УДК 538.4 : 534.1

© 1998 г. А.Б. Родин, И.С. Шикин

ДИССИПАТИВНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ АЛЬФВЕНОВСКОГО СОЛИТОНА

Выводится модельное уравнение для нелинейных альфвеновских волн при учете дисперсии и диссипации в рамках магнитной гидродинамики. Рассматривается задача об эволюции альфвеновского солитона.

1. В качестве исходной рассматривается система одномерных магнитогидродинамических уравнений с холловской дисперсией и диссипацией, представленной вязкостью и магнитной вязкостью. Предполагается, что все величины зависят только от переменных x и t. В безразмерном виде данная система имеет вид [1]

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left|B^2\right|+\frac{4}{3}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}\right)=B_x\frac{\partial B_y}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}\right)=B_x\frac{\partial B_z}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+u\frac{\partial s}{\partial x}\right)=\frac{4}{3}\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{4\pi R_m}\left(\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}\right)^2\right)+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(uB_y-vB_x\right)-\frac{k}{\rho}\left(-\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial B_z}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)+\frac{1}{R_m}\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(wB_x-uB_z\right)-\frac{k}{\rho}\left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial B_y}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)+\frac{1}{R_m}\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$B_x=\mathrm{const},\quad k=\frac{cm_iB_x}{4\pi e}$$

Здесь u, v, w – компоненты вектора скорости, B_x, B_y, B_z – вектора магнитной индукции, p – давление, s – энтропия, T – температура, Re – число Рейнольдса, R_m – магнитное число Рейнольдса, k – безразмерный параметр Холла.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением волн большой длины. Рассмотрение длинноволнового предела позволяет сразу ввести малый параметр δ (δ имеет один порядок малости с волновым числом). Также необходимо воспользоваться предположением о малости диссипации, которое имеет вид

$$\delta\sim\frac{1}{\mathrm{Re}}+\frac{1}{R_m}$$

Существенно также, что дисперсия предполагается конечной, т.е. $k\sim 1$. Кроме того, необходимо сделать предположение о непродольности распространения волн: $\sin\alpha\sim 1$, где α – угол наклона между осью x и направлением невозмущенного магнитного поля. Представим B_y и B_z в виде

$$B_y=b\sin\theta,\quad B_z=b\cos\theta$$

где b – величина поперечной компоненты магнитного поля, θ – угол направления магнитного поля в плоскости (y, z).

Сделаем замену независимых переменных по формулам

$$\xi = \delta(x - t\cos\alpha), \quad \tau = \delta^3 t$$

Далее, согласно методике [2], разлагая все переменные по степеням параметра δ и подставляя затем в исходную систему, получим уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{3}{2}\beta f^2 \frac{\partial f}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} - \gamma \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi} + f \int\limits_{-\infty}^{\xi} (f(\lambda))^2 d\lambda\right) = 0 \tag{1.1}$$

$$f = \frac{\partial \theta_0}{\partial \xi}, \quad \beta = -\frac{k^2}{2\sin^2\alpha}\left(\frac{a^2}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right), \quad \gamma = \frac{1}{2\delta}\left(\frac{1}{\mathrm{Re}} + \frac{1}{R_m}\right)$$

где θ_0 – нулевой член в разложении θ по степеням δ, a – невозмущенная скорость звука.

Полученное уравнение является более точным по сравнению с рассмотренным ранее [3] и обобщает известные уравнения для альфвеновских волн при учете соответственно только диссипации и только дисперсии. Ранее обсуждался случай чистой дисперсии [4] и чистой диссипации [5, 6].

Далее, аналогично известному подходу [7], ограничимся случаем $\gamma/\beta = \varepsilon$, где ε – малый параметр) дисперсионные эффекты преобладают над диссипативными).

Сделаем замену переменных

$$\beta\tau = t, \; f = 2u, \; \xi = x$$

Уравнение (1.1) в этом случае приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + 4u \int\limits_{-\infty}^{x} (u(y))^2 dy\right) = 0 \tag{1.2}$$

и является возмущенным модифицированным уравнением Кортевега–де–Вриза (МКдВ).

В дальнейшем следует иметь в виду, что введенные здесь u, x и t не совпадают с физическими переменными.

2. Как известно [7], возмущенное уравнение МКдВ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \varepsilon R[u] \tag{2.1}$$

эквивалентно операторному уравнению

$$i\frac{\partial L}{\partial t} + [L, A] = i\varepsilon R \tag{2.2}$$

где L и A – линейные операторы, зависящие от u, a $[L, A]$ – коммутатор; при этом собственные числа оператора L не зависят от времени, а оператор возмущения R (для действительных уравнений) совпадает с R в правой части (2.1).

Уравнение (2.2), будучи точным, позволяет развить приближенную теорию возмущений для солитонов МКдВ [8]. Здесь будет рассматриваться так называемое адиабатическое приближение этой теории.

Решение уравнения (2.1) представляется в виде

$$u_s(x, t) = 2\nu(t)\operatorname{sech} h(z) + w(x, t), \; z = 2\nu(t)\,(x - \mu(t)) \tag{2.3}$$

причем первое слагаемое определяет эволюцию солитонного ядра, а второе – развитие хвоста. Действуя в рамках указанного приближения, пренебрегаем функцией $w(x, t)$ и имеем возможность определить только функции $\nu(t)$ и $\mu(t)$. Поэтому с физической точки зрения оно применимо лишь при малых t, при которых растущий хвост не оказывает существенного влияния на характер движения. В случае $\nu = \nu_0$, $\mu = 4\nu_0^2 t$ формула (2.3) описывает солитонное решение невозмущенного МКдВ.

Основные формулы адиабатического приближения имеют вид [8]

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{R[u_s(z)]}{\mathrm{ch}(z)}dz,\quad \frac{d\mu}{dt}=\frac{\varepsilon}{4v^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{zR[u_s(z)]}{\mathrm{ch}(z)}dz+4v^2 \tag{2.4}$$

3. Исследуем методом теории возмущений уравнение (1.2). Оператор возмущения для уравнения (1.2) имеет вид

$$R[u]=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+4u\int\limits_{-\infty}^{x}(u(y))^2dy\right) \tag{3.1}$$

Подставляя (2.3) в (3.1), получим

$$R[u_s]=8v^3\frac{6-3\mathrm{ch}^2(z)-4\mathrm{ch}(z)\mathrm{sh}(z)}{\mathrm{ch}^3(z)} \tag{3.2}$$

Правые части (2.4) при подстановке в них (3.1) и (3.2) сводятся к несобственным интегралам, вычисление которых дает

$$\frac{dv}{dt}=8v^3\varepsilon,\quad \frac{d\mu}{dt}=4v^2-8v\varepsilon \tag{3.3}$$

После интегрирования получим

$$v(t)=\frac{v_0}{\sqrt{1-16\varepsilon v_0^2 t}},\quad \mu(t)=-\frac{1}{4\varepsilon}\ln\left(1-16\varepsilon v_0^2 t\right)+\frac{1}{v_0}\left(\sqrt{1-16\varepsilon v_0^2 t}-1\right) \tag{3.4}$$

Полученные формулы при малых t позволяют проследить изменение скорости и амплитуды альфвеновского солитона под воздействием диссипации.

Авторы благодарят П.Е. Александрова за обсуждение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-01383, 97-01-00196).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баранов В.Б., Рудерман М.С.* Волны в плазме с холловской дисперсией // МЖГ. 1974. № 3. С. 108–113.
2. *Taniuti T.* Reductive perturbation method and far fields of wave // Suppl. Progr. Theor. Phys. 1974. № 5. P. 1–35.
3. *Родин А.Б., Шикин И.С.* К вопросу о диссипативной эволюции альфвеновского солитона в магнитной гидродинамике // Труды XIII сессии международной школы по моделям механики сплошной среды. СПб., 1996. С. 39–41.
4. *Kakutani T., Ono H.* Weak non-linear hydromagnetic waves in a cold collision-free plasma // Japan Phys. Soc. 1969. V. 26. № 5. P. 1305–1318.
5. *Nakata I.* Nonlinear alfven waves in a compressible viscous fluid // Japan Phys. Soc.1991. V. 60. № 6. P. 1952–1958.
6. *Родин А.Б., Шикин И.С.* Эволюция альфвеновского разрыва в магнитной гидродинамике // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 685–687.
7. *Джахишвили Дж.И.* Альфвеновские солитоны и ударные волны в диссипативной плазме // Физика плазмы. 1988. Т. 14. В. 7. С. 886–888.
8. *Карпман В.И., Маслов Е.М.* Теория возмущений для солитонов // ЖЭТФ. 1977. Т. 73. № 2. С. 537–559.

Москва

Поступила в редакцию
25.V.1998