УДК 531.36:977.56

© 1998 г. А.Б. Куржанский, И.Ф. Сивергина

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В задаче идентификации входа системы, описываемой "полулинейным" эволюционным уравнением параболического типа, по результатам наблюдений, подверженных неопределенным возмущениям, получены оценки входа, оптимальные в смысле так называемого H_∞-критерия. Вычислена информационная функция системы – функция цены в соответствующей задаче оптимизации. Указаны связи между информационной функцией и информационными множествами. Сформулированы принципы оптимальности, адекватные рассматриваемым постановкам, выведены соответствующие уравнения динамического программирования. Для уравнения теплопроводности предложены процедуры регуляризации задачи, основанные на эволюционных уравнениях оценок входа.

1. Постановка задачи. Пусть Ω – ограниченная область в R^n, $n \geq 1$; $\partial\Omega = \Gamma \in C^2$. Рассмотрим "полулинейное" эволюционное уравнение

$$u_t - \Delta u + f(u) = b(v(t), t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, \Theta) \tag{1.1}$$

$$u(\zeta, t) = 0, \quad \zeta \in \Gamma, \quad t \in (0, \Theta]; \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, $v(t)$ – "управление"; допустимыми являются управления $v(\cdot) \in L^2(0, \Theta; V)$ такие, что

$v(t) \in \mathbf{V}$ при почти всех $t \in [0, \Theta]$

где $\mathbf{V}$ – замкнутое ограниченное выпуклое подмножество гильбертова пространства V. Функция $b(v, t)$, $v \in V$, $t \in [0, \Theta]$ удовлетворяет условию Липшица по v и непрерывна по t, при этом $b(0, t) = 0$. Относительно функции $f(s)$, $s \in R$ предположим следующее.

Предположение 1.1. Пусть

1) $f(\cdot) \in C^1(R)$,

2) $f(0) = 0$,

3) f удовлетворяет условию роста

$$|f(s_1) - f(s_2) - f'(0)(s_1 - s_2)| \leq C(|s_1|^{q-1} + |s_2|^{q-1})|s_1 - s_2|, \quad \forall s_1, s_2 \in R$$

для некоторых $C > 0$ и таких q, что $1 < q \leq (n + 4)/n$.

Известно [1–4], что в сделанных предположениях может быть доказана локальная теорема, гарантирующая существование такого $\gamma > 0$, что если $\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|v(\cdot)\|_{L^2(0,\Theta;V)} \leq \gamma$, то решение уравнения (1.1) существует и единственно в классе $C([0,\Theta]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,\Theta; \overset{o}{H}{}^1(\Omega))$ и удовлетворяет условию Липшица по u_0, $v(\cdot)$. Элемент $u(\cdot, t) \in L^2(\Omega)$ будем называть "состоянием" системы (1.1) в момент времени t.

Предположим, что u_0 и $v(\cdot)$ заранее неизвестны, но для них существует решение $u(x, t)$ на интервале $t \in [0, T]$, $T \leq \Theta$. Пусть доступная информация о решении формируется в силу уравнения измерений

$$y(t) = g(u(\cdot,t),t + \xi(t), \quad t \in [0,T] \tag{1.2}$$

где $y(t) \in R^m$ – данные измерений в момент времени t; $\xi(t) \in R^m$ – помеха измерений, $\in \xi(\cdot), \in L^2_m(0, T)$; $g(\cdot,\cdot) \in C_m(L^2(\Omega) \times [0, T])$ – заданная m-мерная функция. Обозначим $z = \{u_0, \nu(\cdot), \xi(\cdot)\}$ и назовем элемент $z \in Z \equiv L^2(\Omega) \oplus L^2(0, T; V) \oplus L^2_m(0, T)$ "входом" системы (1.1), (1.2) ($\oplus$ означает прямую сумму гильбертовых пространств). Введем подмножество $\mathbf{Z} \subseteq Z$, состоящее из тех входов, в которых $\nu(t) \in \mathbf{V}$ при почти всех t. Примем также следующие обозначения:

$$w = \{u_0, \nu(\cdot)\}, \quad w \in W \equiv L^2(\Omega) \oplus L^2(0,T;V)$$

$$\mathbf{W} = \{w \in W | \nu(t) \in \mathbf{V} \text{ при почти всех } t \in [0, T]\}$$

Через $u(x, t; w)$ будем обозначать решение уравнения (1.1), отвечающее начальному состоянию u_0 и управлению $\nu(\cdot)$, составляющим $w = \{u_0, \nu(\cdot)\}$.

Задача состоит в том, чтобы оценить "вход" $z \in Z$ по "выходу" $y(\cdot) \in L^2_m(0, T)$. В некоторых приложениях эту обратную задачу принято называть "обращением" системы.

2. H_∞-подход и минимаксное оценивание входа. Определим на пространстве Z входов системы (1.1), (1.2) функционал

$$F(z,T) = \alpha(u_0) + \int_0^T f_0(\nu(t),\xi(t),t)dt \tag{2.1}$$

Непрерывные функционалы $\alpha(u_0)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ и $f_0(\nu, \xi, t)$, $\{\nu, \xi, t\} \in V \times R^m \times [0, T]$, таковы, что $F(\cdot, T)$ – строго выпуклый и коэрцитивный для всех $T \in (0, \Theta]$; последнее означает, что для некоторого $c_0 = c_0(T) > 0$ справедливо неравенство $F(z, T) \geq$ $\geq c_0\|z\|^2_Z$, $\forall z \in Z$.

Определение 2.1. H_∞-оценкой входа системы (1.1), (1.2) относительно критерия F по наблюдениям $y(t)$, $t \in [0, T]$ называется такой элемент $\mathbf{z}^* = \mathbf{z}^*(y) \in Z$, что величина $\varkappa^2 = \varkappa^2(y)$, обеспечивающая неравенство

$$\|z - \mathbf{z}^*\|^2 \leq \varkappa^2 F(z,T) \tag{2.2}$$

для всех $z \in \mathbf{Z}$, таких, что

$$y(t) = g(u(\cdot,t;w),t) + \xi(t), \quad t \in [0,T] \tag{2.3}$$

будет наименьшей из возможных.

Замечание. 2.1. Критерий оптимальности (2.2) связан с проблемами, исследуемыми в рамках так называемой "теории H_∞-оптимального управления" – одного из детерминистских подходов к исследованию задачи управления при наличии возмущений (см., например, [5–8]). Первые результаты в этом направлении формулировались в терминах банахова пространства Харди H_∞, что определило соответствующую терминологию.

Функционал F можно интерпретировать как "меру неопределенности" в системе (1.1), (1.2). Значение этого функционала определяет точность $e^2 = \|z - z_0^*\|^2$ оценки $\mathbf{z}^*$ входа z по наблюдениям $y(t)$, $t \in [0, T]$, с коэффициентом пропорциональности $\varkappa^2$. Очевидно, что $\varkappa^2$, вообще говоря, зависит от наблюдаемого сигнала $y(\cdot)$ и

$$\varkappa^2(y) = \inf_{z^* \in Z} \sup \frac{\|z - z^*\|^2}{F(z,T)} \tag{2.4}$$

Супремум вычисляется по всем $z \in \mathbf{Z}$, не равным нулю и удовлетворяющим уравнению (1.2). Если точная нижняя грань в (2.4) достигается, то элемент, на котором эта нижняя грань достигается, есть H_∞-оценка входа системы (1.1), (1.2).

Определение 2.2. H_∞-оценкой состояния $u(\cdot, T)$ системы (1.1) относительно критерия F по наблюдениям $y(t)$, $t \in [0, T]$, полученным в силу уравнения (1.2), называется такой элемент $\mathbf{u}^* \in L^2(\Omega)$, что величина $\varkappa_u^2 = \varkappa_u^2(y)$, обеспечивающая неравенство

$$\left\|u(\cdot,T) - \mathbf{u}^*\right\|^2_{L^2(\Omega)} \le \varkappa_u^2 F(z,T)$$

для всех $z \in \mathbf{Z}$, таких, что почти всюду выполнено соотношение (2.3), будет наименьшей из возможных.

Рассмотрим теперь задачу оценивания входа в рамках так называемого минимаксного подхода, когда неопределенные помехи подчиняются априорно известным ограничениям [8–10]. Пусть в системе (1.1) (1.2) реализовался наблюдаемый сигнал $y = y(t)$, $t \in [0, T]$ и при этом известно, что значение функционала F заведомо не превосходит величины $\mu^2 > 0$.

Определение 2.3. Информационным множеством $\mathbf{Z}[T; y] \subseteq Z$, совместимым с наблюдаемым сигналом $y(t)$, $t \in [0, T]$ называется совокупность всех тех элементов $z \in \mathbf{Z}$, для которых выполнены уравнение (1.2) и ограничение $F(z, T) \le \mu^2$.

Ясно, что неизвестный вход z заведомо принадлежит множеству $\mathbf{Z}[T; y]$ и последнее является гарантированной оценкой входа по наблюдению $y(t)$, $t \in [0, T]$ при ограничении $F \le \mu^2$. Поскольку $\mathbf{Z}[T; y]$ – ограниченное множество, можно определить минимаксную оценку входа, как, например, чебышевский центр $z^*(T)$ этого множества:

$$\sup_{z \in \mathbf{Z}[T;y]} \left\|z - z^*(T)\right\| = \min_{z_1 \in Z} \sup_{z \in \mathbf{Z}[T;y]} \left\|z - z_1\right\|$$

Точность оценки при этом будет равна чебышевскому радиусу $r^2(T) = \sup\{\|z - z^*(T)\| \cdot | z \in \mathbf{Z}[T; y]\}$ информационного множества. Заметим, что, вообще говоря, $z^*(T) \notin \mathbf{Z}[T; y]$. Определим также информационное множество $\mathbf{U}[T; y] \subseteq L^2(\Omega)$ состояний системы (1.1) в момент $t = T$, совместимых с наблюдаемым сигналом $y(t)$, $t \in [0, T]$:

$$\mathbf{U}[T; y] = \{u(\cdot) = u(\cdot, T; w) \mid \exists \xi(\cdot) \in L_m^2(0,T) : z \in \mathbf{Z}[T; y]\}$$

Минимаксная оценка $u^*(T)$ состояния $u(\cdot, T)$ и ее точность определяются аналогично тому, как это было сделано для входа.

Рассмотрим следующее предположение (о линейно-квадратичности системы).

Предположение 2.1. Пусть система (1.1), (1.2) и критерий (2.1) удовлетворяют следующим условиям:

1) $\mathbf{V} = V$,

2) $b(v, t) = B(t)v$, $B(t) \in \mathcal{L}(V, L^2(\Omega))$, $t \in [0,T]$

3) $f(u) = u$

4) $g(u,t) \equiv G(t)u$, $G(t) \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), R^m)$, $t \in [0,T]$

5) $\alpha(u_0) = \langle u_0 - \bar{u}_0, N_1(u_0 - \bar{u}_0)\rangle_{L^2(\Omega)}$

6) $f_0(v, \xi, t) = \langle v - \bar{v}(t), N_2(t)(v - \bar{v}(t))\rangle_V + (\xi - \bar{\xi}(t))' M(t)(\xi - \bar{\xi}(t))$

Здесь N_1, $N_2(t)$, $M(t)$ – самосопряженные положительные непрерывные коэрцитивные операторы соответственно в пространстве $L^2(\Omega)$, V, R^m; $N_2(t)$, $M(t)$, а также $B(t)$ и $G(t)$ непрерывны по t в операторной норме. Вход $\bar{z} = \{\bar{u}_0, \bar{v}(\cdot), \bar{\xi}(\cdot)\} \in Z$ задан.

Далее будем обозначать $Nw \equiv \{N_1 u_0, N_2(\cdot)v(\cdot)\}$, $My \equiv M(\cdot)y(\cdot)$. Через $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ обозначим скалярное произведение в гильбертовом пространстве H. Введем операторы

$$C : W \ni w \mapsto g(u(\cdot,\cdot;w),\cdot) \in L^2_m(0,T)$$

$$A : W \ni w \mapsto \{w, y - Cw\} \in W \oplus L^2_m[0,T] \equiv Z$$

Теорема 2.1. Пусть выполнено предположение 2.1. Тогда существует единственный элемент $\mathbf{z}^* = \{\mathbf{w}^*, \boldsymbol{\xi}^*\} \in Z$, являющийся H_∞-оценкой входа z относительно критерия F по наблюдениям $y(t)$, $t \in [0, T]$. При этом

$$\mathbf{w}^* = PC^* M(y - C\overline{w} - \overline{\xi}) + \overline{w}, \quad \boldsymbol{\xi}^* = y - C(\overline{w} + \mathbf{w}^*) \tag{2.5}$$

$$\varkappa^2 = \| APA^* \|, \quad P = (N + C^* MC)^{-1}$$

Доказательство. При сделанных предположениях о системе задача сводится к вычислению для заданного y наименьшего числа $\varkappa^2 = \varkappa^2(y)$, такого, что при некотором $z^* \in Z$ выполнено неравенство

$$\| Aw - z^* \|^2_W \le \varkappa^2 [\langle u_0 - \overline{u}_0, N_1(u_0 - \overline{u}_0)\rangle_{l^2(\Omega)} +$$

$$+ \int_0^T ((y(t) - (Cw)(t) - \overline{\xi}(t))' M(t)(y(t) - (Cw)(t) - \overline{\xi}(t)) +$$

$$+ \langle v(t) - \bar{v}(t), N_2(t)(v(t) - \bar{v}(t))\rangle_V) dt], \quad \forall w \in W \tag{2.6}$$

Задавшись произвольным $\mu^2 > 0$, рассмотрим множество W_{μ^2} тех элементов $w \in W$, для которых множитель при $\varkappa^2$ в правой части неравенства (2.6) не превосходит μ^2. Предположим, что μ^2 достаточно велико и $W_{\mu^2} \ne 0$. Тогда опорная функция множества $AW_{\mu^2} = \{z \in Z \mid z = Aw, w \in W_{\mu^2}\}$ есть

$$\rho(\lambda \mid AW_{\mu^2}) \equiv \sup_{w \in W_{\mu^2}} \langle A^* \lambda, w \rangle =$$

$$= \langle \lambda, A\mathbf{w}^* \rangle + (\mu^2 - \varkappa^2(y))^{1/2} \langle \lambda, \ APA^* \lambda \rangle_Z^{1/2}, \quad \lambda \in Z \tag{2.7}$$

где $\mathbf{w}^*$, P – те, что указаны в условии теоремы. Поскольку справедлива оценка

$$\sup_{w \in W_{\mu^2}} \left\| Aw - A\mathbf{w}^* \right\|^2 = \left\| APA^* \right\| (\mu^2 - \varkappa^2(y))$$

то $\varkappa^2 \le \|APA^*\|$.

Покажем, что здесь имеет место точное равенство. Пусть $\varkappa^2 = \|APA^*\| - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и соответственно, H_∞-оценка входа, отличная от той, что определена в (2.5), есть $\bar{\mathbf{z}}^*$. Выберем μ^2 так, чтобы $\mu^2 > 2\varepsilon^{-1}\varkappa^2(y) \|APA^*\|$. Из (2.7) и свойств чебышевского центра множества AW_{μ^2} следует, что для всякого δ, $0 < \delta < \max \{\tfrac{1}{2}\mu^2 \varepsilon \| APA^* \|^{-1},$ $\| APA^* \| (\mu^2 - \varkappa^2(y))\}$, найдется $w_\delta \in W_{\mu^2} \setminus W_{\mu^2 - \delta}$, для которого

$$\| Aw_\delta - \bar{\mathbf{z}}^* \|^2 \ge \| Aw_\delta - Aw^* \|^2 > (\mu^2 - \delta - \varkappa^2(y)) \| APA^* \|$$

Тогда $\| Aw_\delta - \bar{\mathbf{z}}^* \|^2 > \varkappa^2 \mu^2 \ge \varkappa^2 F(Aw_\delta, T)$, что противоречит определению $\varkappa^2$. Теорема доказана.

Следствие 2.1. **Если выполнено предположение 2.1, то существует единственный элемент $\mathbf{u}^*$, являющийся H_∞-оценкой состояния $u(\cdot, T)$ относительно критерия F по наблюдениям $y(t)$, $t \in [0, T]$. При этом $\mathbf{u}^* = u(\cdot, T; \mathbf{w}^*)$, $\varkappa_u^2 = \|CPC^*\|$.**

Следствие 2.2. Для системы (1.1), (1.2) при предположении 2.1 выполнены равенства $\mathbf{z}^* = z^*(T)$, $\mathbf{u}^* = u^*(T)$.

Замечание 2.2. Все результаты, полученные выше для систем (1.1), (1.2) при предположении 2.1, могут быть перенесены на системы, наблюдения в которых получены в силу уравнения

$$y(t) = G(t)u(\cdot, t) + R(t)v(t) + \xi(t),\ t \in (0, T)$$

где $R(t) \in \mathcal{L}(V, R^m)$ – непрерывная по t операторная функция.

3. Информационное состояние и информационное множество. Вернемся к системе (1.1), (1.2). Пусть известен наблюдаемый сигнал $y(t)$, $t \in [0, T]$. Определим функцию "цены"

$$\Phi(\hat{u},\theta) = \inf_{z\in Z}\{F(z,T) \mid u(\cdot,\theta;w) = \hat{u}$$

$$y(t) = g(u(\cdot,t;w),t) + \xi(t), t \in [0,\theta]\} \tag{3.1}$$

Областью определения функции Φ будем называть множество тех пар $(\hat{u},\theta) \in L^2(\Omega)\times[0,T]$, для которых найдется такой элемент $w \in \mathbf{W}$, что выполнено равенство $u(\cdot,\theta;w) = \hat{u}$.

Определение 3.1 [5, 8]. Функция $\Phi(\hat{u},\theta)$ (3.1) называется информационным состоянием системы (1.1), (1.2) по наблюдению $y(\cdot)$ относительно критерия F (2.1).

Предположим, что относительно входа z, при котором реализовался выход $y(t)$, $t \in [0, T]$, дополнительно известно, что

$$F(z, T) \leq \mu^2 \tag{3.2}$$

Построим информационное множество $\mathbf{U}[T; y]$.

Лемма 3.1. Справедливо равенство

$$\{\hat{u} \in L^2(\Omega) \mid \Phi(\hat{u},T) \leq \mu^2\} = \mathbf{U}[T;y]$$

Доказательство леммы следует непосредственно из определений информационного множества $\mathbf{U}[T; y]$ и функции $\Phi(\hat{u}, \theta)$.

Заметим, что в линейно-квадратичной системе множество $\mathbf{U}[T; y]$ есть эллипсоид с опорной функцией [9]:

$$\rho(l \mid \mathbf{U}[T;y]) = \left\langle l,u^*(T)\right\rangle_{L_2(\Omega)} + (\mu^2 - h^2(T))^{1/2}\langle l,P(T)l\rangle^{1/2}_{L_2(\Omega)}\ \forall l \in L_2(\Omega)$$

где

$$\dot{u}^*(T) - Du(T) = B(T)\bar{v}(T) + P(T)G^*(T)M(T)(y(T) - G(T)(u^*(T) + u(\cdot,T;\overline{w})) - \bar{\xi}(T)), u^*(0) = \bar{u}_0 \tag{3.3}$$

$$\dot{P}(T) - DP(T) - P^*(T)D^* = B(T)N_2(T)B^*(T) -$$

$$-P(T)G^*(T)M(T)G(T)P(T),\ P(0) = N_1^{-1} \tag{3.4}$$

$$\dot{h}^2(T) = (y(T) - G(T)(u^*(T) + u(\cdot,T;\overline{w})) - \bar{\xi}(T))'M(T)(y(T) -$$

$$-G(T)(u^*(T) + u(\cdot,T;\overline{w})) - \bar{\xi}(T)),\ h^2(0) = 0$$

Через D обозначен оператор $Du = \Delta u - u$ с областью определения $\{u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)\}$. Решение операторного уравнения для $P(T)$ понимается в смысле [11, 12].

Рассмотрим пару $\hat{u}$, θ из области определения функции Φ. При сделанных в разделе 1 предположениях, при условии, например, что функция $f(u) \equiv f(u(x))$ – секвенциально слабо замкнутая на $L^2(\Omega)$, нижняя грань в (3.1) достигается. Пусть $\hat{\mathbf{w}} = \{\hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{v}}(\cdot)\}$ – точка минимума. В силу принципа оптимальности Беллмана [7, 13, 14], для $\delta > 0$ имеем равенство

$$\Phi(\hat{u},\theta) = \Phi(u(\cdot,\theta-\delta;\hat{\mathbf{w}}),\theta-\delta) + \int_{\theta-\delta}^{\theta} f_0(\hat{\mathbf{v}}(t), y(t) - g(u(\cdot,t;\hat{\mathbf{w}}),t)dt$$

Следовательно, если $y(t)$ и $\hat{v}(t)$ непрерывны слева в точке θ, то

$$\lim_{\delta\to+0} \delta^{-1}(\Phi(\hat{u},\theta) - \Phi(u(\cdot,\theta-\delta;\hat{\mathbf{w}}),\theta-\delta)) = f_0(\hat{\mathbf{v}}(\theta), y(\theta) - g(\hat{u},\theta),\theta)$$

Аналогично, для всякого δ и всякого $w \in \mathbf{W}$, удовлетворяющего равенству $u(\cdot, \theta; w) = \hat{u}$ и условию непрерывности слева функции $v(t)$ в точке θ, имеем неравенство

$$\lim_{\delta\to 0} \delta^{-1}(\Phi(\hat{u},\theta) - \Phi(u(\cdot,\theta-\delta;w),\theta-\delta)) \le f_0(v(\theta), y(\theta) - g(\hat{u},\theta),\theta)$$

Примем обозначение

$$d\Phi(\hat{u},\theta)/dt\,|_{(1.1)w} = \overline{\lim_{\delta\to 0}}\, \delta^{-1}(\Phi(\hat{u},\theta) - (\Phi(u(\cdot,\theta-\delta;w),\theta-\delta))$$

для $w \in \mathbf{W}$, таких, что $u(\cdot, \theta; w) = \hat{u}$.

Теорема 3.1. Для $\hat{u}$, θ из области определения функции Φ, для которых θ – точка непрерывности слева функций $\hat{v}(t)$, $y(t)$, выполнено уравнение

$$\min_{w}\{f_0(v(\theta), y(\theta) - g(\hat{u},\theta),\theta) - d\Phi(\hat{u},\theta)/dt\,|_{(1.1)w}\} =$$
$$= f_0(\hat{\mathbf{v}}(\theta), y(\theta) - g(\hat{u},\theta),\theta) - d\Phi(\hat{u},\theta)/dt\,|_{(1.1)\hat{\mathbf{w}}} = 0 \qquad (3.5)$$

Нижняя грань вычисляется по $w \in \mathbf{W}$, для которых $u(\cdot, \theta; w) = \hat{u}$ и функция $v(t)$ непрерывна слева в точке θ. Далее $\Phi(\hat{u}, 0) = \alpha(\hat{u})$, $\forall \hat{u} \in L^2(\Omega)$.

Уравнение (3.5) есть записанное в неявном виде прямое уравнение типа Гамильтона–Якоби–Беллмана [5, 7, 13].

Предположим, что имеет решение задача H_∞-оценивания входа в системе (1.1), (1.2) по измерениям $y(t)$, $t \in [0, T]$ относительно критерия F (2.1) и вычислена величина $\varkappa^2 = \varkappa^2(y)$. Рассмотрим функционал

$$L(z^*, z, \theta) = \| u_0 - u_0^* \|^2_{L^2(\Omega)} + \| v(\cdot) - v^*(\cdot) \|^2_{L^2(0,\theta;V)} +$$
$$+ \| \xi(\cdot) - \xi^*(\cdot) \|^2_{L^2_m(0,\theta)} - \varkappa^2(y) F(z,\theta)$$

и определим функцию "цены"

$$J(\hat{u}^*, \hat{u}, \theta) = \inf_{z^* \in Z}\, \sup_{z \in \mathbf{Z}} \{L(z^*, z, \theta) \,|\, u(\cdot,\theta;w^*) = \hat{u}^*,\ \ u(\cdot,\theta;w) = \hat{u},$$
$$y(t) = g(u(\cdot,t;w),t) + \xi(t), t \in [0,\theta]\} \qquad (3.6)$$

Будем говорить, что $\hat{u}^*, \hat{u} \in L^2(\Omega)$, $\theta \in [0,T]$ принадлежат области определения функции J, если существуют $z^* \in Z$, $z \in \mathbf{Z}$, удовлетворящие трем равенствам в правой части определения функции "цены" (3.6).

Предположим, что для всех $\hat{u}^*$, $\hat{u}$, θ из области определения функции J существует седловая точка $\hat{\mathbf{z}}^*$, $\hat{\mathbf{z}}$ функционала L:

$$\inf_{z^* \in Z} \{L(z^*, \hat{\mathbf{z}}, \theta) \mid u(\cdot, \theta; w^*) = \hat{u}^*\} = L(\hat{\mathbf{z}}^*, \hat{\mathbf{z}}, \theta) =$$

$$= \sup_{z \in \mathbf{Z}} \{L(\hat{\mathbf{z}}^*, z, \theta) \mid u(\cdot, \theta; w) = \hat{u}, \ y(t) = g(u(\cdot, t; w), t) + \xi(t), \ t \in [0, \theta]\}$$

Для $z^* \in Z$, такого, что $u(\cdot, \theta; w^*) = \hat{u}^*$, и $z \in \mathbf{Z}$, такого, что $u(\cdot, \theta; w^*) = \hat{u}^*$ и выполнено соотношение (2.3), обозначим

$$dJ(\hat{u}^*, \hat{u}, \theta)/dt\,|_{(1.1)w^*, w} = \overline{\lim_{\delta \to 0}} \delta^{-1}(J(\hat{u}, \hat{u}^*, \theta) - J(u(\cdot, \theta - \delta; w^*),$$

$$u(\cdot, \theta - \delta; w), \theta - \delta))$$

Теорема 3.2. Для всех $\hat{u}^*$, $\hat{u}$, θ из области определения функции J, если $\hat{\mathbf{z}}^*$, $\hat{\mathbf{z}}$ – седловая точка функционала L, и функции $\hat{\mathbf{v}}(t)$, $\hat{\mathbf{v}}^*(t)$, $y(t)$ непрерывны слева в точке θ, то выполнено уравнение

$$\min_{z^*} \max_{z} \{-dJ(\hat{u}^*, \hat{u}, \theta)/dt\,|_{(1.1)w^*, w} + \| v(\theta) - v^*(\theta) \|_V^2 +$$

$$+ \| \xi(\theta) - \xi^*(\theta) \|_{R^m}^2 - k^2(y) f_0(v(\theta), y(\theta) - g(\hat{u}, \theta), \theta)\} =$$

$$= -dJ(\hat{u}^*, \hat{u}, \theta))/dt\,|_{(1.1)\hat{\mathbf{w}}^*, \hat{\mathbf{w}}} + \| \hat{\mathbf{v}}(\theta) - \hat{\mathbf{v}}^*(\theta) \|_V^2 + \| \hat{\xi}(\theta) - \hat{\xi}^*(\theta) \|_{R^m}^2 -$$

$$- \varkappa^2(y) f_0(\hat{\mathbf{v}}(\theta), y(\theta) - g(\hat{u}, \theta), \theta)\} = 0$$

Экстремумы вычисляются по $z^* \in Z$ и $z \in \mathbf{Z}$, для которых $u(\cdot, \theta; w^*) = \hat{u}^*$, $u(\cdot, \theta; w) = \hat{u}$, и выполнено соотношение (2.3), а функции $v^*(t)$, $v(t)$, $\xi^*(t)$, $\xi(t)$ непрерывны слева в точке θ. Далее

$$J(\hat{u}^*, \hat{u}, 0) = \left\| \hat{u}^* - \hat{u} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \varkappa^2(y) \alpha(\hat{u}), \quad \forall \hat{u}^*, \ \hat{u} \in L^2(\Omega)$$

Доказательство. Для всякого $\delta \in (0, \theta)$ имеем равенство

$$J(\hat{u}^*, \hat{u}, 0) = \min_{z^* \in Z} \max_{z \in \mathbf{Z}} \{L(z^*, z, \theta) \mid u(\cdot, \theta - \delta; w^*) = u(\cdot, \theta - \delta; \hat{\mathbf{w}}^*)$$

$$u(\cdot, \theta - \delta; w) = u(\cdot, \theta - \delta; \hat{\mathbf{w}}), \quad v^*(t) = \hat{\mathbf{v}}^*(t), \ v(t) = \hat{\mathbf{v}}(t)$$

$$\xi^*(t) = \hat{\xi}^*(t), \ \xi(t) = \hat{\xi}(t), \ t \in (\theta - \delta, \theta]$$

$$y(t) = g(u(\cdot, t; w), t) + \xi(t), \ t \in [0, \theta - \delta]\} =$$

$$= J(u(\cdot, \theta - \delta; \hat{\mathbf{w}}^*), u(\cdot, \theta - \delta; \hat{\mathbf{w}}), \theta - \delta) + \left\| \hat{\mathbf{v}}(\cdot) - v^*(\cdot) \right\|_{L^2(\theta - \delta, \theta; V)}^2 +$$

$$+ \left\| \hat{\xi}(\cdot) - \xi^*(\cdot) \right\|_{L_m^2(\theta - \delta, \theta)}^2 - k^2 \int_{\theta - \delta}^{\theta} f_0(\hat{\mathbf{v}}(t), y(t) - g(u(\cdot, t; \hat{\mathbf{w}}), t), t) dt$$

откуда следует (при соответствующих предположениях о непрерывности), что

$$\lim_{\delta \to +0} \delta^{-1}(J(\hat{u}, \hat{u}^*, \theta) - J(u(\cdot, \theta - \delta; \hat{\mathbf{w}}^*), u(\cdot, \theta - \delta; \hat{\mathbf{w}}), \theta - \delta)) =$$

$$= \left\| \hat{\mathbf{v}}(\theta) - \hat{\mathbf{v}}^*(\theta) \right\|_V^2 + \left\| \hat{\xi}(\theta) - \hat{\xi}^*(\theta) \right\|_{R^m}^2 - k^2(y) f_0(\hat{\mathbf{v}}(\theta), y(\theta) - g(\hat{u}, \theta), \theta)$$

С другой стороны, для любых $v^*(\cdot)\in L^2(\theta-\delta,\ \theta;\ V)$, $\xi^*(\cdot)\in L^2_m(\theta-\delta,\ \theta)$, и любых $z\in \mathbf{Z}$, таких, что $u(\cdot,\ T;\ w)=\hat{u}$ и $y(t)=g(u(\cdot,\ t;\ w),\ t)+\xi(t)$, $t\in[0,\ \theta]$, имеем неравенства

$$J(\hat{u}^*,\ \hat{u},\ \theta)\leqslant J(u(\cdot,\ \theta-\delta;\ \hat{\mathbf{w}}^*),\ u(\cdot,\ \theta-\delta;\ \hat{\mathbf{w}}),\ \theta-\delta)+\int_{\theta-\delta}^{\theta}(\|\hat{\mathbf{v}}(t)-$$

$$-v^*(t)\|_V^2+\|\hat{\xi}(t)-\xi^*(t)\|_{R^m}^2-k^2(y)f_0(\hat{\mathbf{v}}(t),y(t)-g(u(\cdot,\ t;\ \hat{\mathbf{w}}),\ t),\ t))dt$$

$$J(\hat{u}^*,\ \hat{u},\ \theta)\geqslant J(u(\cdot,\ \theta-\delta;\ \hat{\mathbf{w}}^*),\ u(\cdot,\ \theta-\delta;\ \hat{\mathbf{w}}),\ \theta-\delta)+\int_{\theta-\delta}^{\theta}(\|v(t)-$$

$$-\hat{\mathbf{v}}^*(t)\|_V^2+\|\xi(t)-\hat{\xi}^*(t)\|_{R^m}^2-k^2(y)f_0(v(t),\ y(t)-g(u(\cdot,\ t;\ w),\ t),\ t))dt$$

Теорема доказана.

4. Попятное уравнение типа Гамильтона–Якоби–Беллмана. В этом и последующих двух разделах будем рассматривать систему (1.1), (1.2) при предположении 2.1, при этом для простоты изложения примем, что $\bar{z}=0$. H_∞-оценка входа в этой системе существует и единственна и может быть найдена из условия

$$\mathbf{z}^*=\arg\min_{z^*\in Z}\ \max_{z=\{w,\ \xi\}\in Z}\{\|z-z^*\|^2-\varkappa^2(y)F(z,\ T)\mid$$

$$y(t)=G(t)u(\cdot,\ t;\ w)+\xi(t),\ t\in[0,\ T]\}$$

С $k^2(y)$, найденным в теореме 2.1, вычислив максимум по $z\in Z$, получаем следующее уравнение для проекции оценки входа на W:

$$\mathbf{w}^*=\arg\min_{v^*(\cdot)\in L^2(0,\ T;\ V)}\ \min_{u_0^*\in L^2(\Omega)}\Big\{\left\langle u_0^*,\ N_1u_0^*\right\rangle_{L^2(\Omega)}+\left\langle v^*(t),\ N_2(t)v^*(t)\right\rangle_V+$$

$$+(y(t)-G(t)u(\cdot,\ t;\ w^*))'M(t)(y(t)-G(t)u(\cdot,\ t;\ w^*))\Big\}$$

(Заметим, что $\mathbf{w}^*$ есть также H_∞-оценка для w по наблюдениям $y(t)$, $t\in[0,T]$ относительно критерия F; последняя определяется аналогично тому, как была определена H_∞-оценка входа). Минимум по u_0^* здесь достигается на элементе $\mathbf{u}_0^*$, являющемся решением функционального уравнения

$$N_1\mathbf{u}_0^*+\int_0^T S^*(t)G^*(t)M(t)G(t)S(t)dt\mathbf{u}_0^*=$$

$$=\int_0^T S^*(t)G^*(t)M(t)\,(y(t)-G(t)\int_0^t S(t-\tau)B(\tau)v^*(\tau)d\tau)dt \tag{4.1}$$

(это решение существует и единственно в $L^2(\Omega)$), где $S(t)$, $t\geqslant 0$ – сильно непрерывная полугруппа, генерируемая оператором D. Тогда

$$\mathbf{v}^*(\cdot)=\arg\min_{v^*(\cdot)}\Big\{\int_0^T(\left\langle v^*(t),\ N_2(t)v^*(t)\right\rangle_V+(y(t)-$$

$$-G(t)\check{u}(t))'M(t)\,(y(t)-G(t)\check{u}(t)))dt\mid v^*(\cdot)\in L^2(0,\ T;\ V)\Big\} \tag{4.2}$$

При этом $\check{u}(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, определяется из уравнений

$$\dot{\check{u}}(t)-D\check{u}(t)=B(t)v^*(t)+\check{P}(t)G^*(t)M(t)\,(y(t)-G(t)\check{u}(t)) \tag{4.3}$$

$$\check{u}(0)=0$$

$$\dot{\check{P}}(t)-D\check{P}(t)-\check{P}^*(t)D^*=-\check{P}(t)G^*(t)M(t)G(t)\check{P}(t) \qquad (4.4)$$

$$\check{P}(0)=N_1^{-1}$$

Зададимся произвольными $\theta\in[0,T]$, $\check{u}_0\in L^2(\Omega)$, $v^*(\cdot)\in L^2(\theta,\ T;\ V)$ и рассмотрим траекторию системы (4.3) на промежутке $\theta\leqslant t\leqslant T$ с начальным условием $\check{u}(\theta)=\check{u}_0$. Обозначим эту траекторию через $\check{u}(t,\theta,\ \check{u};\ v^*)$. Заметим, что функция $\check{P}(t)$ по-прежнему подчинена уравнению (4.4).

Определим функцию «цены»

$$\Psi(\check{u}_0,\ \theta)=\min\Big\{\int_\theta^T(\langle v^*(t),\ N_2(t)v^*(t)\rangle_V+(y(t)-$$

$$-G(t)\check{u}(t,\theta,\ \check{u}_0;\ v^*))'M(t)\,(y(t)-G(t)\check{u}(t,\theta,\ \check{u}_0;\ v^*)))dt\ |$$

$$v^*(\cdot)\in L^2(\theta,\ T;\ V)\Big\},\quad \theta\in[0,\ T],\quad \check{u}_0\in L^2(\Omega) \qquad (4.5)$$

Функция Ψ непрерывна на $L^2(\Omega)\times[0,T]$, при этом минимум в правой части (4.5) достигается, причем в единственной точке, при любых значениях аргументов $\check{u}_0$, θ. Примем следующее обозначение:

$$d_+\Psi(\check{u}_0,\ \theta)/dt\,|_{(4.3),\ v^*}=\lim_{\delta\to0}\delta^{-1}(\Psi(\check{u}(\theta+\delta,\ \theta,\ \check{u}_0;\ v^*),\ \theta+\delta)-\Psi(\check{u}_0,\ \theta))$$

Можно показать, что $\Psi(\check{u}_0,\ \theta)$ – решение попятного уравнения типа Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$d_+\Psi(\check{u}_0,\ \theta)/dt\,|_{(4.3),\ \mathrm{v}^*(t)}+\langle \mathrm{v}^*(t),\ N_2(t)\mathrm{v}^*(t)\rangle_V=$$

$$=\min_{v^*\in V}\Big\{d_+\Psi(\check{u}_0,\ \theta)/dt\,|_{(4.3),\ v^*(t)}+\langle v^*(t),\ N_2v^*(t)\rangle_V\Big\}=$$

$$=-(y(\theta)-G(\theta)\check{u}_0)'M(\theta)\,(y(\theta)-G(\theta)\check{u}_0) \qquad (4.6)$$

и удовлетворяет краевому условию $\Psi(\check{u}_0,\ T)=0$, $\forall\check{u}_0\in L^2(\Omega)$. Пусть $\mathrm{v}^*(t)$, $\theta\leqslant t\leqslant T$, доставляет минимум в (4.5). Эта функция есть решение следующего уравнения Фредгольма второго рода с симметричным неотрицательным ядром:

$$N_2(t)\mathrm{v}^*(t)+\int_\theta^T K(t,\ \tau)\mathrm{v}^*(\tau)d\tau=g(t),\quad \theta\leqslant t\leqslant T \qquad (4.7)$$

где

$$K(t,\ \tau)=\int_{\max\{t,\ \tau\}}^T B^*(t)C^*(s,\ t)G^*(s)M(s)G(s)C(s,\ \tau)B(\tau)ds$$

$$g(t)=\int_t^T B^*(t)C^*(t,\ \tau)G^*(\tau)M(\tau)(y(\tau)-$$

$$-G(\tau)\int_\theta^\tau C(\tau,\ s)\check{P}(s)G^*(s)M(s)y(s)ds)d\tau,\quad \theta\leqslant t,\ \ \tau\leqslant T$$

$C(s,t)$ – почти строгий эволюционный оператор, соответствующий оператору

$(D-\check{P}(t)G^*(t)M(t)G(t))$, $t \geq 0$ [11]. Это приводит к следующему представлению для функции Ψ:

$$\Psi(\check{u}_0,\ \theta)=\int_{\theta}^{T}(y(t)-G(t)u^0(t))'M(t)\,(y(t)-G(t)u^0(t))dt$$

Функция $u^0(t)$, $\theta \leq t \leq T$, удовлетворяет системе дифференциальных уравнений вида

$$\dot{u}^0(t)-Du^0(t)=P^0(t)G^*(t)M(t)\,(y(t)-G(t)u^0(t)),\quad u^0(\theta)=\check{u}_0;$$

$$\dot{P}^0(t)-DP^0(t)-P^{0*}(t)D^*=-P^{0*}(t)G^*(t)M(t)G(t)P^0(t)+$$
$$+B(t)N_2(t)B^*(t),\quad P^0(\theta)=\check{P}(\theta)$$

Обозначим

$$\partial_+\Psi(\check{u}_0,\ \theta)/\partial\theta=\lim_{\delta\to+0}\delta^{-1}(\Psi(\check{u}_0,\ \theta+\delta)-\Psi(\check{u}_0,\ \theta)) \tag{4.8}$$

$$\partial\Psi(\check{u}_0,\ \theta)/\partial\check{u}_0=\Lambda(\check{u}_0,\ \theta)\in(L^2(\Omega))^* \tag{4.9}$$

(последнее выражение – производная Фреше функции $\Psi(\check{u}_0,\ \theta)$ по переменной $\check{u}_0$). Будем отождествлять $\Lambda(\check{u}_0,\ \theta)$ с элементом из $L^2(\Omega)$.

Лемма 4.1. Для $\check{u}_0$ из области определения оператора D и $\theta \in [0, T)$ существует и непрерывна функция (4.8). Для $\check{u}_0 \in L^2(\Omega)$, $\theta \in [0, T]$ существует и непрерывна функция (4.9).

Теорема 4.1. Пусть для системы (1.1), (1.2) выполнено предположение 2.1. Тогда, если $\mathbf{w}^*=\{\mathbf{u}_0^*,\ \mathbf{v}^*(\cdot)\}$ – H_∞-оценка входа по измерениям $y(t)$, $0 \leq t \leq T$, и $\check{\mathbf{u}}(t)$ – решение уравнения (4.3) при $v^*(\cdot)=\mathbf{v}^*(\cdot)$, то при почти всех $\theta \in [0, T]$ справедливо попятное уравнение динамического программирования

$$\partial_+\Psi(\check{\mathbf{u}}(\theta),\theta)/\partial\theta+\langle\mathbf{v}^*(\theta),N_2(\theta)\mathbf{v}^*(\theta)\rangle_V+$$
$$+(y(\theta)-G(\theta)\check{\mathbf{u}}(\theta))'M(\theta)\,(y(\theta)-G(\theta)\check{\mathbf{u}}(\theta))+\langle D\check{\mathbf{u}}(\theta)+B(\theta)\mathbf{v}^*(\theta)+$$
$$+\check{P}(\theta)G^*(\theta)M(\theta)\,(y(\theta)-G\,(\theta)\check{\mathbf{u}}(\theta)),\partial\Psi(\check{\mathbf{u}}(\theta),\theta)/\partial\check{u}_0\rangle_{L^2(\Omega)}=0$$

5. Адаптивное оценивание входа. Предположим, что в системе (1.1), (1.2) вычислена оценка $\mathbf{z}^*=\{\mathbf{u}_0^*,\ \mathbf{v}^*(\cdot),\ \boldsymbol{\xi}^*(\cdot)\}$ по наблюдениям $y(t)$, $0 \leq t \leq T$. Далее, подчеркивая зависимость оценки от интервала наблюдений $[0, T]$, будем обозначать $\mathbf{z}^*(T)=$ $=\{\mathbf{u}_0^*(T),\ \mathbf{v}^*(\cdot;\ T),\ \boldsymbol{\xi}^*(\cdot;\ T)\}$. Очевидно, что, вообще говоря, $\mathbf{v}^*(t;\ T)\neq\mathbf{v}^*(t;\ T+\delta)$, $\boldsymbol{\xi}^*(t;\ T)\neq\boldsymbol{\xi}^*(t;\ T+\delta)$ для $0<t\leq T$, $\delta>0$, так же как и $\mathbf{u}_0^*(T)\neq\mathbf{u}_0^*(T+\delta)$. В силу этого для вычислений оценки $\mathbf{z}^*(T+\delta)$, основанных на полученных выше уравнениях, недостаточно знания $\mathbf{z}^*(T)$ и $y(t)$, $T\leq t\leq T+\delta$. Далее предлагаются процедуры приближенного вычисления оценки $\mathbf{z}^*(T+\delta)$, использующие лишь наблюдения $y(t)$, $T\leq t\leq T+\delta$, и оценку $\mathbf{z}^*(T)$ или приближенное ее значение. Дополнительно к предположению 2.1 примем, что $V=R^p$.

Согласно результатам раздела 4, $\mathbf{v}^*(t;T)$ – решение уравнения (4.7). Зафиксировав $t\geq 0$, продифференцируем обе части это равенства по T в интервале $T>t$. Если через $Q(t;T)\in\mathcal{L}(L^2(\Omega))$, $0\leq t\leq T$, обозначить решение операторного уравнения

$$N_2(t)Q(t;\ T)+\int_{0}^{T}\int_{\max\{t,\ \tau\}}^{T}B^*(t)C^*(s,\ t)G^*(s)M(s)G(s)C(s,\ \tau)\times$$
$$\times B(\tau)ds\,Q(\tau;\ T)d\tau=B^*(t)C^*(T,\ t)$$

(его решение существует и единственно [15]), то для $v^*(t; T)$, используя введенную выше функцию $u^*(t)$ (3.3), получим

$$\partial v^*(t;\ T)/\partial T = Q(t;\ T)G^*(T)M(T)(y(T) - G(T)u^*(T)),\quad T > t$$

$$v^*(t;\ t) = 0$$

Аналогичным образом выводим уравнение

$$\partial Q(t;\ T)/\partial T = Q(t;\ T)(D - \check{P}(T)G^*(T)M(T)G(T))^* -$$

$$-Q(t;\ T)G^*(T)M(T)G(T)(P(T) - \check{P}(T)),\quad T > t$$

$$Q(t;\ t) = N_2^{-1}(t)B^*(t)$$

На данных дифференциальных уравнениях основана следующая процедура приближенного вычисления оценки управления. Зафиксируем $\delta > 0$ и построим равномерное разбиение интервала $[0, T]$ с шагом $\delta > 0$ (для определенности будем считать $T = \delta K$): $t_0 = 0$, $t_1 = \delta$, $t_2 = t_1 + \delta$, ..., $t_K = T$. Положим $v_0^\delta = 0$ и далее последовательно вычислим v_{k+1}^δ для $0 \leqslant k \leqslant K-1$ как значения при $t = T$ функции, решающей задачу Коши

$$\dot{v}(t) = Q(t_k;\ t)G^*(t)M(t)(y(t) - G(t)u^*(t)),\quad t_k \leqslant t \leqslant T,\quad v(t_k) = 0 \qquad (5.1)$$

Построим кусочно-постоянную функцию $v^\delta(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, положив

$$v^\delta(t) = v_{k+1}^\delta,\quad t_k < t \leqslant t_{k+1} \qquad (5.2)$$

Теорема 5.1. *Функции $v^\delta(\cdot)$ сходятся к $v^*(\cdot;\ T)$ при $\delta \to 0$ в норме пространства $L_p^2(0,\ T)$.*

Замечание 5.1. Значения функции $v^\delta(t)$ на интервале $T \leqslant t \leqslant T+\delta$ могут быть найдены из решения дифференциального уравнения (5.1) на интервале $T \leqslant t \leqslant T+\delta$ с начальным условием $v(T) = 0$, либо из соответствующей конечномерной аппроксимации

$$v_{K+1}^\delta = \delta N_2^{-1}(t_K)B^*(t_K)G^*(t_K)M(t_K)\left(\delta^{-1}\int_T^{T+\delta} y(\tau)d\tau - G(t_K)u^*(t_K)\right)$$

Подчеркнем, что вычисление функции $u^*(t)$, $t \in (T, T+\delta]$ (при вычисленном по $y(t)$, $t \in [0, T]$, значении $u^*(T)$) требует лишь знания наблюдений $y(t)$, $t \in (T, T+\delta]$.

Обратимся теперь к оценке $u_0^*(T)$. Эта функция, как было показано выше, является решением функционального уравнения (4.1). Представим $u_0^*(T)$ в виде

$$u_0^*(T) = \tilde{P}(T)\int_0^T \tilde{G}^*(t)M(t)\left(y(t) - G(t)\int_0^t S(t-\tau)B(\tau)v^*(\tau;\ T)d\tau\right)dt \qquad (5.3)$$

$$\left(\tilde{G}(t) = G(t)S(t),\quad \tilde{P}(t) = \left(N_1 + \int_0^t \tilde{G}^*(\tau)M(\tau)\tilde{G}(\tau)d\tau\right)^{-1},\quad t \geqslant 0\right)$$

Зададимся произвольным $\delta > 0$ и найдем $v^\delta(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Соответственно обозначим $u_0^{*\delta}(T)$ выражение, отличающееся от (5.3) заменой $v^*(\tau; T)$ на $v^\delta(\tau)$. Дифференцированием по T в области $T > 0$ находим

$$du_0^{*\delta}(T)/dT = \tilde{P}(T)\tilde{G}^*(T)M(T)(y(T) - \tilde{G}(T)\mathbf{u}_0^{*\delta}(T) - G(T)V(T))$$

$$\mathbf{u}_0^{*\delta}(0) = 0$$

$$d\tilde{P}(T)/dT = -\tilde{P}^*(T)\tilde{G}^*(T)M(T)\tilde{G}(T)\tilde{P}(T), \quad \tilde{P}(0) = N_1^{-1}$$

$$dV(T)/dT - DV(T) = B(T)\mathbf{v}^\delta(t), \quad V(0) = 0$$

Теорема 5.2. Для всякого $T > 0$ функции $\mathbf{u}_0^{*\delta}(T)$ сходятся при $\delta \to 0$ к $\mathbf{u}_0^*(T)$ в норме пространства $L^2(\Omega)$.

Замечание 5.2. Для стационарных операторов наблюдения $G(\cdot)$, т.е. $G(t) \equiv G$, $0 \leqslant t$ [9, 10, 17], оператор $\tilde{G}(t)$ допускает эффективную вычислительную реализацию. Рассмотрим, например, пространственно усредненные наблюдения

$$Gu(\cdot,\ t) = \mathrm{col}\,[\int_\Omega g_1(x)u(x,\ t)dx,\ ...,\ \int_\Omega g_m(x)u(x,\ t)dx] \tag{5.4}$$

где $g_1 = g_1(x), ..., g_m = g_m(x)$ – заданные интегрируемые с квадратом на Ω функции. Тогда

$$\tilde{G}u(\cdot,\ t) = \mathrm{col}\,[\int_\Omega \tilde{g}_1(x,\ t)u(x,\ t)dx,\ ...,\ \int_\Omega \tilde{g}_m(x,\ t)u(x,\ t)dx]$$

где $\tilde{g}_1(t) = \tilde{g}_1(x,\ t),\ ...,\ \tilde{g}_m(t) = \tilde{g}_m(x,\ t)$ – решения задач Коши

$$\dot{\tilde{g}}_i(t) - D\tilde{g}_i(t) = 0, \quad t > 0, \quad \tilde{g}_i(0) = g_i, \quad i = 1,\ ...,\ m$$

6. Пример. Примем дополнительно к предположению 2.1 следующие условия.

Предположение 6.1. Пусть

1) начальное состояние u_0 системы (1.1) известно,

2) $V = R^m$,

3) $B(t) \equiv B$, $t \in [0, T]$, при этом

$$Bv = b_1(x)v_1 + ... + b_m(x)v_m, \quad v \in V, \quad x \in \Omega$$

$$b_i \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega), \quad i = 1,\ ...,\ m,$$

4) оператор наблюдения $G(t) \equiv G$, причем G имеет вид (5.4), а $g_k \in H^1(\Omega)$, $k = 1, ..., m$,

5) помехи наблюдения $\xi(t)$ в уравнении (1.1) являются элементами пространства $H_m^1(0,\ T)$.

При этих условиях приходим к уравнению относительно $v(\cdot)$

$$Y(t) - GDu(\cdot,\ t;\ v(\cdot)) = GBv(t) + \eta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{6.1}$$

$$(Y(t) = \dot{y}(t), \quad \eta(t) = \dot{\xi}(t))$$

Здесь D – оператор, введенный в разд. 3. Согласно замечанию 2.2 H_∞-оценка управления теперь может быть определена как функция $\mathbf{v}^*(\cdot) \in L_m^2(0,\ T)$, для которой величина $\varkappa^2$, обеспечивающая неравенство

$$\|v(\cdot) - \mathbf{v}^*(\cdot)\|^2_{L_m^2(0,\ T)} \leqslant k^2 \int_0^T (v(t)'N(t)v(t) + \eta(t)'M(t)\eta(t))dt$$

для всех $v(\cdot)$, $\eta(\cdot) \in L_m^2(0, T)$, удовлетворяющих (6.1), будет наименьшей из возможных. Эта функция, как нетрудно показать, доставляет минимум функционалу

$$J(v^*(\cdot)) = \int_0^T (v^*(t)' N(t) v^*(t) + (Y(t) - GDu(\cdot, t; v^*) -$$

$$-GBv^*(t))' M(t)(Y(t) - GDu(\cdot, t; v^*) - GBv^*(t)))dt, \quad v^*(\cdot) \in L_m^2(0, T)$$

Положим $M(t) = E, N(t) = \varepsilon E$, где $\varepsilon > 0$, E – единичная $(m \times m)$-матрица. Обозначим $\mathrm{v}^*(\cdot) = \mathrm{v}_\varepsilon^*(\cdot)$, подчеркивая зависимость оценки от выбора матриц $M(t)$ и $N(t)$.

Теорема 6.1. Если оператор GB обратим на R^m, то существует предел $\lim \mathrm{v}_\varepsilon^*(\cdot) = \hat{\mathrm{v}}^*(\cdot)$ при $\varepsilon \to +0$. При этом функция $\hat{\mathrm{v}}^*(\cdot)$ – единственное решение уравнения

$$Y(t) - GDu(\cdot, t; \hat{\mathrm{v}}^*) = GB\hat{\mathrm{v}}^*(t), \quad t > 0$$

Заметим, что именно функция $\hat{\mathrm{v}}^*(\cdot)$ рассматривалась [17, 19] в качестве оценки управления, а значения $\hat{\mathrm{v}}^*(t; T+\delta)$, $T \leqslant t \leqslant T+\delta$ определялись из уравнения $Y(t) - GDu(\cdot, t; \hat{\mathrm{v}}^*) = GB\hat{\mathrm{v}}^*(t)$, $T \leqslant t \leqslant T+\delta$, где для $u(x, t)$ начальным условием служит $u(\cdot, T) = u(\cdot, T; \hat{\mathrm{v}}^*(\cdot; T))$. Данная процедура аналогична описанной в замечании 5.1, если вместо $u^*(t_K)$ в последней подставлять $u(\cdot, T; \mathrm{v}^\delta)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-01003, 96-01-00050).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cazenave T., Haraux A.* Introduction aux problèmes d'évolution semilinéaires. Mathématiques et Applications. 1. Paris: Ellipses, 1990. 142 p.
2. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
3. *Zuazua E.* Finite dimensional null controllability for the semilinear heat equation // J. Math. Pures et Appl. 1997. V. 76. № 3. P. 237–264.
4. *Fattorini H.O.* Optimal control problem for distributed parameter systems governed by semilinear parabolic equations in L^1 and L^∞ spaces // Lect. Notes in Control and Inform. Sci. 1991. V. 149. P. 68–80.
5. *Baras J.S., Kurzhanski A.B.* Nonlinear filtering: the set-membership (bounding) and the H-infinity techniques // Proc. 3rd IFAC Symp. on nonlinear control systems design. Oxford: Pergamon Press, 1995. P. 409–418.
6. *Başar T., Bernhard P.* H^∞-Optimal Control and Related Minimax Design Problems: A Dynamic Game Approach. Berlin: Springer, 1991. 240 p.
7. *Bensoussan A., Da Prato G., Delfour M.C., Mitter S.K.* Representation and control of infinite dimensional systems. Boston: Birkhäuser. V. 1. 1992. 315 p.; V. 2. 1993. 343 p.
8. *Куржанский А.В.* Гарантированное оценивание распределенных процессов по результатам наблюдений // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 1995. № 1. С. 33–40.
9. *Kurzhanskii A.B., Khapalov A.Yu.* An observation theory for distributed-parameter systems // J. Math. Sys., Estimat. and Control. 1991. V. 1. № 4. P. 389–440.
10. *Сивергина И.Ф.* Обратимость и наблюдаемость эволюционных систем // Докл. РАН. 1996. Т. 351. № 3. С. 304–308.
11. *Curtain R.F., Pritchard A.J.* Infinite dimensional linear systems theory. Berlin: Springer, 1978. 297 p.
12. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.

13. *Fleming W.H., Soner H.M.* Controlled Markov processes and viscosity solutions. N.Y. etc.: Springer, 1993. 428 p.
14. *Lions P.-L.* Viscosity solutions of fully nonlinear second-order equations and optimal stochastic control in infinite dimensions. Pt I. Acta Math. 1988. V. 161. № 3–4. P. 243–278; Pt II. Lect. Notes in Mathematics. 1988. V. 1390. P. 147–170; Pt III. J. Funct. Anal. 1989. V. 86. № 1. P. 1–18.
15. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
16. *James M.R., Baras J.S.* Partially observed differential games, infinitedimensional Hamilton – Jacobi – Isaacs equations, and nonlinear H_∞ Control // SIAM J. Control and Optimiz. 1996. V. 34. № 4. P. 1342–1364.
17. *Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I., Samarskaia E.A.* On estimation of forcing functions in parabolic systems // Intern. Instit. Appl. Syst. Anal. Working Paper WP-95-75. 1995. Laxenburg, 34 p.
18. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problems of ordinary differential equations: dynamical solutions. Amsterdam: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
19. *Кряжимский А.В., Максимов В.И., Осипов Ю.С.* О реконструкции экстремальных возмущений в параболических уравнениях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1997. Т. 37. № 3. С. 291–301.

Москва,
Екатеринбург

Поступила в редакцию
2.XII.1997