i установлено в лемме 2.1. Так как множества $\Gamma^{\beta_{0i}}(x_i)$ открыты, то множество

$$H_1 \triangleq \{\cap\Gamma^{\beta_{0i}}(x_i) : i \in J\} \tag{2.8}$$

является открытой окрестностью множества M. Обозначим

$$H_2^i \triangleq H_1 \cap S_{\delta_i/2}(x_i),\quad H_2 \triangleq \{\cup H_2^i : i \in J\} \tag{2.9}$$

Тогда H_2 – открытая окрестность множества M. Так как M компактно, H_2 открыто, то существует $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$, такое, что

$$M^{\varepsilon_0} \subset H_2 \tag{2.10}$$

Обозначим $\lambda_i = 3\delta_i/4$ $(i \in J)$. Пусть для решения $x(t)$ выполняется условие (2.6) для некоторого индекса $i_1 \in J$ и промежутка $[0, t^*)$. Если для всех $t \in [0, t^*)$ выполняется включение

$$x(t) \in \Omega_{\delta_{i_1}}(x_{i_1}) \tag{2.11}$$

то справедливо включение (2.7) и лемма доказана.

Предположим, что (2.11) не выполняется для некоторого $t \in [0, t^*)$. Так как $x(0) \in S_{\lambda_{i_1}}(x_{i_1})$ и множество $\Omega_{\delta_{i_1}}(x_{i_1})$ является Г-сектором, то найдутся наибольшая точка t_1 и наименьшая точка t_2, $t_1 < t_2$, из промежутка $[0, t^*)$, для которых

$$\|x(t_1) - x_{i_1}\| = \lambda_{i_1},\quad \|x(t_2) - x_{i_1}\| = \delta_{i_1} \tag{2.12}$$

При этом для всех $t \in [t_1, t_2)$ выполняется включение (2.11) и $x(t) \in M^{\varepsilon_0}$. Непосредственно из (2.9), (2.10) вытекает

$$M^{\varepsilon_0} \subset H_1,\quad M^{\varepsilon_0} \subset \{\cap S_{\delta_i/2}(x_i) : i \in J\} \tag{2.13}$$

Поэтому найдется индекс $i_2 \in J$, такой, что

$$x(t_1) \in S_{\delta_{i_2}/2}(x_{i_2}) \cap H_1 \tag{2.14}$$

Поскольку $0<\beta_{i_2}<\delta_{i_2}/4$, то из (2.14) и определения множества H_1 получаем

$$x(t_1)\in S_{\delta_{i_2}-\beta_{i_2}}\cap\Gamma^{\beta_{0i_2}}(x_{i_2}) \tag{2.15}$$

Из (2.12) вытекает $\|x(t_1)-x(t_2)\|\geqslant\delta_{i_1}/4$. Поэтому выбор чисел τ и τ_{0i} обеспечивает выполнение неравенства $t_2-t_1>\tau>\tau_{0i_2}$. Теперь из (2.15) и леммы 2.1 получаем $x(t_1+\tau_{0i_2})\in\Gamma(x_{i_2})\cap S_{\beta_{i_2}}(x(t_1))$. Следовательно, если учесть (2.14), то $x(t_1+\tau_{0i_2})\in\ \Omega^0_{\lambda_{i_2}}(x_{i_2})$. Теперь снова, если для всех $t\in[t_1+\tau_{0i_2},\ t^*)$

$$x(t)\in\Omega_{\delta_{i_2}}(x_{i_2}) \tag{2.16}$$

то лемма доказана.

Если же это не так, то, принимая точку $t_1+\tau_{0i_2}$ за начальную, найдем наибольшую точку t_3 и наименьшую точку t_4 из промежутка $[0, t^*)$, $t_3<t_4$, такие, что

$$\|x(t_3)-x_{i_2}\|=\lambda_{i_2},\quad \|x(t_4)-x_{i_2}\|=\delta_{i_2} \tag{2.17}$$

При этом $t_3<t_1$ и для всех $t\in[t_3, t_4)$ выполняется включение (2.16). Из (2.14), (2.17) вытекает

$$\|x(t_1)-x(t_3)\|\geqslant\delta_{i_2}/4 \tag{2.18}$$

Продолжая описанные выше шаги, получим последовательность точек $t_k\in[0,t^*)$ и индексов $i_k\in J$ $(k=1,2,\ldots)$, такие, что

$$x(t)\in\Omega_{\delta_{i_k}}(x_{i_k})\forall t\in[t_{2k-1},\ t_{2k}) \tag{2.19}$$

и, аналогично (2.18), $\|x(t_{2k-1})-x(t_{2k+1})\|\geqslant\delta_{i_{k+1}}/4$. Последнее неравенство и выбор чисел η и τ обеспечивает $t_{2k-1}-t_{2k+1}\geqslant\eta>\tau$. Поэтому если $t^*<+\infty$, то данная последовательность конечна и обрывается так, как это описано выше, и в этом случае теорема доказана. (Данная ситуация может соответствовать уходу траектории из множества M^{ε_0}.) Если $t^*=+\infty$, то $t_k\to+\infty$, и поэтому для любого $t\in[0,+\infty)$ найдется номер k, такой, что выполняется включение (2.19), а значит, и (2.7).

Лемма 2.3. Для любого $\tau>0$ и для конечного покрытия множества M Γ-секторами $\Omega_{\lambda_i}(x_i)(i\in I\triangleq(1,\ldots,m))$ существуют $\tau_0\in(0,\tau)$ и $\delta_0>0$, такие, что любое решение $x(t)$ обладает свойством:

$$x(0)\in M^{\delta_0}\Rightarrow x(\tau_0)\in\{\cup\Omega_{\lambda_i}(x_i):i\in I\} \tag{2.20}$$

Доказательство. Пусть $\tau>0$ произвольно и Γ-секторы $\Omega_{\lambda_i}(x_i)$ образуют покрытие множества M, т.е. $M\subset\{\cup\Omega_{\lambda_i}(x_i):i\in I\}$. Тогда, очевидно, множество открытых шаров $S_{\lambda_i}(x_i)(i\in I)$ также является покрытием M. Учитывая компактность множества M, можно выбрать число $\beta>0$ настолько малым, что выполняются условия:

$$\beta<\min\{\lambda_i:i\in I\},\quad M^\beta\subset\{\cup S_{\lambda_i-\beta}(x_i):i\in I\}$$

Для каждого Γ-сектора $\Omega_{\lambda_i}(x_i)$, чисел τ и β в соответствии с леммой 2.1 существуют числа $\tau_{0i}\in(0,\ \tau)$ и $\beta_{0i}\in(0,\ \beta)$, такие, что выполняется свойство (2.1) для $x=x_i$, $\delta=\lambda_i$, $\tau_0=\tau_{0i}$, $\beta_0=\beta_{0i}$.

Обозначим $\delta_0=\min\{\beta_{0i}:i\in I\}$ и пусть $x(t)$ – решение, такое, что $x(0)\in M^{\delta_0}$. Тогда $x(0)\in\Gamma^{\beta_{0i}}(x_i)$ для всех $i\in I$ и $x(0)\in S_{\lambda_i-\beta}(x_i)$ для некоторого $i\in I$. Поэтому из (2.1) вытекает $x(\tau_0) \in \Gamma(x_i) \cap S_\beta(x(0)) \subset \Gamma(x_i) \cap S_{\lambda_i}(x_i)$ для некоторого $i \in I$. Тем самым свойство (2.20) установлено и лемма доказана.

3. Теоремы об устойчивости. Для вещественнозначной функции V, определенной в некоторой окрестности множества M и числа γ обозначим $E(V < \gamma) \stackrel{\Delta}{=} \{x : V(x) < \gamma\}$. Аналогично определяется множество $E(V = \gamma)$. Через $D^{*+}V(x)$ обозначается верхняя правая производная функция V в силу уравнения (1.4).

Теорема 3.1. Пусть в некоторой окрестности M^ρ, $\rho > 0$, множества M определена неотрицательная локально липшицевая функция $V(x)$ со свойствами:

1) $V(x) = 0 \Leftrightarrow x \in M$;

2) для любого Γ-сектора $\Omega_\delta(x)$ с вершиной $x \in M$ и радиусом $\delta < \rho$ выполняется неравенство $D^{*+}V(x') \leqslant 0$ для всех $x' \in \Omega_\delta(x)$.

Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\tau > 0$ существуют $\delta > 0$ и конечное покрытие множества M Γ-секторами $\Omega_{\delta_i}(x_i)$, $x_i \in M (i \in J)$, такие, что любое решение $x(t)$ с начальным условием $x(0) \in M^\delta$ определено для всех $t \geqslant 0$ и удовлетворяет условиям

$$\forall t \geqslant 0, \;\; x(t) \in M^\varepsilon, \;\; \forall t \geqslant \tau, \;\; x(t) \in \{\bigcup \Omega_{\delta_i}(x_i) : i \in J\} \tag{3.1}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in (0, \rho)$ и $\tau > 0$ произвольны. В соответствии с леммой 2.2 существуют $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$, Γ-секторы $\Omega_{\delta_i}(x_i)$ и числа $\lambda_i \in (0, \delta_i)(i \in J)$, такие, что выполняется соотношение (2.6) $\Rightarrow$ (2.7). Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что множество M^{ε_0} принадлежит Ω вместе со своим замыканием, так как в силу компактности M этого всегда можно добиться за счет произвольности $\varepsilon > 0$.

Для всякого $\eta \in (0, \varepsilon_0)$ существует $\gamma > 0$, такое, что

$$E(V < \gamma) \bigcap M^{\varepsilon_0} \subset M^\eta \tag{3.2}$$

Действительно, предположим противное. Тогда существуют $\eta \in (0, \varepsilon_0)$, последовательности чисел $\gamma_i \to +0$ и точек $x_i \in E(V < \gamma_i) \bigcap M^{\varepsilon_0}$, такие, что $x_i \notin M^\eta$. Так как множество M^{ε_0} ограничено, то из последовательности $\{x_i\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $x_i \to x_0$. В силу непрерывности функции V, получаем $V(x_0) = 0$ и тогда $x_0 \in M$. Но с другой стороны, $x_i \notin M^\eta$, и поэтому $x_0 \notin M$. Полученное противоречие доказывает соотношение (3.2).

Положим число $\eta = \varepsilon_0/2$ и для соответствующего ему γ обозначим $W = E(V < \gamma) \bigcap M^{\varepsilon_0}$.

Из (2.5) вытекает, что Γ-секторы $\Omega_{\lambda_i}(x_i)$ образуют покрытие множества M. Тогда согласно лемме 2.3 существуют $\tau_0 \in (0, \tau)$ и $\delta_0 > 0$, такие, что выполняется условие (2.20). Учитывая компактность множества M, локальную ограниченность функции f и произвольность $\tau > 0$, заключаем, что числа δ_0 и τ_0 могут быть настолько малыми, что выполняется включение $M^{\delta_0} \subset W$ и любое решение $x(t)$ с начальным условием $x(0) \in M^{\delta_0}$ определено и удовлетворено условию $x(t) \in W$ для всех $t \in [0, \tau_0]$. Тогда для некоторого индекса i

$$x(\tau_0) \in W \bigcap \Omega_{\lambda_i}(x_i) \tag{3.3}$$

Если $x(t) \in W$ для всех $t \in [0, \omega)$, то в соответствии с теоремой о продолжимости решений [6] и условиями (3.3), (2.6), (2.7) имеем $\omega = +\infty$ и справедливы включения (3.1), и тогда теорема доказана.

Предположим, что существует $t \in [0, \omega)$, такое, что $x(t) \notin W$. Тогда найдется наименьшее значение $t_1 \in [0, \omega)$, такое, что $x_1 = x(t_1) \in \partial W$. Из определения множества W и условия $W \subset M^{\varepsilon_0/2}$ вытекает $x_1 \in E(V = \gamma)$, и тогда из свойств функции V получаем

$$\forall t \in [0, t_1),\ V(x(t)) \leqslant V(x_1) = \gamma \tag{3.4}$$

Но $x(t) \in W \subset E(V < \gamma)$ для всех $t \in [0, t_1)$, и поэтому $V(x(t)) < \gamma$ при $t \in [0, t_1)$, что противоречит (3.4). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Отметим, что в теореме 3.1 утверждается не только устойчивость множества M (т.е. $x(0) \in M^\delta \Rightarrow \forall t \geqslant 0, x(t) \in M^\varepsilon$), но и выполнение второго условия (3.1), из которого вытекает, что функция $V(x(t))$ не возрастает для всех $t \geqslant \tau$ вдоль любого решения $x(t)$ с начальным условием $x(0) \in M^\delta$. Последнее вместе с принципом инвариантности может быть использовано для доказательства асимптотической устойчивости множества M.

Теорема 3.2. Пусть выполняются условия теоремы 3.1 и, дополнительно, $D^{*+}V(x') < 0$ для всех $x' \in \Omega_\delta(x) \backslash M$. Тогда множество M асимптотически устойчиво (т.е. M устойчиво и $d(x(t), M) \to 0$ при $t \to +\infty$ для любого решения $x(t)$ с начальным значением $x(0) \in M^\delta$).

Доказательство. Для решения $x(t)$ через $\Lambda^+(x)$ обозначим ω-предельные множества. Так как функция $V(x(t))$ не возрастает при всех $t > \tau$, то в соответствии с результатами работы [4] выполняется условие

$$\Lambda^+(x) \subset E(D^{*+}V = 0) \tag{3.5}$$

Пусть $x_0 \in \Lambda^+(x) \backslash M$. Тогда существует последовательность $t_k \to +\infty$, такая, что $x(t_k) \to x_0$. В силу второго включения (3.1) найдется Г-сектор $\Omega_{\delta_i}(x_i)$, такой, что $x_0 \in \Omega_{\delta_i}(x_i)$. Но тогда $D^{*+}V(x_0) < 0$, что противоречит (3.5). Полученное противоречие показывает, что $\Lambda^+(x) \subset M$, откуда и вытекает утверждение теоремы.

Теорема 3.3. Пусть выполняются условия теоремы 3.1 и, дополнительно, множество $E(D^{*+}V = 0) \cap M^\rho$ не содержит замкнутых полуинвариантных множеств, не пересекающихся с M и принадлежащих какому-либо покрытию множества M Г-сеекторами. Тогда множество M асимптотически устойчиво.

Доказательство. Используя условие (3.5), полуинвариантность и замкнутость множества $\Lambda^+(x)$ (см. [4]) и теорему 3.1, заключаем, что при сделанных предположениях $\Lambda^+(x) \cap M \neq \emptyset$. Тогда существует последовательность $t_k \to +\infty$, такая, что $x(t_k) \to x_0 \in M$. Тогда из устойчивости множества M вытекает $d(x(t), M) \to 0$ при $t \to +\infty$, и теорема доказана.

Теорема 3.4. Пусть M – устойчивое, компактное множество положений равновесия уравнения (1.3), такое, что некоторая его окрестность M^ρ не содержит положений равновесия, не принадлежащих M. Предположим, что на множестве M^ρ определены локально липшицевые функции $V_i(x) (i \in I)$, такие, что для любого Г-сектора $\Omega_\delta(x)$ с вершиной $x \in M$ и радиусом $\delta \in (0, \rho)$ выполняются условия:

1) $D^{*+}V_i(x') \leqslant 0$ для всех $x' \in \Omega_\delta(x)$ и $i \in I$;

2) $\Omega_\delta(x) \cap E \subset \{x : x = (q, \dot{q}),\ \dot{q} = 0\}$, где $E \overset{\Delta}{=} \{\cap E(D^{*+}V_i = 0) : i \in I\}$.

Тогда M асимптотически устойчиво.

Доказательство. Из устойчивости множества M и лемм 2.2 и 2.3 вытекает, что существуют достаточно малые числа $\delta > 0$ и $\tau > 0$, такие, что для любого решения $x(t)$ с начальным условием $x(0) \in M^\delta$ для всех $t > \tau$ выполняется второе условие (3.1) для некоторого покрытия множества M Г-секторами $\Omega_{\delta_i}(x_i)$. Поэтому при сделанных предположениях функции $V_i(x(t))$ не возрастают при $t > \tau$. Тогда $\Lambda^+(x) \subset E$, и поэтому с учетом (3.2) заключаем, что для любой точки $x = (q, \dot{q}) \in \Lambda^+(x)$ выполняется равенство

$\dot{q} = 0$. Теперь из полуинвариантности множества $\Lambda^+(x)$ вытекает, что оно состоит из положений равновесия. Следовательно, $\Lambda^+(x) \subset M$, откуда и получаем утверждение теоремы.

4. Пример. Рассматривается плоская механическая система, состоящая из поршня B массой m_1, движущегося с трением по горизонтальной прямолинейной трубке Ox и рассматриваемого как материальная точка с координатой $x = q^1$, и тяжелого абсолютно твердого тела, имеющего массу m_2 и момент инерции J_C относительно центра масс, вращающегося с трением вокруг цилиндрического шарнира, установленного на поршне. Расстояние от шарнира до центра масс C равно r. Угол β отклонения BC от нормали к Ox, направленной вниз, принимается за q^2. Предполагается, что вдоль Ox действует сила упругости пружины с коэффициентом упругости c и точкой ненапряженного состояния $x = 0$. Коэффициенты трения f_1 в поршне и f_2 в шарнире считаются постоянными, $m = m_1 + m_2$, $J = J_C + m_2 r^2$. Этот пример представляет собой видоизмененную систему из [3] (см. также [4]): предполагается, что вдоль оси Ox действует упругая сила пружины.

Уравнения движения системы в форме Лангранжа записываются в виде

$$\begin{aligned} &m\ddot{x} + m_2 r\cos\beta\ddot{\beta} = m_2 r\dot{\beta}^2 \sin\beta - cx + Q_1^T \\ &m_2 r\cos\beta\ddot{x} + J\ddot{\beta} = -m_2 gr\sin\beta + Q_2^T \end{aligned} \tag{4.1}$$

Обобщенные силы трения определяются по формуле (1.2) для $s = 1, 2$, где

$$|N_1| = |m_2 r(\ddot{\beta}\sin\beta + \dot{\beta}^2\cos\beta) + mg|$$

$$|N_2| = m_2[(\ddot{x} + r\ddot{\beta}\cos\beta - r\dot{\beta}^2\sin\beta)^2 + (r\ddot{\beta}\sin\dot{\beta} + r\dot{\beta}^2\cos\beta + g)^2]^{1/2}$$

$$Q_1^{T0} = m_2 r(\ddot{\beta}\cos\beta - \dot{\beta}^2\sin\beta) + cx \ (\dot{x} = 0, \ \ddot{x} = 0)$$

$$Q_2^{T0} = m_2 r(\ddot{x}\cos\beta + g\sin\beta) \ (\dot{\beta} = 0, \ \ddot{\beta} = 0)$$

Достаточными условиями разрешимости уравнений (4.1) относительно $\ddot{q} = (\ddot{x}, \ddot{\beta})$ и приводимости их к виду (1.3) являются неравенства (6.4) из [3]. Эти же неравенства обеспечивают справедливость леммы 1.1, существование правосторонних решений уравнения (4.1) и их общие свойства, которые использовались в данной работе (продолжимость, полуинвариантность ω-предельных множеств).

Множество положений равновесия для системы (4.1) имеет вид

$$M = \{(q, \dot{q}) : \dot{x} = 0, \dot{\beta} = 0, \ f_1 mg \geq c|x|, \ f_2 \geq r|\sin\beta|\}$$

Будем полагать, что $f_2/r < 1$. В этом случае M – совокупность прямоугольников на плоскости (x, β). Определим β_{lz} из условий: $\sin\beta_{lz} = f_2/r$, $0 < \beta_{lz} < \pi/2$ и положим $x_{lz} = f_1 mg/c$. Множество $M_{lz} \overset{\Delta}{=} \{(q, \dot{q}) \in M : |x| \leq x_{lz}, \ |\beta| \leq \beta_{lz}\}$ будем называть нижней зоной застоя.

Обозначим

$$W_1 = \begin{cases} c(x^2 - x_{lz}^2)/2, & |x| > x_{lz} \\ 0, & |x| \leq x_{lz} \end{cases}, \quad W_2 = \begin{cases} m_2 gr(\cos\beta_{lz} - \cos\beta), & |\beta| > \beta_{lz} \\ 0, & |\beta| \leq \beta_{lz} \end{cases}$$

$$T = \tfrac{1}{2}(m\dot{x}^2 + 2m_2 r\dot{x}\dot{\beta}\cos\beta + J\dot{\beta}^2), \quad V = T + W_1 + W_2$$

$$w_1 = f_1|N_1||\dot{x}|, \quad w_2 = f_2|N_2||\dot{\beta}|$$

Функция V является положительно определенной относительно множества M_{lz} в некоторой достаточно малой его окрестности.

Опишем множества Γ для точек $(x_0, \beta_0, \dot{x}_0, \dot{\beta}_0) = (q_0, \dot{q}_0) \in M_{lz}$ и значения правой производной D^+V в силу системы (4.1) на каждом Γ-секторе $\Omega_\delta(q_0, \dot{q}_0)$. Вначале заметим, что при условии $(q_0, \dot{q}_0) \in M_{lz}$ имеем

$\dot{q}_0 = 0, \ \ddot{q}_0 = 0$

$|N_1| = mg, \ |N_2| = m_2 g, \ |Q_1^{T0}| = c|x|, \ |Q_2^{T0}| = m_2 rg|\sin\beta|$

Учитывая, что при условии $|\beta_0| = \beta_{lz}$ знаки β и $\sin\beta$ совпадают в достаточно малой окрестности точки β_0, рассмотрим следующие возможные случаи (значение D^+V соответствует точкам $(x, \dot{x}, \beta, \dot{\beta}) = (q, \dot{q}) \in \Omega_\delta(q_0, \dot{q}_0)$):

1) $|x_0| < x_{lz}, \ |\beta_0| < \beta_{lz}$ ($(q_0, \dot{q}_0)$ – внутренняя точка прямоугольника M_{lz}); тогда

$$\Gamma(q_0, \dot{q}_0) = \{(q, \dot{q}) : \dot{x} = 0, \ \dot{\beta} = 0\}, \ D^+V = 0$$

2) $|x_0| < x_{lz}, \ |\beta_0| = \beta_{lz}$ или $|\beta_0| < \beta_{lz}, \ |x_0| = x_{lz}$ (стороны прямоугольника M_{lz} без вершин); тогда

$$\Gamma(q_0, \dot{q}_0) = \{(q, \dot{q}) : \dot{x} = 0, \ \ \dot{\beta}\beta_0 \leqslant 0\}$$

$$D^+V = \begin{cases} -w_2, & |\beta| > \beta_{lz} \\ -w_2 + m_2 gr|\sin\beta||\dot{\beta}|, & |\beta| \leqslant \beta_{lz} \end{cases}$$

или, соответственно,

$$\Gamma(q_0, \dot{q}_0) = \{(q, \dot{q}) : \dot{\beta} = 0, \ \ \dot{x}x_0 \leqslant 0\}$$

$$D^+V = \begin{cases} -w_1, & |x| > x_{lz} \\ -w_1 + c|x||\dot{x}|, & |x| \leqslant x_{lz} \end{cases}$$

3) $|x_0| = x_{lz}, |\beta_0| = \beta_{lz}$ (вершины прямоугольника M_{lz}); тогда

$$\Gamma(q_0, \dot{q}_0) = \{(q, \dot{q}) : \dot{\beta}\beta_0 \leqslant 0, \ \dot{x}x_0 \leqslant 0\}$$

$$D^+V = \begin{cases} -w_1 - w_2, & |\beta| > \beta_{lz}, \ |x| > x_{lz} \\ -w_1 - w_2 + c|x||\dot{x}|, & |x| \leqslant x_{lz}, \ |\beta| > \beta_{lz} \\ -w_1 - w_2 + m_2 gr|\sin\beta||\dot{\beta}|, & |\beta| \leqslant \beta_{lz}, \ |x| > x_{lz} \\ -w_1 - w_2 + c|x||\dot{x}| + m_2 gr|\sin\beta||\dot{\beta}|, & |\beta| \leqslant \beta_{lz}, \ |x| \leqslant x_{lz} \end{cases}$$

Таким образом, имеем девять возможных видов для множеств Г и в пределах каждого Г-сектора обобщенные скорости $\dot{x}$, $\dot{\beta}$ либо обращаются в нуль, либо сохраняют знаки, обратные знакам x_0 и β_0 соответственно.

В случае 1 знакоопределенность $D^+V(q, \dot{q})$ в дальнейшем анализе не нуждается. В случаях 2 и 3 знак D^+V определяется соотношениями между значениями функций $f_1|N_1|$ и $c|x|$, $f_2|N_2|$ и $m_2 gr|\sin\beta|$ на множестве $\Gamma(q, \dot{q})$. Легко заметить, что условие $D^+V \leqslant 0$ будет выполняться (в пределах Г-сектора), если для любой точки $(q_0, \dot{q}_0) \in M_{lz}$ вдоль каждого решения уравнения (4.1) со значениями в Г-секторе $\Omega_\delta(q_0, \dot{q}_0)$ будет выполняться неравенство

$$D^+\dot{\beta}\sin\beta + \dot{\beta}^2\cos\beta \geqslant 0 \tag{4.2}$$

Действительно, в этом случае из неравенства $|x| \leqslant x_{lz}$ вытекает

$$f_1|N_1| \geqslant f_1 mg \geqslant c|x|$$

и из неравенства $|\beta| \leqslant \beta_{lz}$ вытекает

$$f_2|N_2| \geqslant f_2 m_2 g \geqslant m_2 gr|\sin\beta|$$

откуда при учете вида D^+V и получаем $D^+V \leqslant 0$.

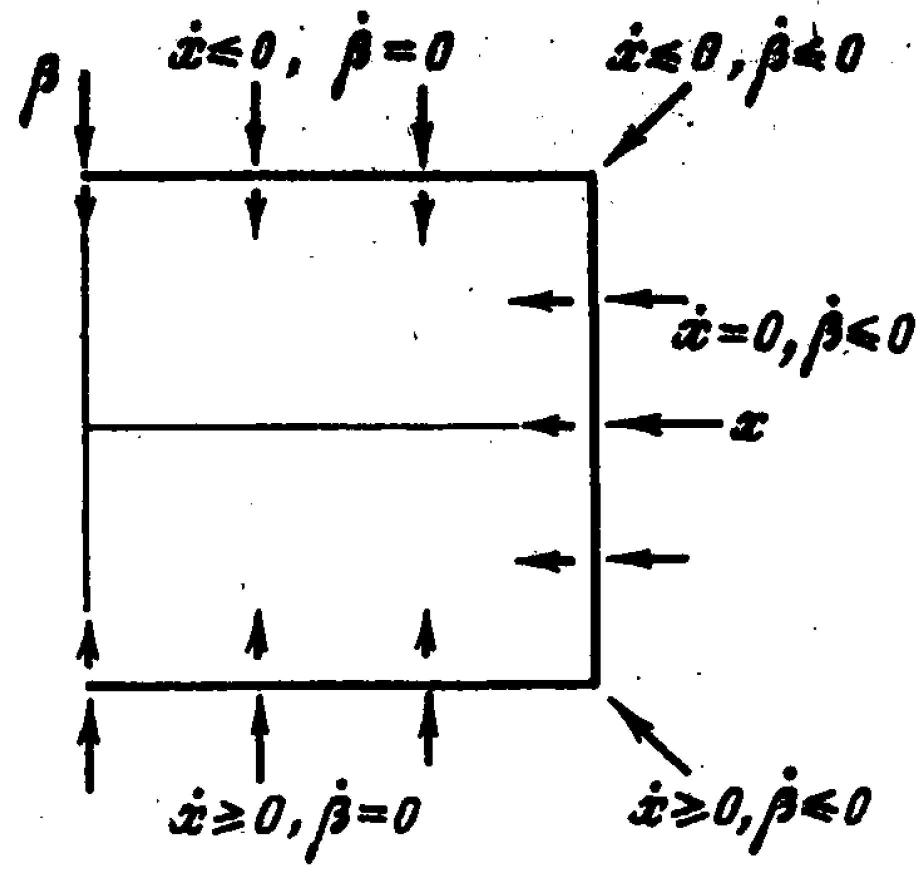
Для того чтобы доказать (4.2), предположим противное. Тогда, так как функция $D^+\dot{\beta}(t)$ непрерывна справа ([6], теорема 3), то выполняется неравенство

$$D^+\dot{\beta}\sin\beta + \dot{\beta}^2\cos\beta < 0 \tag{4.3}$$

на некотором малом промежутке $[0, \alpha)$. Интегрируя (4.3), получаем

$$\dot{\beta}(t)\sin\beta(t) - \dot{\beta}(0)\sin\beta(0) < 0 \forall t \in (0, \alpha)$$

Если $|\beta_0| < \beta_{lz}$, то $\dot{\beta}(t) = 0$ для достаточно малых $t > 0$ и, следовательно, выполняется неравенство (4.2). Поэтому неравенство (4.3) будет выполняться лишь при условии $|\beta_0| = \beta_{lz}$. Тогда можно полагать, что $\sin\beta(t) \neq 0$.



Пусть для определенности $\sin\beta(t) > 0$. Тогда $\dot{\beta}(t) \leq 0$, и следовательно, $\sin\beta(t)$ – невозрастающая функция. Поэтому выполняется неравенство $\sin\beta(t) \leq \sin\beta(0)$, из которого, если учесть, что $\dot{\beta}(t) \leq 0$, вытекает неравенство

$$\dot{\beta}(0)\sin\beta(t) \geq \dot{\beta}(0)\sin\beta(0) \geq \dot{\beta}(t)\sin\beta(t)$$

Следовательно, $\dot{\beta}(0) \geq \dot{\beta}(t)$, откуда получаем $D^+\dot{\beta}(0) \geq 0$. Но тогда неравенство (4.3) при $t = 0$ не выполняется, что противоречит сделанному предположению.

Случай $\sin\beta(t) < 0$ рассматривается аналогично и также приводит к противоречию с (4.3).

Таким образом, для уравнений (4.1), множества M_{lz} и функции V выполнены все условия теоремы 3.1, в соответствии с которой нижняя зона застоя устойчива.

Для того чтобы изучить асимптотическую устойчивость множества M_{lz} с использованием теоремы 3.4, рассмотрим функции $V_1 = x^2/2$, $V_2 = \beta^2/2$. Тогда для любых $(q_0, \dot{q}_0) \in M_{lz}$ и Г-секторов $\Omega_\delta(q_0, \dot{q}_0)$

$$D^+V_1 = x\dot{x} \leq 0, \quad D^+V_2 = \beta\dot{\beta} \leq 0$$

Если $x_0 = 0$ или $\beta_0 = 0$, то при достаточно малом $\delta > 0$ для всех $(q, \dot{q}) \in \Omega_\delta(q_0, \dot{q}_0)$ имеем $\dot{x} = 0$, или соответственно $\dot{\beta} = 0$. Если же $x_0 \neq 0$ и $\beta_0 \neq 0$, то

$$E(D^+V_1 = 0) \cap E(D^+V_2 = 0) = \{(q, \dot{q}) : \dot{x} = 0,\ \dot{\beta} = 0\}$$

Таким образом, всегда

$$\Omega_\delta(q_0, \dot{q}_0) \cap E(D^+V_1 = 0) \cap E(D^+V_2 = 0) \subset \{(q, \dot{q}) : \dot{x} = 0,\ \dot{\beta} = 0\}$$

и в соответствии с теоремой 3.4 множество M_{lz} асимптотически устойчиво.

В заключение отметим, что второе условие (3.1) теоремы 3.1 и соотношение (2.6) ⇒ (2.7) леммы 2.2 позволяют давать наглядные геометрические интерпретации поведения движений вблизи множества M положений равновесия (как устойчивого, так и неустойчивого), поскольку поведение траекторий в пределах Г-сектора может существенно упрощаться. Для системы (4.1) фазовым является четырехмерное пространство переменных $(x, \beta, \dot{x}, \dot{\beta})$. Тем не менее фигура дает достаточно полное представление о поведении траекторий вблизи нижней зоны застоя (показана лишь правая часть плоскости (x, β), в левой части множество M_{lz} и траектории располагаются симметрично относительно оси Ox). Для Г-секторов с вершинами внутри прямоугольника M_{lz} возможны лишь стационарные движения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00327).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Матросов В.М.* О теории дифференциальных уравнений и неравенств с разрывными правыми частями // Годишн. Висш. учебн. завед. Прилож. мат. 1982. Т. 17. № 4. С. 6–35.
2. *Матросов В.М., Финогенко И.А.* О разрешимости уравнений движения механических систем с трением скольжения // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 3–13.

3. *Матросов В.М., Финогенко И.А.* О правосторонних решениях дифференциальных уравнений динамики механических систем с трением скольжения // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 877–886.
4. *Матросов В.М., Финогенко И.А.* О притяжении для автономных механических систем с трением скольжения // ПММ. Т. 62. Вып. 1. С. 100–109.
5. *Матросов В.М., Финогенко И.А.* К теории дифференциальных уравнений, возникающих в динамике систем с трением. I // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 5. С. 606–614.
6. *Матросов В.М., Финогенко И.А.* К теории дифференциальных уравнений, возникающих в динамике систем с трением. II // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 6. С. 769–773.
7. *Матросов В.М., Финогенко И.А.* О свойствах правосторонних решений уравнений динамики механических систем с трением скольжения // Докл. РАН. 1995. Т. 343. № 1. С. 53–56.
8. *Руш Р., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.

Москва-Иркутск

Поступила в редакцию
23.VI.1997