ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 62. Вып. 6, 1998

УДК 531.36; 62–50

© 1998 г. И.В. Бурков

СТАБИЛИЗАЦИЯ НАТУРАЛЬНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ БЕЗ ИЗМЕРЕНИЯ ЕЕ СКОРОСТЕЙ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К УПРАВЛЕНИЮ ТВЕРДЫМ ТЕЛОМ

Предлагается способ асимптотической стабилизации натуральной механической системы, не требующий измерения скоростей системы, но при этом в процессе управления необходимо решать линейные дифференциальные уравнения.

Для решения задачи асимптотической стабилизации механической системы внешними управляющими силами были предложены различные методы: большинство из них требуют измерения скоростей. Ниже предлагаются законы управления, требующие измерения не скоростей, а только координат; при этом используются наблюдатели (фильтры). Заметим, что датчики координат меньше шумят, чем датчики скоростей; кроме того, установка наблюдателей может быть дешевле, чем установка датчиков скоростей. Основное достоинство предлагаемых схем стабилизации – простота в практическом воплощении по сравнению с ранее предложенными методами стабилизации программного движения роботов-манипуляторов и управляемых спутников.

Результаты настоящей статьи частично изложены в диссертации автора[1].

1. Уравнения динамики. Динамика натуральной механической системы описывается уравнением Лагранжа второго рода

$$(\partial K(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})/\partial\ddot{\mathbf{q}})-\partial K(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})/\partial\mathbf{q}+\mathbf{g}(\mathbf{q})=\mathbf{M} \tag{1.1}$$

которое равносильно уравнению

$$A(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{b}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})+\mathbf{g}(\mathbf{q})=\mathbf{M} \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{q}\in R^n$ – вектор обобщенных координат, $A(\mathbf{q})$ – положительно определенная симметричная матрица инерции, $K=\dot{\mathbf{q}}^*A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}/2$ – кинетическая энергия, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ – вектор потенциальных сил, $\mathbf{b}(\mathbf{q},\ \dot{\mathbf{q}})$ – вектор квадратичных членов по $\dot{\mathbf{q}}$, $\mathbf{M}$ – вектор обобщенных управляющих сил.

Пусть $\mathbf{q}_p(t)\in C^2[0,\infty)$ – вектор программного движения и функции $\dot{\mathbf{q}}_p(t)$, $\ddot{\mathbf{q}}_p(t)$ ограничены на полуоси. Предположим, что матрицы $A(\mathbf{q})$, $A^{-1}(\mathbf{q})$, векторы $\mathbf{b}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ и их первые и вторые частные производные по $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ равномерно ограничены в некоторой окрестности программного движения. Предположим также, что $|\dot{\mathbf{q}}^*A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}|>c_1|\dot{\mathbf{q}}|^2$, $|\dot{\mathbf{q}}^*A^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}|>c_{-1}|\dot{\mathbf{q}}|^2$, $\forall\,\mathbf{q}\in R^n$, $c_1, c_{-1}=\mathrm{const}>0$. Звездочка означает транспонирование, $|\cdot|$ – евклидова норма вектора.

Программная обобщенная сила определяется формулой

$$\mathbf{M}_p(t)=A(\mathbf{q}_p)\ddot{\mathbf{q}}_p+\mathbf{b}(\mathbf{q}_p,\dot{\mathbf{q}}_p)+\mathbf{g}(\mathbf{q}_p) \tag{1.3}$$

[1] *Бурков И.В.* Алгоритмы стабилизации программных движений управляемых механических систем с приложениями к робототехнике. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. СПб: СПбГУ, 1993. 95 с.

Вектор-функция времени $\mathbf{M}_p(t)$ служит решением обратной задачи динамики для соответствующих уравнений. Эту функцию можно вычислить заранее и запомнить, например, в виде сплайна.

Введем переменные отклонений $\mathbf{x} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_p$, $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_p$.

2. Асимптотическая стабилизация программной позиции. Пусть желаемое движение есть постоянный вектор $\mathbf{q}_p(t) = \text{const}$. Рассмотрим регулятор

$$\mathbf{M} = -K_1(\mathbf{q} - \mathbf{q}_p) - K_2(\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \tag{2.1}$$

и вспомогательное дифференциальное уравнение

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}} = K_3(\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}) \tag{2.2}$$

равносильное уравнению

$$\dot{\mathbf{w}} = -K_3\mathbf{w} + \dot{\mathbf{q}} \quad (\mathbf{w} = \mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}) \tag{2.3}$$

где K_1 – симметричная положительно определенная матрица, K_2, K_3 – диагональные матрицы с положительными элементами на диагонали.

Теорема 2.1. Замкнутая система (1.1), (2.1), (2.2) $(\mathbf{q} - \mathbf{q}_p, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}})$ асимптотически устойчива в целом.

Доказательство. Без ущерба для общности доказательства можно считать, что $\mathbf{q}_p = 0$ (если это не так, следует ввести замену переменных $\mathbf{x} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_p$). Введя обобщенный импульс $\mathbf{p} = A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$, уравнения динамики можно записать в форме Гамильтона

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} - K_1\mathbf{q} - K_2\mathbf{w}$$

$H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ – кинетическая энергия системы в переменных $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$.

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \mathbf{q}^* K_1 \mathbf{q}/2 + \mathbf{w}^* K_2 \mathbf{w}/2$$

Ее производная в силу системы (1.1), (2.1), (2.2)

$$\dot{V} = \frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^* K_1 \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{p}}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{w}^* K_2 \dot{\mathbf{w}} =$$

$$= \frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{q}^* K_1 \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{p}}\left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} - K_1\mathbf{q} - K_2\mathbf{w}\right) + \mathbf{w}^* K_2(-K_3\mathbf{w} + \dot{\mathbf{q}}) =$$

$$= -\dot{\mathbf{q}}^* K_2 \mathbf{w} - \mathbf{w}^* K_2 K_3 \mathbf{w} + \mathbf{w}^* K_2 \dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{w}^* K_2 K_3 \mathbf{w}.$$

Исследуем множество $S = \{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w} : \dot{V} = 0\}$. Используя условие $\mathbf{w} = 0$ и уравнение (2.3), получим, что $\dot{\mathbf{q}} = 0$. Из второго уравнения в гамильтоновой системе или уравнений динамики и регулятора (1.1), (2.1) при условиях $\mathbf{w} = 0$ и $\dot{\mathbf{q}} = 0$ следует, что $\mathbf{q} = 0$. Таким образом, множество S состоит из единственной точки (0, 0, 0), которая по теореме Барбашина – Красовского будет асимптотически устойчивой в целом.

На практике может быть затруднительно вычислять $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ в режиме реального времени. Для преодоления этого затруднения можно использовать регулятор

$$\mathbf{M} = -K_1(\mathbf{q} - \mathbf{q}_p) - K_2(\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}_p) \tag{2.4}$$

Теорема 2.2. Замкнутая система (1.1), (2.2), (2.4) $(\mathbf{q} - \mathbf{q}_p, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}})$ – асимптотически устойчива при условиях, что матрица $K_1 + g_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_p)$ – положительно-определенная, а матрицы K_2, K_3 – диагональные с положительными элементами на диагонали.

Доказательство. Замкнутая система описывается уравнением

$$A(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{b}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})=-K_1(\mathbf{q}-\mathbf{q}_p)-K_2(\mathbf{q}-\hat{\mathbf{q}})-(\mathbf{g}(\mathbf{q})-\mathbf{g}(\mathbf{q}_p))$$

и уравнением (2.2). Линейное приближение замкнутой системы описывается следующими уравнениями в переменных $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{w}$:

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{y},\quad \ddot{\mathbf{x}}=A^{-1}(\mathbf{q}_p)[-(K_1+g_q(\mathbf{q}_p))\mathbf{x}-K_2\mathbf{w}],\quad \dot{\mathbf{w}}=-K_3\mathbf{w}+\dot{\mathbf{q}}$$

Индекс q означает частное дифференцирование.

По теореме 2.1 эта система асимптотически устойчива. Следовательно, ее собственные числа лежат в открытой левой полуплоскости, и тем самым система (1.1), (2.2), (2.4) асимптотически устойчива.

3. Стабилизация программного пути. Рассмотрим регулятор

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}_p(t)-\gamma(K_0\mathbf{x}+\varkappa K_1\mathbf{w})\quad (\mathbf{w}=\upsilon K_4\mathbf{q}-\hat{\mathbf{q}}) \tag{3.1}$$

где вектор $\hat{\mathbf{q}}$ – оценка вектора $\upsilon K_4\mathbf{q}$. В процессе управления должно решаться линейное уравнение

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}=\upsilon K_3(\upsilon K_4\mathbf{q}-\hat{\mathbf{q}})+\upsilon K_4\dot{\mathbf{q}}_p \tag{3.2}$$

Здесь K_i – диагональные матрицы с положительными элементами на диагонали, $\upsilon, \varkappa, \gamma>0$.

Прибавив к обеим частям уравнения (3.2) вектор – $\upsilon K_4\dot{\mathbf{q}}$, получим

$$\dot{\mathbf{w}}=-\upsilon K_3\mathbf{w}+\upsilon K_4\mathbf{y} \tag{3.3}$$

Теорема 3.1. Замкнутая система (1.1), (3.1), (3.2) равномерно (по времени) асимптотически устойчива по отношению к переменным $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{w}$ при всех достаточно больших $\gamma, \varkappa, \upsilon>0$.

Доказательство. Система (1.1), (3.1), (3.2) может быть записана в виде

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{y},\quad \dot{\mathbf{y}}=-\ddot{\mathbf{q}}_p+A^{-1}(\mathbf{x}+\mathbf{q}_p)[-\gamma K_0\mathbf{x}-\gamma\varkappa K_1\mathbf{w}+\mathbf{M}_p-\mathbf{B}(\mathbf{x}+\mathbf{q}_p,\mathbf{y}+\dot{\mathbf{q}}_p)]\\ \dot{\mathbf{w}}=-\upsilon K_3\mathbf{w}+\upsilon K_4\mathbf{y}\quad (\mathbf{B}(\mathbf{x}+\mathbf{q}_p,\mathbf{y}+\dot{\mathbf{q}}_p)=\mathbf{b}(\mathbf{x}+\mathbf{q}_p,\mathbf{y}+\dot{\mathbf{q}}_p)+\mathbf{g}(\mathbf{x}+\mathbf{q}_p))\end{gathered} \tag{3.4}$$

Разложим правые части первых двух уравнений в ряд Тейлора по степеням $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. После преобразований получим

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{y},\quad \dot{\mathbf{y}}=(-A^{-1}(\mathbf{q}_p)\gamma K_0+L(t))x-A^{-1}(\mathbf{q}_p)\gamma\varkappa K_1\mathbf{w}+N(t)\mathbf{y}+\ldots\\ (L(t)=-A^{-1}(\mathbf{q}_p)\mathbf{B}_q(\mathbf{q}_p,\dot{\mathbf{q}}_p)+A_q^{-1}(\mathbf{q}_p)A(\mathbf{q}_p)\ddot{\mathbf{q}}_p,\quad N(t)=-A^{-1}(\mathbf{q}_p)B_{\dot{q}}(\mathbf{q}_p,\dot{\mathbf{q}}_p))\end{gathered} \tag{3.5}$$

Многоточие означает нелинейные члены.

Применим теорему А.И. Климушева [1]. Вырожденная система линейного приближения при $\upsilon=\infty$, т.е. при $1/\upsilon=0$, равносильна системе (3.5) при замене $K_1\mathbf{w}$ на $K_5\mathbf{y}$, где $K_5=K_1K_3^{-1}K_4$. Укороченная система линейного приближения имеет вид $\mathbf{w}=-K_3\mathbf{w}$ и, очевидно, равномерно асимптотически устойчива.

Покажем, что упомянутая вырожденная система равномерно асимптотически устойчива. Применим еще раз теорему А.И. Климушева [1], считая малым параметром $1/\gamma$. Соответствующая вырожденная система линейного приближения при $\gamma=\infty$ имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{y},\quad 0=-A^{-1}(\mathbf{q}_p(t))K_0\mathbf{x}-A^{-1}(\mathbf{q}_p(t))\varkappa K_5\mathbf{y}$$

и равносильна асимптотически устойчивому уравнению

$$\dot{\mathbf{x}}=-\varkappa^{-1}K_5^{-1}K_0\mathbf{x}$$

Для доказательства равномерной асимптотической устойчивости укороченной системы

$$\dot{\mathbf{y}} = -\varkappa A^{-1}(\mathbf{q}_p(t))K_5\mathbf{y} \tag{3.6}$$

рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = \mathbf{y}^* A(\mathbf{q}_p(t))\mathbf{y}/2$$

Ее производная в силу укороченной системы (3.6) есть

$$\dot{V} = -\varkappa y^* K_5 \mathbf{y} + \mathbf{y}^* \dot{A}(\dot{\mathbf{q}}_p(t))\mathbf{y}/2$$

При сделанных предположениях $\dot{A}(\dot{q}_p(t))$ – ограниченная матрица-функция времени. При всех достаточно больших $\varkappa$ функция V будет отрицательно определенной, а функции V, $\dot{V}$ удовлетворяют оценкам, характерным для квадратичных форм [2], что влечет равномерную асимптотическую устойчивость укороченной системы. Доказательство окончено. При доказательстве вместо теоремы А.И. Климушева можно использовать теорему Хоппенстедта [3].

Рассмотрим теперь регулятор, не требующий вычисления $\mathbf{M}_p(t)$, и следовательно, не требующий знания точного вида уравнений динамики

$$\mathbf{M} = -\gamma(K_0\mathbf{x} + K_1\mathbf{w}) \tag{3.7}$$

Теорема 3.2. Для любой ε-трубки ($\varepsilon > 0$) программного пути ($\mathbf{q}_p(t)$), $\mathbf{q}_p(t)$) движение системы (1.1), (3.2), (3.7) будет находиться в ней при всех $t \geqslant 0$ и достаточно больших $\gamma > 0$ при условии, что начальное рассогласование $|\mathbf{x}(0)| + |\mathbf{y}(0)| + |\mathbf{w}(0)|$ достаточно мало. Если же начальное рассогласование не мало, то для любого $t_0 > 0$ существуют υ^*, $\gamma^* > 0$, такие, что при всех $\gamma > \gamma^*$, $\upsilon > \upsilon^*$ движение будет находиться в ε-трубке при $t \geqslant t_0$.

Доказательство проводится применением теории сингулярных возмущений [4, 5] начиная с малого параметра $1/\upsilon$, а затем по малому параметру $1/\gamma$.

Замечания. 1°. Результат также верен, если в левую часть уравнения (1.1) входит ограниченная помеха.

2°. Поскольку с уменьшением $1/\gamma$, $1/\upsilon$ с такой же скоростью (линейно) уменьшается разность между решениями вырожденной и исходной систем, то управление **M** будет ограниченным при росте γ, υ (при условии достаточной малости начального рассогласования).

Хотя доказательства теорем [1, 3] основаны на применении функций Ляпунова, довольно трудно извлечь из доказательств оценку величины малости параметра, т.е. величины коэффициента усиления.

При большом отклонении требуемое управление станет слишком большим и физически нереализуемым. Если в какой-то момент времени t_x отклонение стало очень большим, то можно рекомендовать построить новый программный путь $\mathbf{q}_{pn}(t)$, у которого $\mathbf{q}_{pn}(t_x) = \mathbf{q}(t_x)$, $\dot{\mathbf{q}}_{pn}(t_x) = \dot{\mathbf{q}}(t_x)$ и начиная с некоторого момента времени t_y ($t_y > t_x$) новый программный путь должен совпадать со старым.

Если известны параметры системы, то предпочтительнее применять регулятор, основанный на решении обратной задачи динамики. При применении схемы управления (3.2), (3.7) могут возникать частые переключения направления вращения двигателей в окрестности программного движения.

4. Стабилизация программной позиции плоского упругого манипулятора. Динамика плоского манипулятора с упругими шарнирами в отсутствие силы тяжести может быть описана уравнениями [6, 7]

$$(\partial K/\partial \dot{\mathbf{q}}_1) - \partial K/\partial \mathbf{q}_1 + k(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) = 0, \quad J\ddot{\mathbf{q}}_2 - k(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) = \mathbf{M} \tag{4.1}$$

где $\mathbf{q}_1 \in R^n$ – вектор угловых координат звеньев, $\mathbf{q}_2 \in R^n$ – вектор угловых координат роторов двигателей, $K = \dot{\mathbf{q}}_1^* A(\mathbf{q}_1)\dot{\mathbf{q}}_1 / 2$ – кинетическая энергия звеньев, $A(\mathbf{q}_1)$ – положительно определенная матрица инерции звеньев, J – диагональная матрица инерции роторов двигателей (с положительными элементами на диагонали), k – диагональная матрица жесткостей шарниров (с положительными элементами на диагонали), $\mathbf{M} \in R^n$ – вектор управляющих моментов приложенных к ротором.

Пусть $\mathbf{q}_{1p} = \mathbf{q}_{2p}$ = const – желаемая позиция. Равенство $\mathbf{q}_{1p} = \mathbf{q}_{2p}$ соответствует ненапряженному состоянию шарниров манипулятора.

Рассмотрим регулятор

$$\mathbf{M} = -K_0(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_{2p}) - K_2(\mathbf{q}_2 - \hat{\mathbf{q}}_2) \tag{4.2}$$

и вспомогательное уравнение

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_2 = K_3(\mathbf{q}_2 - \hat{\mathbf{q}}_2) \tag{4.3}$$

которое должно решаться в процессе управления. Последнее уравнение равносильно следующему:

$$\dot{\mathbf{w}}_2 = -K_3\mathbf{w}_2 + \dot{\mathbf{q}}_2 \quad (\mathbf{w}_2 = \mathbf{q}_2 - \hat{\mathbf{q}}_2) \tag{4.4}$$

Здесь K_i – диагональные матрицы с положительными элементами на диагонали.

Теорема 4.1. Замкнутая система (4.1), (4.2), (4.3) $(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_{1p}, \dot{\mathbf{q}}_1, \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_{2p}, \dot{\mathbf{q}}_2, \mathbf{q}_2 - \hat{\mathbf{q}}_2)$ асимптотически устойчива в целом.

Доказательство. Используя вектор импульса $\mathbf{p}_1 = A(\mathbf{q}_1)\dot{\mathbf{q}}_1$, запишем уравнения динамики следующим образом:

$$\dot{\mathbf{q}}_1 = \frac{\partial H(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)}{\partial \mathbf{p}_1}, \quad \dot{\mathbf{p}}_1 = -\frac{\partial H(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)}{\partial \mathbf{q}_1} - k(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2), \quad \ddot{\mathbf{q}}_2 = J^{-1}(\mathbf{M} + k(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)) \tag{4.5}$$

$H(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$ – кинетическая энергия звеньев в переменных $\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1$.

Рассмотрим функцию Ляпунова типа "кинетическая энергия плюс квадратичная форма"

$$V(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_2) = H(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) + [\dot{\mathbf{q}}_2^* J \dot{\mathbf{q}}_2 + (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)^* k(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) +$$
$$+ (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_{2p})^* K_0(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_{2p}) + \mathbf{w}_2^* K_2 \mathbf{w}_2]/2$$

и найдем ее производную в силу системы (4.5). Подставляя сюда $\mathbf{M}$ и $\mathbf{w}_2$ из уравнений (4.2), (4.4), получим

$$\dot{V} = -\mathbf{w}_2^* K_2 K_3 \mathbf{w}_2$$

Исследуем множество $S = \{\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1, \mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2, \hat{\mathbf{q}}_2 : \dot{V} = 0\}$. Из условия $\mathbf{w}_2 = 0$ и уравнения (4.3) следует, что $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_{2c}$ = const. Из второго уравнения (4.1) получим, что $-k(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_{2c}) = -K_0(\mathbf{q}_{2c} - \mathbf{q}_{2p})$. Отсюда следует, что $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_{1c}$ = const. Тогда из первого уравнения (4.1) вытекает, что $\mathbf{q}_{1c} = \mathbf{q}_{2c}$. Рассматривая второе уравнение (4.1) и (4.2) повторно, имеем $\mathbf{q}_{2c} = \mathbf{q}_{2p}$. А из равенства $\mathbf{q}_{1c} = \mathbf{q}_{2c}$ получим, что $\mathbf{q}_{1c} = \mathbf{q}_{2p}$. Таким образом, множество S состоит из единственной точки ($\mathbf{q}_{1p}$, 0, $\mathbf{q}_{2p}$, 0, $\mathbf{q}_{2p}$). По теореме Барбашина – Красовского это положение равновесия асимптотически устойчиво в целом.

5. Асимптотическая стабилизация вращения твердого тела с неподвижной точкой. *Уравнения динамики*. Пусть твердое тело имеет неподвижную точку O, совпадающую с его центром инерции. Связанные с телом его главные центральные оси инерции обозначим $Oxyz$. Пусть взаимно перпендикулярные орты $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)^t, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ неподвижны в инерциальной системе координат, их компоненты переменны во времени, а взаимно перпендикулярные орты $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ неподвижны относительно твердого тела, их компоненты постоянны во времени. Компоненты векторов, выписанные здесь и далее, представляют собой проекции на главные оси инерции твердого тела.

Уравнения Эйлера, описывающие динамику вращения тела, запишем в виде

$$\Theta\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}\times\Theta\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M} \quad (\boldsymbol{\omega} = (p,q,r)^t, \quad \Theta = \mathrm{diag}\{A,B,C\}) \tag{5.1}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости твердого тела, A, B, $C > 0$ – его главные центральные моменты инерции.

Кинематика тела описывается уравнениями Пуассона

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s}\times\boldsymbol{\omega} \tag{5.2}$$

$$\dot{\mathbf{s}}_i = \mathbf{s}_i\times\boldsymbol{\omega}, \quad i = 2, 3 \tag{5.3}$$

Стабилизация пары ортов, связанных с телом. Требуется указать закон управления, при котором упорядоченная пара ортов $\mathbf{s}_2$ и $\mathbf{s}_3$ стремится к упорядоченной паре ортов $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$, а угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ стремится к нулю.

Для решения этой задачи были предложены, в частности, следующие управляющие моменты [8, 9]:

$$\mathbf{M} = -\boldsymbol{\omega} + k\mathbf{r}\times\mathbf{s} + k_2\mathbf{r}_2\times\mathbf{s}_2 + k_3\mathbf{r}_3\times\mathbf{s}_3$$

где k, k_2, k_3 – попарно различные положительные числа.

Ниже предложен аналогичный управляющий момент, не требующий измерения только компонент пары векторов $\mathbf{s}_2$ и $\mathbf{s}_3$.

Рассмотрим управляющий вектор

$$\mathbf{M} = -\Gamma\boldsymbol{\omega} + k_2\mathbf{r}_2\times\mathbf{s}_2 + k_3\mathbf{r}_3\times\mathbf{s}_3 \tag{5.4}$$

$\Gamma = \mathrm{diag}\ \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$; $k_2, k_3 > 0$, $k_2 \neq k_3$

Теорема 5.1. Замкнутая система (5.1), (5.3), (5.4) обладает асимптотически устойчивым положением равновесия $\mathbf{s}_2 = \mathbf{r}_2$, $\mathbf{s}_3 = \mathbf{r}_3$, $\boldsymbol{\omega} = 0$ неустойчивыми положениями равновесия $\mathbf{s}_2 = -\mathbf{r}_2$, $\mathbf{s}_3 = -\mathbf{r}_3$, $\boldsymbol{\omega} = 0$; $\mathbf{s}_2 = -\mathbf{r}_2$, $\mathbf{s}_3 = \mathbf{r}_3$, $\boldsymbol{\omega} = 0$; $\mathbf{s}_2 = \mathbf{r}_2$, $\mathbf{s}_3 = -\mathbf{r}_3$, $\boldsymbol{\omega} = 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = \boldsymbol{\omega}\Theta\boldsymbol{\omega}/2 + k_2(\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2)^2 + k_3(\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)^2 \tag{5.5}$$

Ее производная в силу системы (5.1), (5.3), (5.4)

$$\dot{V} = -\boldsymbol{\omega}\Gamma\boldsymbol{\omega} \tag{5.6}$$

Исследуем множество $\{s_2, s_3, \boldsymbol{\omega}\colon \dot{V} = 0\}$. Учитывая уравнения динамики и закон управления, получим, что

$$0 = k_2\mathbf{r}_2\times\mathbf{s}_2 + k_3\mathbf{r}_3\times\mathbf{s}_3 \tag{5.7}$$

Лемма. Пусть $\mathbf{s}_2$ и $\mathbf{s}_3$ – два взаимно перпендикулярных орта, $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$ – также два взаимно перпендикулярных орта, k_2 и k_3 – неравные положительные числа. Тогда из соотношения (5.7) вытекает, что каждый орт $\mathbf{s}_2$ и $\mathbf{s}_3$ коллинеарен соответственно орту $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$.

Доказательство. Предположим обратное. Из соотношения (5.7) вытекает, что орты $\mathbf{s}_2$, $\mathbf{s}_3$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ компланарны. Возможны две ситуации: пара $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ одинаково ориентирована с парой $\mathbf{s}_2$, $\mathbf{s}_3$ в плоскости, либо пары противоположно ориентированы. В случае одинаковой ориентированности ненулевой угол между $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{s}_2$ равен углу между $\mathbf{r}_3$ и $\mathbf{s}_3$ и в силу положительности чисел k_2 и k_3 равенство (5.7) невозможно. Если же пары противоположно ориентированы, то угол между $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{s}_2$ является дополнительным до 180° к углу между $\mathbf{r}_3$ и $\mathbf{s}_3$, векторы $k_2\mathbf{r}_2\times\mathbf{s}_2$ и $k_3\mathbf{r}_3\times\mathbf{s}_3$ противоположно направлены и равенство (5.7) невозможно из-за неравенства чисел k_2 и k_3.

Применяя теорему Е.А. Барбашина ([10], с. 25) и лемму, получим, что положение равновесия $\mathbf{s}_2 = \mathbf{r}_2$, $\mathbf{s}_3 = \mathbf{r}_3$, $\boldsymbol{\omega} = 0$ асимптотически устойчиво.

Докажем неустойчивость положения равновесия $\mathbf{s}_2 = -\mathbf{r}_2$, $\mathbf{s}_3 = -\mathbf{r}_3$, $\boldsymbol{\omega} = 0$. Рассмотрим функцию Ляпунова, отличающуюся от (5.5) переменой знаков перед коэффициентами k_2 и k_3. Ее производная в силу системы (5.1), (5.3), (5.4) совпадает с (5.6). По теореме Н.Н. Красовского о неустойчивости [2] рассматриваемое положение равновесия неустойчиво.

Неустойчивость оставшихся положений равновесия доказывается аналогично.

Стабилизация пары ортов, связанных с телом, без измерения вектора скорости тела. Рассмотрим управляющий вектор $\mathbf{M}$, сходный с (5.4),

$$\mathbf{M} = \Sigma_2^3(\mathbf{s}_i \times \Gamma_i \mathbf{w}_i + k_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{s}_i) \tag{5.8}$$

где Γ_i – диагональные матрицы коэффициентов усиления с положительными элементами на диагонали, $k_i > 0$ – тоже коэффициенты усиления, $\mathbf{w}_i = \mathbf{s}_i - \hat{\mathbf{s}}_i$, $\hat{\mathbf{s}}_i$ – оценка $\mathbf{s}_i$ ($i = 2, 3$).

Также рассмотрим дифференциальные векторные уравнения наблюдения

$$\dot{\hat{\mathbf{s}}}_i = \Delta_i(\mathbf{s}_i - \hat{\mathbf{s}}_i), \; i = 2, 3 \tag{5.9}$$

где Δ_i – диагональные матрицы с постоянными положительными элементами на диагонали. Очевидно, что уравнения (3.2) равносильны уравнениям

$$\dot{\mathbf{w}}_i = -\Delta_i \mathbf{w}_i + \dot{\mathbf{s}}_i \tag{5.10}$$

Теорема 5.2. Замкнутая система (5.1), (5.3), (5.8), (5.9) обладает асимптотически устойчивым положением равновесия

$$\mathbf{s}_2 = \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{s}_3 = \mathbf{r}_3, \quad \boldsymbol{\omega} = 0, \quad \mathbf{w}_2 = 0, \quad \mathbf{w}_3 = 0 \tag{5.11}$$

и неустойчивыми положениями равновесия

$$\mathbf{s}_2 = -\mathbf{r}_2, \quad \mathbf{s}_3 = -\mathbf{r}_3, \quad \boldsymbol{\omega} = 0, \quad \mathbf{w}_2 = 0, \quad \mathbf{w}_3 = 0 \tag{5.12}$$

$$\mathbf{s}_2 = -\mathbf{r}_2, \quad \mathbf{s}_3 = \mathbf{r}_3, \quad \boldsymbol{\omega} = 0, \quad \mathbf{w}_2 = 0, \quad \mathbf{w}_3 = 0 \tag{5.13}$$

$$\mathbf{s}_2 = \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{s}_3 = -\mathbf{r}_3, \quad \boldsymbol{\omega} = 0, \quad \mathbf{w}_2 = 0, \quad \mathbf{w}_3 = 0 \tag{5.14}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = \boldsymbol{\omega}\Theta\boldsymbol{\omega}/2 + \Sigma_2^3[k_i(\mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i)^2 + \mathbf{w}_i \Gamma_i \mathbf{w}_i]/2 \tag{5.15}$$

Ее производная в силу системы (5.1), (5.3), (5.8), (5.9)

$$\dot{V} = -\Sigma_2^3 \mathbf{w}_i \Gamma_i \Delta_i \mathbf{w}_i \tag{5.16}$$

Проанализируем множество $\{\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3: \dot{V} = 0\}$. Из уравнения (5.2) и условия $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_3 = 0$ получим, что $\mathbf{s}_i = \mathbf{c}_i$ ($i = 2, 3$), где $\mathbf{c}_i$ – некоторые постоянные орты. Учитывая уравнения (5.3), имеем $\boldsymbol{\omega} \| \mathbf{c}_2$ и $\boldsymbol{\omega} \| \mathbf{c}_3$. Поскольку $\mathbf{c}_2$ и $\mathbf{c}_3$ ортогональны, то $\boldsymbol{\omega} = 0$. Учитывая уравнения Эйлера и закон управления (5.8), получим соотношение (5.7). Применение леммы и теоремы Е.А. Барбашина влечет факт асимптотической устойчивости положения равновесия (5.11).

Докажем неустойчивость положения равновесия (5.12). Для этого рассмотрим функцию, отличающуюся от (5.15) знаком минус перед суммой и плюс перед $\mathbf{r}_i$. Ее производная в силу системы (5.1), (5.3), (5.8), (5.9) совпадает с (5.11). Применяя теорему Н.Н. Красовского о неустойчивости, получим, что положение равновесия (5.12) неустойчиво.

Сходным образом доказывается неустойчивость оставшихся положений равновесия.

Стабилизация перманентного вращения твердого тела. Важное частное движение неуправляемого твердого тела есть перманентное вращение с желаемой скоростью $p = p_p$ вокруг центральной оси инерции. Этому движению соответствует частное решение уравнений (5.1), (5.2)

$$p = p_p, \quad q = r = 0, \quad s_x = 1, \quad s_y = s_z = 0 \tag{5.17}$$

Рассмотрим управляющие моменты вида

$$M_x = -\alpha(p - p_p), \; M_y = -\beta q - ks_z, \; M_z = -\gamma r + ks_y \quad (\alpha, \beta, \gamma, k > 0) \tag{5.18}$$

Теорема 5.3. Замкнутая система (5.1), (5.2), (5.18) имеет положение равновесия (5.17), являющееся асимптотически устойчивым при

$$\beta\gamma > p_p^2(B - C)^2 / 4 \tag{5.19}$$

и неустойчивое положение равновесия, отличающееся от (5.17) заменой $s_x = 1$ на $s_x = -1$.

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = (A(p - p_p)^2 + Bq^2 + Cr^2)/2 + k((s_x - 1)^2 + s_y^2 + s_z^2)/2$$

Вычислим ее производную в силу системы (5.1), (5.2), (5.17)

$$\dot V = -\alpha(p - p_p)^2 - \beta q^2 - \gamma r^2 - p_p(B - C)qr$$

По критерию Сильвестра эта форма будет отрицательно определена по переменным $p - p_p$, q, r при условии (5.19). Исследуем множество $\{p - p_p, q, r, s: \dot V = 0\}$. Из условия $p - p_p = 0$, $q = r = 0$ и уравнений (5.1), (5.18) получим $0 = -ks_z$, $0 = -ks_y$. Отсюда $s_y = s_z = 0$ и, следовательно, $s_x = \pm 1$ по условию нормировки вектора $\mathbf{s}$. Применяя теорему Е.А. Барбашина об асимптотической устойчивости, получим, что положение равновесия (5.17) асимптотически устойчиво.

Неустойчивость другого положения равновесия может быть проверена на основе анализа собственных чисел линейного приближения или при помощи теоремы Н.Н. Красовского о неустойчивости.

Стабилизация двумя управляющими моментами с измерением скоростей. Предположим, что тело управляется двумя моментами, действующими вдоль осей инерции, т.е. $M_x = 0$ в уравнении (1.1). Оказывается, что при этом тело асимптотически стабилизируемо к перманентному вращению с некоторой скоростью $p = c$.

Рассмотрим управляющие моменты

$$M_y = -\beta q - ks_z, \quad M_z = -\gamma r + ks_y \quad (\beta, \gamma, k > 0) \tag{5.20}$$

Теорема 5.1. Замкнутая система (5.1), (5.2), (5.20) имеет асимптотически устойчивое семейство неизолированных положений равновесия $p = c$, $q = r = 0$, $s_x = 1$, $s_y = s_z = 0$ и неустойчивое семейство неизолированных положений равновесия $p = c$, $q = r = 0$, $s_x = -1$, $s_y = s_z = 0$ (c – параметр).

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)/2 + k((s_x - 1)^2 + s_y^2 + s_z^2)/2$$

Вычислим ее производную в силу системы (5.1), (5.2), (5.20). Получим $\dot V = -\beta q^2 - \gamma r^2$.

Исследуем множество $\{s, \boldsymbol{\omega}: \dot V = 0\}$. Учитывая уравнения Эйлера и условие $q = r = 0$, имеем $A\dot p = 0$, $0 = -ks_z$, $0 = ks_y$. Следовательно, $p = c$, где c – некоторая постоянная, $s_y = s_z = 0$. Учитывая условие нормировки вектора $\mathbf{s}$, получим $s_x = \pm 1$. Затем применим теорему Ла-Салля [11].

Неустойчивость семейства положений равновесия при $s_x = -1$ может быть установлена на основании теоремы Н.Н. Красовского о неустойчивости.

6. Замечания. Доказательство асимптотической устойчивости в целом регулятора (2.1) представляет собой обобщение доказательства асимптотической устойчивости пропорционально-дифференциального регулятора $\mathbf{M} = -K_2(\mathbf{q} - \mathbf{q}_p) - K_2\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$ для натуральных механических систем [12]. Было доказано [13], что пропорционально-интегрально-дифференциальный регулятор обеспечивает асимптотическую устойчивость в большом натуральной механической системы. Доказательство же асимптотической устойчивости регулятора (4.2) представляет собой обобщение доказательства асимптотической устойчивости пропорционально-дифференциального регулятора для упругого манипулятора [14].

Было показано [15], что натуральная механическая система может быть асимптотически стабилизируема в целом при помощи ограниченных управлений (типа $M_i = \operatorname{arctg}(-k_{0i}(q_i - q_{pi}) - k_{1i}\dot{q}_i) + g_i(\mathbf{q})$).

Предлагались [16–19] нелинейные, сложные в реализации наблюдатели скоростей.

Методы стабилизации [20–24], использующие нелинейные наблюдатели скоростей и нелинейные законы управления, требуют проведения бо́льшого объема вычислений в режиме реального времени.

Достоинство же предложенного выше метода управления заключается в том, что дифференциальные уравнения наблюдения имеют порядок n, где n – число степеней свободы, а не $2n$, как в [20–24], кроме того, регулятор и наблюдатель линейны и могут быть реализованы в режиме реального времени без применения компьютеров. В том, что уравнения наблюдения имеют порядок n, есть сходство с полученными ранее результатами [25] для линейных систем с одним входом.

Методы управления [20–24] также требуют знания точного вида уравнений динамики объекта, в частности знания параметров системы. Схема управления (3.2), (3.7) не требует этого, а схема управления (2.1), (2.2) требует знания только потенциальных сил $g(q)$.

Достоинством же работ [19, 20] является то, что там даны оценки коэффициентов усиления и области устойчивости.

Предложенные законы управления твердым телом не требуют знания инерционных параметров A, B, C.

Поскольку синтез законов управления осуществлялся при помощи функций Ляпунова, то можно легко исследовать области притяжения.

Асимптотическая стабилизация твердого тела (при условии, что кинематика описывается углами Эйлера – Крылова) рассмотрена в [26].

Задача асимптотической стабилизации перманентного вращения только по скоростям рассмотрена в [27]. Отметим неточность в теореме 3.1 из [27]. На самом деле исследуемая система будет обладать свойством локальной асимптотической устойчивости, а не свойством устойчивости в целом, поскольку замкнутая система обладает вторым неустойчивым положением равновесия ($\gamma_3 = -1$ в обозначениях, принятых в [27]). Рассмотренные выше ограничения на коэффициенты усиления β, γ в теореме 4.1 совпадают с условиями из [27].

Известно [28], что перманентные вращения неуправляемого твердого тела вокруг большой и малой осей эллипсоида инерции устойчивы по скоростям, а вращения вокруг средней оси – неустойчивы.

Было показано [29], что двумя управляющими моментами можно асимптотически стабилизировать уравнения Эйлера по всем трем скоростям.

Рассматривалась ([30], с. 143) стабилизация уравнений Эйлера твердого тела одним и двумя управляющими моментами.

Предложенные в разд. 5 управляющие моменты, отличаются от рассматривавшихся ранее [31, 32] большей простотой, причем, явно выписанная формула Ляпунова позволяет исследовать область притяжения.

Был построен [33] наблюдатель скорости вращения твердого тела, использующий только измерение позиционных координат, но проблема стабилизации вращения твердого тела не была рассмотрена.

Автор благодарит С.В. Гусева и А.А. Первозванского за обсуждения результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Климушев А.И.* Устойчивость по первому приближению нелинейных систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // Труды Урал. политехн. ин-та. 1973. № 211. С. 44–54.
2. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
3. *Hoppensteadt F.* Asymptotic stability in singular perturbation problems. II // J. Different. Equat. 1974. V. 15. № 3. P. 510–521.
4. *Бутузов В.Ф.* Асимптотические формулы для решения системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производных на полубесконечном промежутке // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1963. № 4. С. 3–14.
5. *Hoppensteadt F.* Properties of solutions of ordinary differential equations with small parameters // Communs Pure and Appl. Math. 1971. V. 24. № 6. P. 807–840.
6. *Spong M.W.* Modelling and control of robots with elastic joints // Trans. ASME. J. Dyn. Syst. Meas. and Contr. 1987. V. 109. N 4. P. 310–319. = *Спонг М.В.* Моделирование и управление роботами с упругими сочленениями // Конструирование и технология машиностроения. 1988. № 3. С. 198–126.
7. *Бурков И.В., Заремба А.Т.* Динамика упругого манипулятора с электроприводом // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 57–64.
8. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 495 с.
9. *Зубов В.И.* Аналитическая динамика системы тел. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 344 с.
10. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 223 с.
11. *La Salle J.P., Lefshetz S.* Stability by Lyapunov's direct method with applications. N.Y.: Acad. Press, 1961. Рус. перев.: *Ла-Салль Ж.П., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964. 168 с.
12. *Пожарицкий Г.К.* Об асимптотической устойчивости равновесий и стационарных движений механических систем с частичной диссипацией // ПММ. 1961. Т. 25. № 4. С. 657–667.
13. *Arimoto S., Miyazaki F.* Stability and robustness of PID feedback control for robot manipulators of sensory capability // Robotics Research. 1st Intern. Sympos. Cambridge: MIT Press, 1984. P. 783–799.
14. *Arimoto S., Miyazaki F., Lee H.G., Kawamura S.* Rivival of Lyapunov's direct method in robot control and design // Proc. Amer. Contr. Conf. Atlanta, 1988. V. 3. P. 1764–1769.
15. *Дунская Н.В., Пятницкий Е.С.* Стабилизация управляемых механических и электромеханических систем // Автоматика и телемеханика. 1988. № 12. С. 40–51.
16. *Nicosia S., Tornambè A.* High-gain observers in the state and parameter estimation of robots having elastic joints // Syst. Contr. Lett. 1989. Vol. 13. № 4. P. 331–337.
17. *Nicosia S., Tomei P., Tornambe A.* An approximate observer for a class of non-linear systems // Syst. Contr. Lett. 1989. V. 12. № 1. P. 43–51.
18. *Canudas De Wit C., Slotine J.-J.* Sliding observers for robot manipulators // Automatica. 1991. V. 27. № 5. P. 859–864.
19. *Nicosia S., Tomei P.* State observers for rigid and elastic joint robots // Robotics and CIM. 1992. V. 9. № 2. P. 113–120.
20. *Nicosia S., Tomei P.* Robot control by using only joint position measurements // IEEE Trans. Aut. Contr. 1990. V. 35. № 9. P. 1058–1061.
21. *Berghuis H., Löhnberg P., Nijmeijer H.* Tracking control of robots using only position measurements // 30th Conf. on Decision and Control. 1991. V. 1. P. 1039–1040.
22. *Nicosia S., Tomei P., Tornambè A.* Non-linear control and observation algorithms for a single-link flexible robot arm // Intern. J. Control. 1989. V. 49. № 3. P. 827–840.
23. *Canudas De Wit C., Åström K.J., Fixot N.* Computed torque control via non-linear observer // Intern. J. Adapt. Contr. Sign. Process. 1990. V. 4. P. 443–452.
24. *Chorot T., de Leon Morales J.* Non-linear stabilizing control law with a dynamical high-gain observer, application to mechanical process // 30th Conf. on Decision and Control (Brighton). N.Y.: IEEE, 1991. P. 148–149.
25. *Уланов Б.В.* Управление динамическими системами с неизвестными параметрами без измерения производных // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 3–8.

26. *Бурков И.В.* Асимптотическая стабилизация заданного положения и перманентного вращения твердого тела с измерением и без измерения его скоростей // Изв. РАН. Технич. кибернет. 1993. № 4. С. 133–140.
27. *Бияров Т., Крементуло В.В., Тажеков А.* О стабилизации перманентных вращений твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 4. С. 16–21.
28. *Румянцев В.В.* Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела // ПММ. 1956. Т. 20. № 1. С. 51–66.
29. *Brockett R.W.* Asymptotic stability and feedback stabilization // Differential geometric control theory / Ed. by R.W. Brockett. Boston: Birkhauser, 1983. P. 181–191.
30. *Воротников В.И.* Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. 288 с.
31. *Crouch P.E.* Spacecraft attitude control and stabilization: Applications of geometric control theory to rigid body models // IEEE Trans. Automat. Control. 1984. V. 29. № 4. P. 321–331.
32. *Byrnes C.I., Isidori A.* On the attitude stabilization of rigid spacecraft // Automatica. 1991. V. 27. № 1. P. 87–95.
33. *Salcudean S.* A globally convergent angular velocity observer for rigid body motion // IEEE Trans. Automat. Control. 1991. V. 36. № 12. P. 1493–1497.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
16.VI.1998