УДК 531.36:534.1;62–50

© 1998 г. А.С. Ковалева

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ В ОКРЕСТНОСТИ РЕЗОНАНСА

Рассматривается слабоуправляемая система с двумя вращающимися фазами в режиме резонансных колебаний. Характерная скорость изменения медленных переменных в системе – величина порядка ε, управление содержится в членах уравнений величины порядка $\varepsilon^{3/2}$. Такая величина управления позволяет управлять резонансным режимом на временах порядка $1/\varepsilon$. Цель управления состоит в минимизации функционала, характеризующего отклонение от стационарного резонансного режима. Показано, что в уравнениях принципа максимума имеется иерархия быстрых и медленных движений. Описан алгоритм асимптотического интегрирования этих уравнений с помощью последовательного усреднения. В качестве примера рассмотрена задача вибрационного поддержания стационарного вращения неуравновешенного ротора.

Ранее при исследовании управляемых нелинейных систем [1–3] предполагалось, что система функционирует вне резонансной области или проходит через резонансы без "застревания". Обсуждалась также задача управления движением в окрестности резонанса для квазилинейной системы с медленно меняющейся частотой [4]. Для решения задач оптимального управления [1–4] использовался метод усреднения [2–3] с учетом особенностей сходимости в резонансных системах [5].

В отличие от принятого ранее подхода [1–4] в настоящей работе предполагается, что цель управления – удержать нелинейную систему в малой окрестности резонанса ("захват в резонанс" [5]). Подобные задачи представляют интерес для создания управляемых систем, работающих по резонансному принципу [6] или принципу синхронизации [7, 8].

Было доказано [5], что в околорезонансной области нельзя непосредственно применять метод усреднения, причем для решения поставленной задачи вводился метод последовательного усреднения [5]. Различные формы этого метода использовались [5, 9, 10] для задач анализа околорезонансных систем. Ниже процедура последовательного усреднения обобщается для решения задач оптимального управления в околорезонансной области.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Для упрощения изложения ограничимся рассмотрением системы со скалярной медленной переменной и скалярным управлением. Обобщение на многомерный случай не требует специальных доказательств.

Уравнения движения слабоуправляемой двухчастотной системы записываются в виде

$$
\begin{aligned}
x' &= \varepsilon f(x,\theta_1,\theta_2)+\varepsilon^{3/2}F(x,\theta_1,\theta_2,u), \quad x(0)=x^0\\
\theta_1' &= \omega_1(x)+\varepsilon k_1(x,\theta_1,\theta_2)+\varepsilon^{3/2}K_1(x,\theta_1,\theta_2,u), \quad \theta_1(0)=\theta_1^0\\
\theta_2' &= \omega_2(x)+\varepsilon k_2(x,\theta_1,\theta_2)+\varepsilon^{3/2}K_2(x,\theta_1,\theta_2,u), \quad \theta_2(0)=\theta_2^0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Здесь $x \in B \subset R_1$, $u \in U$, $Q_1, Q_2 \in T_2 : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$, U – компакт в R_1, $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Введение параметра $\varepsilon^{3/2}$ в резонансной системе поясняется ниже. При любом допустимом управлении u правые части (1.1) предполагаются 2π-периодическими по θ_i и достаточно гладкими по своим переменным в области $D = \{B \times T_2 \times U\}$, частоты $\omega_{1,2}(x) \geq c > 0$ при $x \in B$. Дополнительно предполагаем, что коэффициенты уравнений (1.1) содержат конечное число гармоник вида $\psi_m = r_m\theta_1 + s_m\theta_2$, где r_m, s_m – целые числа.

Сравним (1.1) с неуправляемой системой, отличающейся от (1.1) отсутствием слагаемых порядка $\varepsilon^{3/2}$. Предполагаем, что при $x \in B$ в неуправляемой системе существует изолированный первичный резонанс с резонансной поверхностью

$$\gamma(x) = r\omega_1(x) + s\omega_2(x) = 0 \tag{1.2}$$

где r, s – некоторые фиксированные целые числа, и существует единственное изолированное решение $\bar{x}$ уравнения (1.2), т.е.

$$\gamma(\bar{x}) = 0,\ \gamma_x(\bar{x}) = \Gamma \neq 0$$

Известно [5], что ширина области B_r "захвата в резонанс" имеет порядок $\mu = \varepsilon^{1/2}$. Поэтому предполагается, что в начальный момент времени $x^0 = \bar{x} + \mu\rho \in B_r$, и рассматривается движение в μ – окрестности поверхности (1.2). Следуя этому подходу [5], введем новые переменные φ, υ, характеризующие фазовую и частотную расстройку

$$r\theta_1 + s\theta_2 = \varphi,\ \gamma(x) = \mu\upsilon \tag{1.3}$$

Из (1.3) следует, в частности,

$$x = x_\mu = x(\mu\upsilon) = \bar{x} + \mu\Gamma^{-1}\upsilon + \mu^2 \ldots \tag{1.4}$$

Обозначив, в силу (1.3),

$$\theta_1 = \theta,\ \theta_2(\varphi, 0) = s^{-1}(\varphi - r\theta) \tag{1.5}$$

представим коэффициенты $\{f, k_1, k_2\} = l$ в виде

$$l(x, \theta_1, \theta_2) = l_0(x, \varphi) + l_1(x, \varphi, \theta) \tag{1.6}$$

где

$$l_0(x,\theta) = \langle l \rangle^\theta = \frac{1}{2\pi s}\int_0^{2\pi s} l(x,\theta,\theta_2(\varphi,\theta))d\theta,\ \langle l_1 \rangle^\theta = 0 \tag{1.7}$$

компоненты вектора l_1 не содержат резонансных гармоник. Предполагается, что средние (1.7) существуют равномерно относительно $x \in B$, $\varphi \in R_1$.

С учетом (1.4), (1.5) перепишем (1.1) в виде

$$\begin{aligned} \upsilon' &= \mu\gamma_x(x_\mu)[f(x_\mu,\theta,\theta_2(\varphi,\theta)) + \mu F(x_\mu,\theta,\theta_2(\varphi,\theta),u)] \\ \varphi' &= \mu\upsilon + \mu^2 k(x_\mu,\theta,\theta_2(\varphi,\theta)) + \mu^3 K(x_\mu,\theta,\theta_2(\varphi,\theta),u) \\ \theta' &= \omega_1(x_\mu) + \mu^2 k_1(x_\mu,\theta,\theta_2(\varphi,\theta)) + \mu^3 K_1(x_\mu,\theta,\theta_2(\varphi,\theta),u) \\ k &= rk_1 + sk_2,\ K = rK_1 + sK_2 \end{aligned} \tag{1.8}$$

с начальными условиями $\upsilon(0) = \upsilon^0$, $\varphi(0) = \varphi^0$, $\theta(0) = \theta^0$.

Удерживая в правой части (1.8) слагаемые не выше второго порядка по μ, получим

$$\begin{aligned} \upsilon' &= \mu f_0(\varphi,\theta) + \mu^2 f_1(\varphi,\theta)\upsilon + \mu^2 F_0(\varphi,\theta,u) \\ \varphi' &= \mu\upsilon + \mu^2 k_0(\varphi,\theta),\ \theta' = \omega + \mu\Omega_1\upsilon + \mu^2 Q_2(\varphi,\theta) \end{aligned} \tag{1.9}$$

где

$$\begin{aligned} f_0 &= \Gamma f(\bar{x},\theta,\theta_2(\varphi,\theta)),\ F_0 = \Gamma F(\bar{x},\theta,\theta_2(\varphi,\theta),u) \\ f_1 &= \Gamma_1\Gamma^{-1} f(\bar{x},\theta,\theta_2(\varphi,\theta)) + f_x(\bar{x},\theta,\theta_2(\varphi,\theta)), \Gamma_1 = \gamma_{xx}(\bar{x}) \\ k_0 &= k(\bar{x},\theta,\theta_2(\varphi,\theta)),\ \omega = \omega_1(\bar{x}),\ \Omega_1 = \Gamma^{-1}\omega \end{aligned} \tag{1.10}$$

Из (1.6) следует

$$f_0(\varphi,\theta)=\beta_0(\varphi)+b_1(\varphi,\theta);\ \beta_0(\varphi)=\langle f_0\rangle^\theta,\ \langle b_1\rangle^\theta=0 \tag{1.11}$$

Функция b_1 не содержит резонансных гармоник.

Для дальнейшего анализа целесообразно выделить медленную подсистему

$$v'=\mu\beta_0(\varphi),\ \varphi'=\mu v \tag{1.12}$$

Известно [5, 11], что при исследовании типичных околорезонансных движений (1.12) может рассматриваться как система уравнений движений "эквивалентного маятника" с потенциалом

$$V(\varphi)=-\int\limits_0^\varphi\beta_0(s)ds \tag{1.13}$$

допускающим устойчивое и неустойчивое положения равновесия. На фазовой плоскости системы (1.12) выделяются области колебательного и вращательного движения, разделенные сепаратрисой. Тогда (1.9) можно рассматривать как уравнения управляемого движения маятника при действии быстрых периодических возмущений.

Для дальнейшего анализа уравнения (1.9) введем новые переменные: полную энергию маятника

$$e=v^2/2+V(\varphi) \tag{1.14}$$

и вращающуюся фазу y, определяемую соотношениями [12]

$$\begin{gathered}\partial y/\partial\varphi=\Omega(e)/v(e,\varphi),\ \Omega(e)=2\pi/T(e)\\ v(e,\varphi)=\pm[2(e-V(\varphi)]^{1/2},\ T(e)=\oint\frac{d\varphi}{v(e,\varphi)}\end{gathered} \tag{1.15}$$

Интегрирование ведется по контуру e = const вдоль соответствующей фазовой траектории невозмущенной системы. При этом колебательному режиму соответствует область $0\le e<e_s$, где e_s – уровень энергии, соответствующий движению по сепаратрисе. При сделанной замене переменных $\varphi=\varphi(e,y)=\varphi(e,y+2\pi)$.

Замена (1.13) – (1.15) преобразует (1.9) к виду

$$\begin{aligned}e'&=\mu B_1(e,\varphi,\theta)+\mu^2\Phi_1(e,\varphi,\theta,u)\\ y'&=\mu\Omega(e)+\mu B_2(e,\varphi,\theta)+\mu^2\Phi_2(e,\varphi,\theta,u)\\ \theta'&=\omega+\mu Q_1(e,\varphi)+\mu^2Q_2(\varphi,\theta,u)\end{aligned} \tag{1.16}$$

где $\varphi=\varphi(e,y)$, и правые части (1.16) 2π-периодичны по y. Здесь $B_1=b_1v,B_2=$ $=(\partial y/\partial e)B_1$, т.е.

$$\langle B_1\rangle^\theta=\langle B_2\rangle^\theta=0 \tag{1.17}$$

Следовательно, средняя скорость изменения функции e имеет порядок μ^2, а не μ, и система (1.16) имеет иерархическую структуру с медленной переменой e, "полубыстрой" фазой y, вращающейся с частотой $\mu\Omega(e)$ и с "быстрой" фазой θ, вращающейся с частотой ω. При фиксированных периодических управлениях приближенное решение (1.16) может быть найдено методом последовательного усреднения по θ, y. Построим обобщение этого метода для решения задач оптимального управления.

В дальнейшем рассматриваем актуальную для приложений задачу о поддержании резонансного режима в системе (1.1). В такой постановке задача управления состоит в минимизации уклонений от стационарной точки $\bar{x}$. Пусть e_μ – функция (1.14), определенная на траекториях возмущенной системы (1.8). Рассматривая (1.14) как меру уклонения от стационарной точки, запишем функционал задачи в виде

$$J_\mu(u) = M[e_\mu(T)] + \mu^2 \int_0^T m(e_\mu, u)dt \tag{1.18}$$

где m, M – достаточно гладкие функции.

В соответствии с характером эволюции переменной e_μ рассматривается динамика системы на интервале времени порядка μ^{-2}, т.е. момент окончания процесса $T = \mu^{-2}\sigma$, где $\sigma = O(1)$ [2, 3]. Задача состоит в построении управления u_μ, минимизирующего (1.18) на траекториях системы (1.10). Решение имеет смысл, если в процессе движения управляемая система не выходит за пределы области колебательного движения, т.е. $0 \le e_\mu(t) < e_s$. Указанное неравенство не включается в ограничения задачи, но должно проверяться в процессе решения.

Уравнения принципа максимума. Заменим задачу (1.8), (1.18) более простой задачей минимизации функционала

$$J(u) = M[e(T)] + \mu^2 \int_0^T m(e, u)dt \tag{1.19}$$

на траекториях укороченной системы (1.16). Задача состоит в построении управления $u_* = \arg\min J(u) / u \in U$, минимизирующего (1.19) на траекториях системы (1.16). Связь управлений u_μ и u_* обсуждается в разд. 5.

Считаем, что задача оптимального управления (1.16), (1.19) имеет решение при $\mu \in (0, \mu_0]$, и к ней применим принцип максимума [13]. Функция Гамильтона указанной задачи имеет вид

$$H_\mu(e, y, \theta, p, q, \beta, u, \mu) = \mu H + \mu^2 h + \mu q \Omega + \beta[\omega + \mu Q_1 + \mu^2 Q] \tag{1.20}$$

(аргументы в правой части (1.20) опущены). Здесь

$$H = pB_1 + qB_2, \; h = p\Phi_1 + q\Phi_2 - m \tag{1.21}$$

и из (1.17) следует $\langle H \rangle^\theta = 0$.

Искомое управление u_* определяется из условия максимума H_μ [13]

$$u_* = \arg\max_{u \in U} H_\mu \tag{1.22}$$

как достаточно гладкая по всем аргументам и 2π-периодическая по y, θ функция. Из (1.20), (1.22) следует

$$u_* = \arg\max_{u \in U} h(e, \varphi(e, y), \theta, p, q, u) = U(e, \varphi(e, y), \theta, p, q) \tag{1.23}$$

Обозначив $h^* = h(e, \varphi, \theta, p, q, u_*)$, запишем систему уравнений принципа максимума для определения фазовых и сопряженных переменных [13]

$$\begin{aligned}
&e' = \mu H_p + \mu^2 h_p^* \\
&p' = -\mu H_e - \mu^2 h_e^* - \mu q \Omega_e - \mu\beta Q_{1e} - \mu^2 \beta Q_e \\
&q' = -\mu H_y - \mu^2 h_y^* - \mu\beta Q_{1y} - \mu^2 \beta Q_y, \; \nabla_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}\nabla_\varphi \\
&\beta' = -\mu H_\theta - \mu^2 h_\theta^* - \mu^2 \beta Q_{2\theta} \\
&y' = \mu\Omega + \mu B_2 + \mu^2 \Phi_2, \; \theta' = \omega + \mu Q_1 + \mu^2 Q_2
\end{aligned} \tag{1.24}$$

с граничными условиями

$$e(0)=e^0,\ y(0)=y^0,\ \theta(0)=\theta^0$$
$$p(T)=-M_e(e(T)),\ q(T)=0,\ \beta(T)=0 \tag{1.25}$$

Здесь и ниже нижний индекс означает частную производную по соответствующей переменной.

2. Построение решения системы с иерархией скоростей вращения фаз. Для решения системы (1.24), (1.25) обобщим процедуру иерархического усреднения в форме, использованной ранее [10] для анализа околорезонансных движений. Введем в рассмотрение вектор $z=(e,p,q,\beta)=\{z^i\}$ $(i=1,2,3,4)$ и перепишем (1.24) в виде

$$z'=\mu Z(z,y,\theta)+\mu^2 S(z,y,\theta),\quad y'=\mu\Omega(e)+\mu Y(e,y,\theta)+\mu^2 C(e,y,\theta)$$
$$\theta'=\omega+\mu\Delta(e,y)+\mu^2\delta(e,y,\theta) \tag{2.1}$$

с граничными условиями, вытекающими из (1.25):

$$F(z(0),z(T))=0 \tag{2.2}$$

Здесь Z, S – векторы соответствующих составляющих первой группы уравнений (1.24), в уравнениях для фаз обозначено $Y=B_2(e,\varphi(e,y),\theta)$, $\langle Y\rangle^\theta=0$, $\Delta=Q_1(e,\varphi(e,y))$ и т.д. Из соотношения $\langle H\rangle^\theta=0$ следует $\langle Z\rangle^\theta=0$. Дополнительно предполагаем, что правые части (2.1) удовлетворяют условиям гладкости, обеспечивающим справедливость иерархического усреднения [5, 9, 10]. Решение $z(t,\mu)$ ищется в виде разложения [10]

$$z=z_0(\tau)+\mu z_1(\tau,y,\theta)+\mu^2 z_2(\tau,y,\theta)+\mu^3\ldots$$
$$z'=\mu z_{1\theta}\omega+\mu^2(z_{0\tau}+z_{1y}(\Omega+Y)+z_{2\theta}\omega)+\mu^3\ldots,\quad \tau=\mu^2 t \tag{2.3}$$

Коэффициенты разложения должны оставаться 2π-периодическими функциями y, θ, равномерно ограниченными по всем переменным при $\tau\in[0,\sigma]$, $\sigma=\mu^2 T$. Для однозначного определения коэффициентов дополнительно потребуем выполнения условия $\langle z_i\rangle^{\theta y}=0$ для всех высших приближений, $i\ge 1$. Тогда $\langle z\rangle^{\theta y}=z_0+\mu\ldots$. В данной задаче ограничимся определением коэффициентов z_i не выше второго порядка.

Внося (2.3) в (2.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим систему уравнений для последовательного определения z_0, z_1, z_2

$$z_{1\theta}\omega=Z(z_0,y,\theta) \tag{2.4}$$

Для того чтобы коэффициент z_1 удовлетворял условиям периодичности по θ, производная $z_{1\theta}$ не должна включать постоянных по θ составляющих. Отсюда следует

$$z_1(\tau,y,\theta)=\omega^{-1}\int Z(z_0(\tau),y,\theta)d\theta+\zeta_1(z_0(\tau),y)=\tilde z_1(z_0,y,\theta)+\zeta_1(z_0,y) \tag{2.5}$$

интегрирование проводится при "замороженных" значениях z_0, y, τ. Функция $\zeta_1(z_0,y)$ может рассматриваться как постоянная интегрирования, не зависящая от θ. Условия $\langle\tilde z_1\rangle^\theta=0$, $\langle\zeta_1\rangle^y=0$ однозначно определяют функцию $\tilde z_1$ и обеспечивают выполнение условия $\langle z_1\rangle^{\theta y}=0$.

Внося (2.3) в (2.1) и приравнивая коэффициенты при μ^2, получим

$$z_{0\tau}=G(z_0,y,\theta)-\omega z_{2\theta}$$
$$G=S+Z_z z_1-z_{1y}(\Omega+Y)=\tilde G+g-\Omega\zeta_{1y} \tag{2.6}$$

где $\langle\tilde G\rangle^\theta=0$. С учетом $\langle\zeta_1\rangle^y=0$ будем иметь

$$g=\langle S\rangle^\theta+\langle Z_z\tilde z_1\rangle^\theta-\langle\tilde z_{1y}Y\rangle^\theta=g(z_0,y) \tag{2.7}$$

В свою очередь

$$g(z_0, y) = \tilde{g}(z_0, y) + \gamma(z_0), \quad \gamma = \langle g \rangle^y, \quad \langle \tilde{g} \rangle^y = 0 \tag{2.8}$$

Для того чтобы функции ζ_1, z_2 удовлетворяли условиям периодичности, по аналогии с (2.4) положим

$$\zeta_{1y} = \Omega^{-1}\tilde{g}(z_0, y), \quad z_{2\theta} = \omega^{-1}\tilde{G}(z_0, y, \theta) \tag{2.9}$$

Тогда из (2.6)–(2.9) следует

$$z_{0\tau} = \gamma(z_0) \tag{2.10}$$

Уравнение (2.10) вместе с граничными условиями $F(z_0(0), z_0(\sigma)) = 0$ определяет главный член разложения (2.3). Оценки точности решения обсуждаются в разд. 5.

3. Асимптотическое решение системы уравнений принципа максимума. Применим указанную процедуру для решения системы (1.24), (1.25). Начнем с построения разложения для составляющей $z^4 = \beta = \beta_0 + \mu\beta_1 + \mu^2\beta_2$. Из уравнения для β имеем

$$Z^4 = -H_\theta^0, \quad S^4 = -h_\theta^0 - \beta_0 Q_{2\theta}^0 \tag{3.1}$$

Верхним нулевым индексом обозначаются значения функций при $z = z_0 = (e_0, p_0, q_0, \beta_0)$, Z^i и S^i – значения составляющих векторов Z и S при $z = z_0$, нулевой индекс в этих функциях опускается.

Ищем функцию β_0 из уравнения (2.10). Построим функцию γ^4, определяющую правую часть (2.10) и заданную соотношениями (2.7), (2.8). Учитывая, что

$$\langle S^4 \rangle^\theta = -\langle h_\theta^0 \rangle^\theta - \beta_0 \langle Q_{2\theta}^0 \rangle^\theta \equiv 0$$

запишем (2.7) в виде

$$g(z_0, y) = \langle Z_z^4 \tilde{z}_1 \rangle^\theta - \langle \tilde{\beta}_{1y} Y^0 \rangle^\theta \tag{3.2}$$

В силу (1.22), (2.1) имеем

$$Z^1 = H_p^0, \quad Z^2 = -H_e^0, \quad Z^3 = -H_y^0, \quad Z^4 = -H_\theta^0, \quad Y^0 = B_2^0 = H_q^0 \tag{3.3}$$

Из (2.5), (3.3) следует

$$\tilde{e}_1 = K_p^0, \quad \tilde{p}_1 = -K_e^0, \quad \tilde{q}_1 = -K_y^0, \quad \tilde{\beta}_1 = -K_\theta^0 = -H^0 \tag{3.4}$$

где

$$K^0(z_0, y, \theta) = \int H^0(z_0, y, \theta)d\theta, \quad \langle K^0 \rangle^\theta \doteq 0 \tag{3.5}$$

Подставляя (3.3), (3.4) в (3.2)

$$g^4 = \langle -H_{\theta e}^0 K_p^0 + H_{\theta p}^0 K_e^0 + H_{\theta q}^0 K_y^0 + H_y^0 K_q^0 \rangle^\theta = \langle -I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \rangle^\theta \tag{3.6}$$

и вычисляя средние путем интегрирования по частям, получим

$$\langle I_1 \rangle^\theta = \langle I_2 \rangle^\theta = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_e^0 H_p^0 d\theta, \quad \langle -I_1 + I_2 \rangle^\theta = 0$$

(внеинтегральные слагаемые обращаются в нуль в силу периодичности H^0, K^0 по θ). Из (3.5), (3.6) имеем

$$I_3 + I_4 = \frac{\partial}{\partial\theta}(H_q^0 K_y^0)$$

Таким образом

$$g^4 = \left\langle \frac{\partial}{\partial\theta}(H_q^0 K_y^0) \right\rangle^\theta = 0 \tag{3.7}$$

Из (2.9), (3.4), (3.7) и следует $\beta_1 = \tilde{\beta}_1 = -H^0$, и

$$d\beta_0/d\tau = 0,\ \beta_0(\sigma) = 0 \tag{3.8}$$

что дает $\beta_0(\tau) \equiv 0$.

Построим разложение $z^3 = q = q_0 + \mu q_1 + \mu^2 q_2$. При $\beta_0 = 0$ получим

$$S^3 = -h_y^0 - \beta_1 \Delta_y^0, \quad g^3 = \langle S^3 \rangle^\theta + \langle Z_z^3 \tilde{z}_1 - \tilde{q}_{1y} Y^0 \rangle^\theta \tag{3.9}$$

При $\langle \beta_1 \rangle^\theta = 0$ имеем

$$\langle S^3 \rangle^\theta = -\langle h_y^0 \rangle^\theta, \quad \langle S^3 \rangle^{\theta y} = -\langle h_y^0 \rangle^{\theta y} = 0 \tag{3.10}$$

Для вычисления второго слагаемого в (3.9) запишем $g^3 = \langle S^3 + d^3 \rangle^\theta$, где в силу (3.3), (3.4), (3.9)

$$d^3 = Z_z^3 \tilde{z}_1 - \tilde{\bar{q}}_{1y} Y^0 = -H_{ye}^0 K_p^0 + H_{yp}^0 K_e^0 + H_{yq}^0 K_y^0 + H_q^0 K_{yy}^0 = -I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \tag{3.11}$$

Вычисляя среднее $\langle I_1 \rangle^\theta$ с помощью интегрирования по частям и учитывая соотношение (3.5), получим

$$\langle I_1 \rangle^\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_{ye}^0 H_p^0 d\theta$$

$$\langle -I_1 + I_2 \rangle^\theta = \langle K_{ye}^0 H_p^0 + H_{yp}^0 K_e^0 \rangle = \frac{\partial}{\partial y} \langle K_e^0 H_p^0 \rangle^\theta$$

В свою очередь

$$I_3 + I_4 = \frac{\partial}{\partial y} (K_y^0 H_q^0)$$

Из (3.11) и последующих преобразований будем иметь

$$\langle d^3 \rangle^\theta = \frac{\partial}{\partial y} \langle K_e^0 H_p^0 + K_y^0 H_q^0 \rangle^\theta, \quad \langle d^3 \rangle^{\theta y} = 0 \tag{3.12}$$

и в силу (3.9)–(3.12)

$$\gamma^3 = \langle g^3 \rangle^y = \langle d^3 \rangle^{\theta y} + \langle S^3 \rangle^{\theta y} = 0 \tag{3.13}$$

Из (2.7), (3.13) следует

$$dq_0 / d\tau = \gamma^3 = 0, \quad q_0(\sigma) = 0 \tag{3.14}$$

т.е. $q_0(\tau) = 0$. В то же время $q \neq 0$, но $\langle q \rangle^{\theta y} = 0$.

Построим уравнение (2.10) для e_0, p_0. Из (2.7), (3.3), (3.4) имеем

$$g^i = \langle S^i + d^i \rangle^\theta \tag{3.15}$$

$$S^1 = h_p^0, \quad S^2 = -h_e^0 + \Omega_e^0 K_y^0 + H^0 Q_{1e}^0$$

$$d^1 = Z_z^1 \tilde{z}_1 - Y^0 \tilde{e}_{1y} = H_{pe}^0 K_p^0 - H_{pp}^0 K_e^0 - H_{pq}^0 K_y^0 - H_q^0 K_{py}^0$$

$$d^2 = Z_z^2 \tilde{z}_1 - Y^0 \tilde{p}_{1y} = H_{ee}^0 K_p^0 - H_{ep}^0 K_e^0 - H_{eq}^0 K_y^0 - H_q^0 K_{ey}^0$$

Учитывая что $\langle H^0 \rangle^\theta = 0$, $\langle K^0 \rangle^\theta = 0$, получим

$$\langle S^1 \rangle^{\theta y} = \varkappa_p^0, \quad \langle S^2 \rangle^{\theta y} = -\varkappa_e^0, \quad \varkappa^0(e_0, p_0) = \langle h^0 \rangle^{\theta y} \tag{3.16}$$

Вычисляя $\langle d^{1,2}\rangle^{\theta y}$ с помощью тех же преобразований, что и в (3.12), получим

$$\langle d^1\rangle^{\theta y} = \chi_p^0, \quad \langle d^2\rangle^{\theta y} = -\chi_e^0, \quad \chi^0(e_0, p_0) = \langle H_e^0 K_p^0 + H_y^0 K_q^0\rangle^{\theta y} \tag{3.17}$$

Обозначим

$$\eta^0(e_0, p_0) = \varkappa^0(e_0, p_0) + \chi^0(e_0, p_0) = \langle h^0 + H_e^0 K_p^0 + H_y^0 K_q^0\rangle^{\theta y} \tag{3.18}$$

Тогда уравнение (2.10) запишется в виде

$$\begin{aligned} de_0 / d\tau &= \eta_p^0(e_0, p_0), \quad e_0(0) = e^0 \\ dp_0 / d\tau &= -\eta_e^0(e_0, p_0), \quad p_0(\sigma) = -M_e[e_0(\sigma)] \end{aligned} \tag{3.19}$$

Уточним вид функции η^0. Внося в (1.21), (3.5) в (3.16)–(3.18) и положив $q = 0$, $\beta = 0$, будем иметь

$$\eta^0(e_0, p_0) = \langle X(e_0, p_0, \varphi(e, y), \theta)\rangle^{\theta y} \tag{3.20}$$

$$X = p[\Phi_1^0 + B_{1e}^0 R_1^0 + B_{1\varphi}^0 B_2^0 \upsilon\Omega^{-1}], \quad \partial R_1^0 / \partial\theta = B_1^0, \quad \langle R_1^0\rangle^\theta = 0$$

Переходя к усреднению по φ, получим

$$\eta^0(e_0, p_0) = \frac{1}{2\pi T(e_0)} \oint \frac{1}{\upsilon(e_0, \varphi)} d\varphi \int_0^{2\pi} X(e_0, p_0, \varphi, \theta) d\theta \tag{3.21}$$

Решение системы (3.19) совместно с равенством $q_0 = 0$ определяет управление

$$u_0 = \arg\max_{u \in U} h(e_0, \varphi, \theta, p_0, 0, u) = U(e_0, \varphi, \theta, p_0, 0) = U_0(e_0, \varphi, \theta, p_0) \tag{3.22}$$

где h, U – функции, входящие в условие (1.23). Из (1.21), (1.23), (3.23) следует, что управление u_0 не зависит от быстрой фазы θ, если коэффициент Φ_1 не зависит от θ.

4. Оценка точности решения. Пусть u_μ – управление, $J_\mu(u_\mu)$ – минимальное значение функционала, определяющее решение исходной задачи (1.8), (1.18), u_0 – управление (3.20). Покажем, что

$$0 \leqslant J_\mu(u_0) - J_\mu(u_\mu) \leqslant c\mu, \quad \mu \to 0 \tag{4.1}$$

(левая часть неравенства очевидна). Здесь и ниже c – некоторые постоянные, не зависящие от μ. Если условие (4.1) выполнено, то u_0 – μ-оптимальное управление по отношению к исходной задаче.

Предположим, что

1°. Правые части (1.1) и преобразованных уравнений (1.8) достаточно гладкие и ограниченные по всем переменным в области D при любом допустимом управлении $u \in$ $\in U$.

2°. Решение задач оптимального управления (1.8), (1.18) и (1.16), (1.19) существует и единственно.

3°. Правые части системы уравнений принципа максимума (1.24) удовлетворяют условиям, обеспечивающим справедливость преобразований метода иерархического усреднения для задачи Коши с точностью до второго приближения [5, 9, 10].

4°. Усредненная краевая задача (3.19) имеет единственное решение.

Из условия 1° следует [3, 6] асимптотическая (при $\mu \to 0$) сходимость $e_\mu(t, \mu)$ к $e(t, \mu)$ на интервале времени $t \sim \mu^{-2}$ с точностью $O(\mu)$ при любом допустимом управлении $u \in U$. Отсюда вытекает близость функционалов $J_\mu(u)$ и $J(u)$ при любом допустимом управлении, в частности

$$|J_\mu(u_*) - J(u_*)| \leqslant c_1\mu, \quad |J_\mu(u_0) - J(u_0)| \leqslant c_2\mu, \quad \mu \to 0 \tag{4.2}$$

Из (4.2) и из условия 2° следует [6] квазиоптимальность управления u по отношению к исходной системе, т.е.

$$0 \leqslant J_\mu(u_*) - J_\mu(u_\mu) \leqslant c_3\mu, \quad \mu \to 0 \tag{4.3}$$

Из условий 3°, 4° следует [3, 6] не только близость решений e и e_0, но и квазиоптимальность управления u_0 по отношению к укороченной системе (1.18)

$$0 \leqslant J(u_0) - J(u_*) \leqslant c_4\mu, \quad \mu \to 0 \tag{4.4}$$

Используя (4.2)–(4.4), запишем

$$0 \leqslant J_\mu(u_0) - J_\mu(u_\mu) = [J_\mu(u_0) - J(u_0)] + [J(u_0) - J(u_*)] +$$

$$+ [J(u_*) - J_\mu(u_*)] + [J_\mu(u_*) - J_\mu(u_\mu)] \leqslant (c_1 + c_2 + c_3 + c_4)\mu \leqslant c\mu \tag{4.5}$$

что совпадает с (4.1).

Замечания. 1°. В работе рассмотрена только задача управления с фиксированным моментом окончания процесса. С помощью аналогичных рассуждений можно построить приближенное решение задачи оптимального быстродействия. Пусть цель управления – перевод системы из начального положения $e_\mu(0) = e^0$ в положение равновесия $e_\mu(T) = 0$ за минимальное время $T = \mu^{-2}\sigma$ при условии минимизации функционала (1.18) ($G = 0$) и ограничениях на управление $u \in U$. В этом случае квазиоптимальное управление u_0 определяется выражением (3.20), где $e_0(\tau)$, $p_0(\tau)$ – решение системы (3.19) с граничными условиями $e_0(0) = e^0$, $e_0(\sigma) = 0$. Дополнительно должно удовлетворяться требование $\eta^0 = 1$, $\tau = \sigma$ (ср. с [3]).

2°. Из разд. 2, 3 следует, что задачу управления околорезонансными колебаниями можно рассматривать как частный случай более общей задачи об управлении в системах с различными скоростями вращения фаз.

5. Пример. Рассмотрим задачу вибрационного поддержания вращения неуравновешенного ротора [7]. Простейшая модель может быть представлена в виде математического маятника массы m и длины l, точка подвеса которого движется вертикально по закону $s(t) = a\cos\omega t$. Известно [7], что в такой системе может реализоваться устойчивый режим равномерного вращения с частотой ω. Пусть к системе дополнительно приложен вращающий момент $M(t)$, $|M| \leqslant M_0$, назначение которого – перевод системы из состояния вращения с начальной частотой ω^0 в синхронный режим за наименьшее время.

Считая амплитуду колебаний основания малой по сравнению с размерами маятника, введем малый параметр $\varepsilon = \mu^2 = a/2l$. Считаем также, что частота вращения $\omega \gg k$, где $k = (g/l)^{1/2}$ – собственная частота малых колебаний маятника, и $(k/\omega)^2 = \mu^3\gamma$. Предполагая, что система слабоуправляема, положим

$$\mu^3 u = M / ml^2\omega^2, \quad |u| \leqslant m_0, \quad \mu^3 m_0 = M_0 / ml^2\omega^2$$

Тогда уравнение движения записывается в виде

$$\theta_1'' + \mu^2 \sin\theta_1 (\mu\gamma + 2\cos\theta_2) = \mu^3 u \tag{5.1}$$

Здесь θ_1 – угол поворота маятника относительно нижнего положения равновесия, $\theta_2 = \omega t$ – фаза возбуждения, штрих означает производную по безразмерной переменной ωt.

Уравнение (5.1) приводится к стандартной форме (1.1)

$$\begin{gathered} x' = -\mu^2(\mu\gamma\sin\theta_1 + 2\sin\theta_1\cos\theta_2) + \mu^2 u, \quad x(0) = x^0 = \omega^0/\omega \\ \theta_1' = x, \quad \theta_2' = 1, \quad \theta_1(0) = 0, \quad \theta_2(0) = 0 \end{gathered} \tag{5.2}$$

Рассматривая движение в малой окрестности резонанса частоты $x = 1$, построим замену переменных (1.7)

$$\theta_1 - \theta_2 = \varphi, \quad x - 1 = \mu\upsilon, \quad \theta_2 = \theta \tag{5.3}$$

и перепишем (5.2) в виде (1.11)

$$\upsilon' = -\mu\sin\varphi - \mu[\sin(\varphi + 2\theta) + \mu\gamma\sin(\varphi + \theta)] + \mu^2 u, \quad \upsilon(0) = \upsilon^0$$

$$\varphi' = \mu\nu, \quad \theta' = 1 \tag{5.4}$$

$$\beta_0(\varphi) = -\sin\varphi, \quad V(\varphi) = 1 - \cos\varphi, \quad \nu^0 = \mu^{-1}(\omega/\omega_0 - 1)$$

Вводя новые переменные e, y по формулам (1.14), (1.15), получим

$$\begin{gathered} e' = -\mu[\sin(\varphi + 2\theta) + \mu\gamma\sin(\varphi + \theta)]\nu + \mu^2 u\nu \\ y' = \mu\Omega(e) + \mu B(e, y, \theta) + \mu^2\Phi_2(e, y, \theta, u) \\ \theta' = 1 \end{gathered} \tag{5.5}$$

$$\nu(e, \varphi) = \pm[2(e - 1 + \cos\varphi)]^{1/2}$$

$$B_2 = y_e\sin(\varphi + 2\theta), \quad \Phi_2 = -\gamma y_e\sin(\varphi + \theta)$$

Управление u_0 определяется условием (3.20). Из (1.21), (3.20), (5.5) имеем

$$h^0 = p_0 u\nu(e_0, \varphi), \quad u_0 = \arg\max_{|u| \leqslant m_0} up_0\nu = m_0 \operatorname{sign}(p_0\nu) \tag{5.6}$$

Рассуждая аналогично изложенному ранее [2, 3], получим $\operatorname{sign} p_0 = -1$, т.е. синтез управления имеет вид

$$u_0 = -m_0 \operatorname{sign}\nu, \quad M = -M_0 \operatorname{sign}(\theta' - 1) \tag{5.7}$$

что соответствует известным решениям задач о торможении систем типа маятника [2, 3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00197).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф.Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // ПММ. 1962. Т. 27. Вып. 3. С. 474–483.
2. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
3. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 366 с.
4. *Акуленко Л.Д.* Гашение колебаний системы, содержащей несбалансированный ротор // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 2. С. 110–118.
5. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3. М.: ВИНИТИ, 1984. 304 с.
6. *Ковалева А.С.* Управление колебательными и виброударными системами. М.: Наука, 1990. 255 с.
7. *Блехман И.И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971. 894 с.
8. *Fradkov A.L.* Swinging control of nonlinear oscillations // *Int. Joural of Control.* 1996. V. 64. № 6. P. 1189–1202.
9. *Печенев А.В.* Об осреднении систем с иерархией скоростей вращения фаз // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 24–28.
10. *Bourland F.J., Haberman R.* The modulated phase shift for strongly nonlinear, slowly varying and weakly damped oscillators // *SIAM J. Appl. Math.* 1988. V. 48. № 4. P. 737–748.
11. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
12. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 508 с.
13. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.IX.1997