

УДК 531.36

© 1998 г. А.А. Буров, Х. Трогер

### ОБ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ РАВНОВЕСИЯХ ПОДВЕШЕННОГО НА ТРОСЕ ГИРОСТАТА В ЦЕНТРАЛЬНОМ НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ

Рассматривается движение орбитальной тросовой системы, образованной массивным телом, совершающим невозмущенное движение по кеплеровой орбите, и связанным с ним посредством нерастяжимого невесомого троса гиростатом малой массы. Найдены некоторые классы равновесий такой системы относительно равномерно вращающейся системы координат. С помощью кругов Мора дана геометрическая интерпретация этих равновесий. Рассматриваемая задача – простейший пример орбитальной тросовой системы с гиростатом. Однако исследование показывает богатство ее динамических свойств. Имеются и более сложные примеры орбитальных тросовых систем, содержащих несколько гиростатов [1].

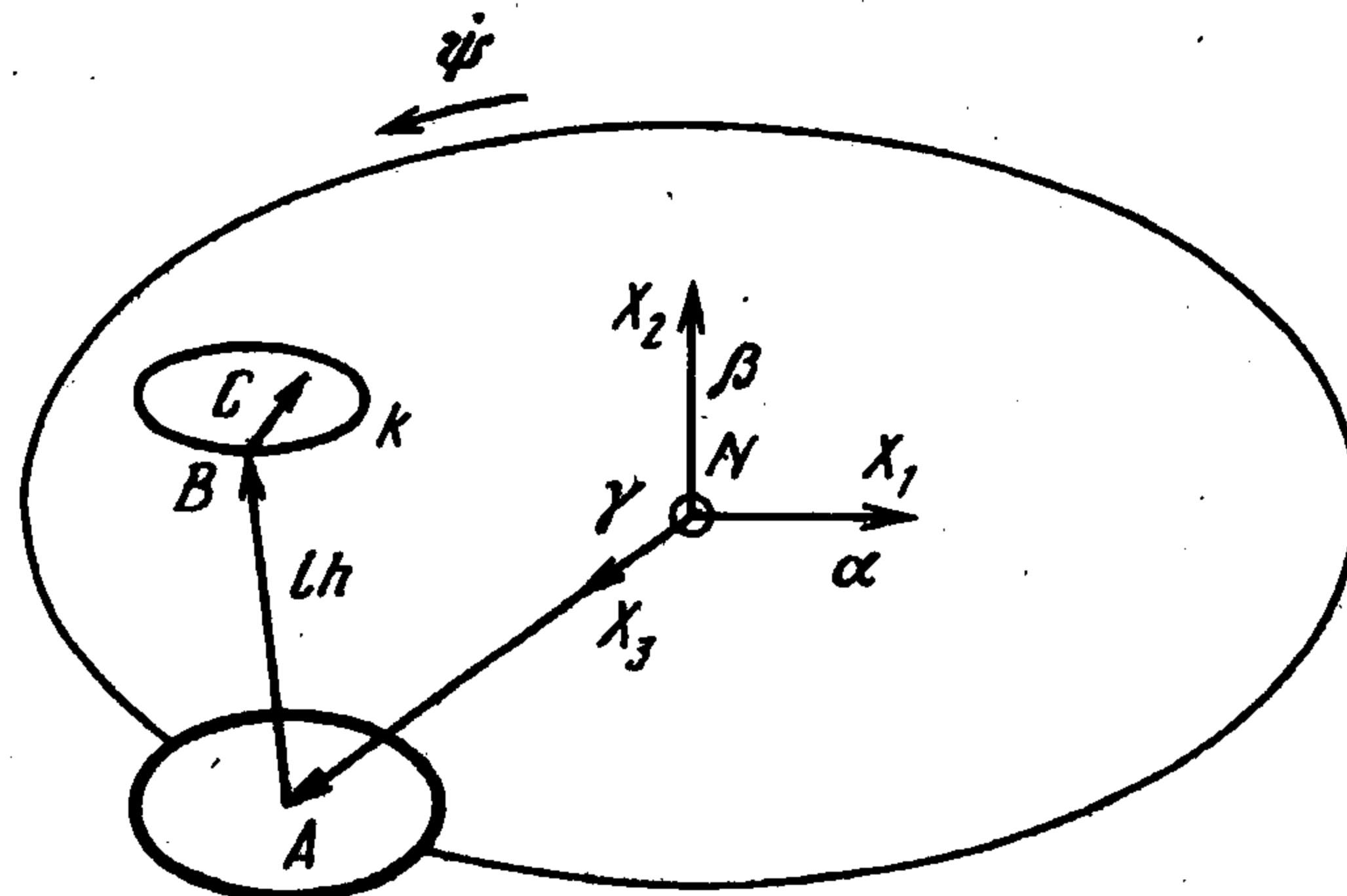
Пусть одна из концевых точек троса (точка  $A$ ) закреплена на массивном теле, совершающем равномерное движение по круговой кеплеровой орбите, которая не может быть возмущена движением второго тела. Если  $N$  – притягивающий центр, то  $\mathbf{R} = \overrightarrow{NA} = R\boldsymbol{\gamma}$ , где  $R$  – радиус орбиты,  $\boldsymbol{\gamma}$  – единичный вектор. Другой конец троса (точка  $B$ ) фиксирован в корпусе гиростата и расстояние от точки  $A$  до точки  $B$  равно  $l$ . Тогда  $\mathbf{L} = \overrightarrow{AB} = l\mathbf{h}$ , где  $\mathbf{h}$  – также единичный вектор. Предположим, что точка  $C$  – центр масс гиростата и вектор  $\mathbf{k} = \overrightarrow{BC}$  фиксирован в его кожухе. Вектор  $\mathbf{r} = \overrightarrow{NC}$ , определяющий положение центра масс гиростата в абсолютном пространстве, и векторы, упомянутые выше, связаны соотношениями

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{L} + \mathbf{k}$$

Предположим, что ротор, расположенный внутри кожуха гиростата, вращается относительно этого кожуха с постоянной относительной угловой скоростью  $\dot{\varphi}$ . Такой гиростат называется гиростатом Кельвина (см., например, [2], с. 156–191). Пусть  $NX_1X_2X_3$  – равномерно вращающаяся вокруг оси  $NX_2$  орбитальная система координат, образованная единичными векторами  $\boldsymbol{\gamma}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  и  $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}$ , где  $\boldsymbol{\beta}$  и  $\boldsymbol{\alpha}$  – нормаль к плоскости орбиты и касательная к круговой орбите в точке  $A$ .

Обозначим вращающуюся систему координат  $NX_1 \parallel \boldsymbol{\alpha}$ ,  $NX_2 \parallel \boldsymbol{\beta}$ ,  $NX_3 \parallel \boldsymbol{\gamma}$ . Введем также систему координат, фиксированную в корпусе гиростата, оси которой совпадают с главными осями центрального тензора инерции  $I$  гиростата в целом. Обозначим эту систему координат  $Sx_1x_2x_3$  (фиг. 1). Пусть  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  – вектор абсолютной угловой скорости гиростата,  $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3)$  – вектор кинетического момента ротора (КМР). Величина вектора  $\mathbf{K}$  пропорциональна величине угловой скорости вращения ротора. Здесь и далее все векторные величины даны в своих проекциях на оси, связанные с гиростатом, если не оговорено противное.

Чтобы отыскать относительные равновесия в орбитальной системе координат и исследовать свойства их устойчивости, воспользуемся методом Рауса – Ляпунова. Он основан на



Фиг. 1

исследовании критических точек измененного потенциала, рассмотренного как функция на совместном уровне «геометрических» интегралов,

$$\pi_\gamma = (\gamma, \gamma) - 1 = 0, \quad \pi_{\gamma\beta} = (\gamma, \beta) = 0, \quad \pi_\beta = (\beta, \beta) - 1 = 0, \quad \pi_h = (h, h) - 1 = 0$$

выражающих ортонормированность системы векторов  $(\alpha, \beta, \gamma)$  и единичность вектора  $h$ . Тогда, чтобы применить метод множителей Лагранжа, построим функцию Рауса ( $\dot{\psi}$  – постоянная орбитальная угловая скорость)

$$W_\pi = \frac{W_K}{\dot{\psi}^2} + 3\lambda\pi_{\gamma\beta} + \frac{\nu}{2}\pi_\beta - \frac{3}{2}\sigma\pi_\gamma + \frac{\chi}{2}ml\pi_h$$

где

$$W_K = -\frac{1}{2}\dot{\psi}^2[(I\beta, \beta) - m(\beta, lh+k)^2] - \dot{\psi}(K, \beta) + \frac{3}{2}\dot{\psi}^2[(I\gamma, \gamma) - m(\gamma, lh+k)^2] + \text{const}_K$$

– измененный потенциал [3].

Система для нахождения критических точек состоит из тринадцати, в общем случае нелинейных, алгебраических уравнений и имеет вид

$$\frac{\partial W_\pi}{\partial \gamma} = 3[(I(h) - \sigma E)\gamma + \lambda\beta] = 3[(I - \sigma E)\gamma + \lambda\beta - m(\gamma, lh+k)(lh+k)] = 0$$

$$\frac{\partial W_\pi}{\partial \beta} = 3\lambda\gamma + (\nu E - I(h))\beta - \dot{\psi}^{-1}K = 3\lambda\gamma + (\nu E - I)\beta - \dot{\psi}^{-1}K + m(\beta, lh+k)(lh+k) = 0$$

$$\frac{\partial W_\pi}{\partial h} = ml[(\beta, lh+k)\beta - 3(\gamma, lh+k)\gamma + \chi h] = 0$$

$$\frac{\partial W_\pi}{\partial \lambda} = \frac{\partial W_\pi}{\partial \nu} = \frac{\partial W_\pi}{\partial \sigma} = \frac{\partial W_\pi}{\partial \chi} = 0$$

Здесь  $E$  – единичная  $(3 \times 3)$ -матрица.

Оказывается, что существуют частные решения, для которых четыре точки  $N, A, B, C$  располагаются на одной прямой. Если

$$i_{h\gamma} = (h, \gamma), \quad i_{k\gamma} = (k, \gamma), \quad \sigma^* = \sigma + m(li_{h\gamma} + i_{k\gamma})^2$$

то ориентация гиростата определяется уравнениями

$$(I - \sigma^* E)\gamma + \lambda\beta = 0, \quad \dot{\psi}^{-1}K = 3\lambda\gamma + (\nu E - I)\beta \quad (1)$$

Уравнения (1) с точностью до обозначений совпадают с уравнениями относительных равновесий спутника-гиростата. Положение вектора  $k$  в гиростате задано. Тогда для данных движений направление вектора  $\gamma$  также задано. Поэтому удобно рассматривать задачу в рамках так называемого полубратного подхода. В рамках этого подхода ориентация гиростата по отношению к вектору  $\gamma$  задана и исследуется ориентация гиростата по отношению к векторам  $\alpha$  и  $\beta$  в зависимости от КМР  $K$ , обеспечивающего эту ориентацию. Как и в [4], имеем

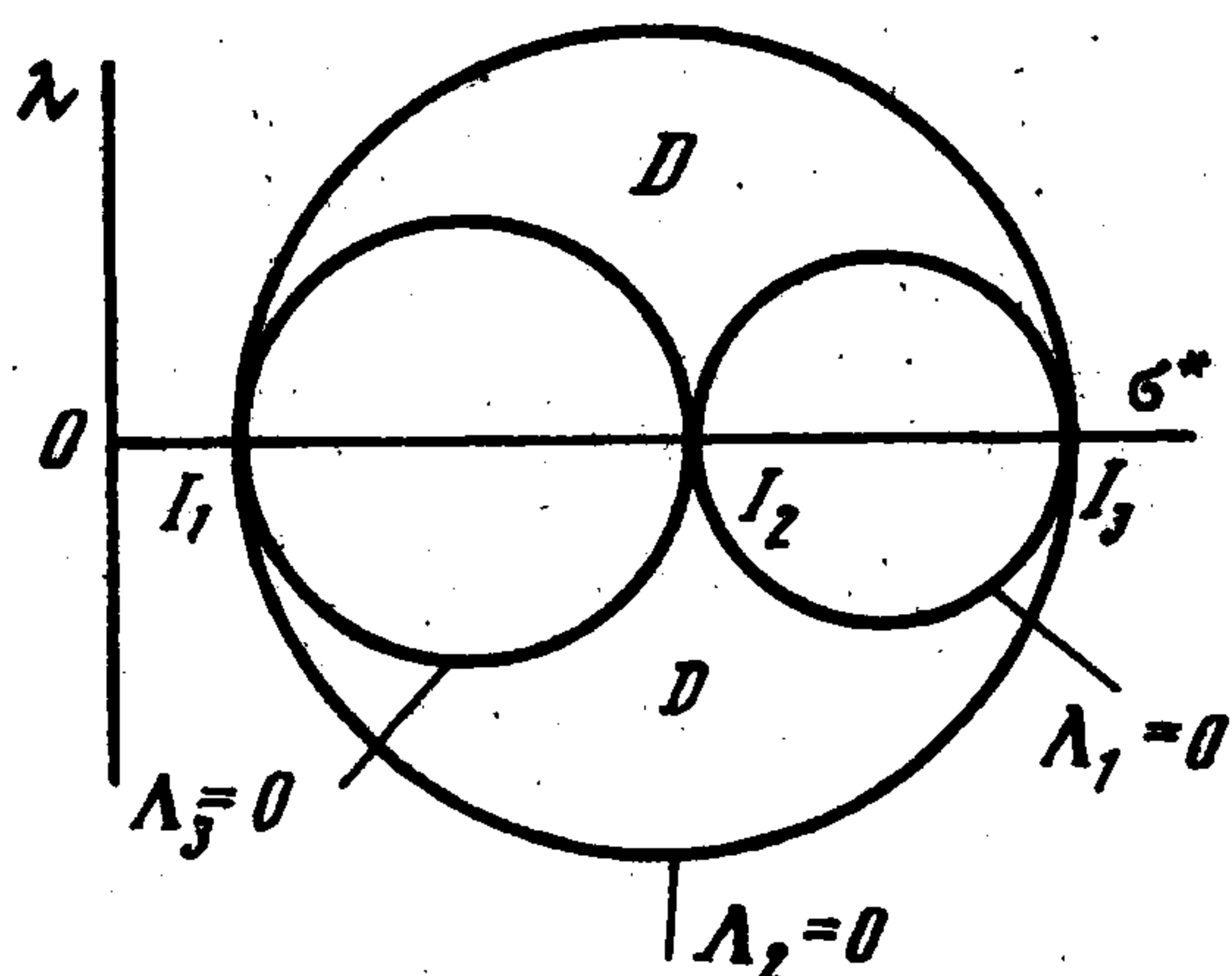
$$\sigma^* = (I\gamma, \gamma), \quad \lambda^2 = (I\gamma \times \gamma, I\gamma \times \gamma), \quad \beta = -\lambda^{-1}(I - \sigma^* E)\gamma, \quad \alpha = \beta \times \gamma$$

КМР, обеспечивающий такую ориентацию, находится из соотношений

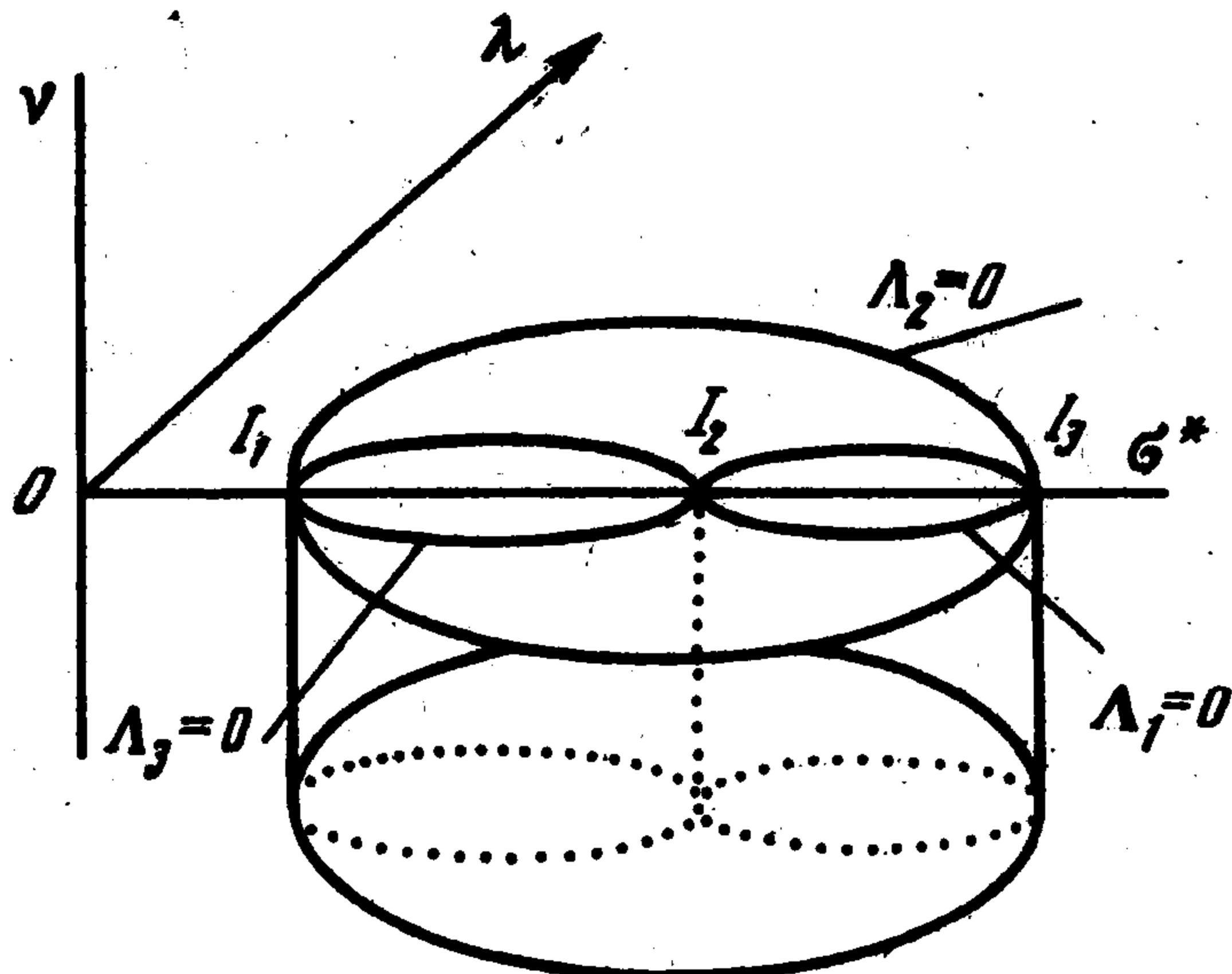
$$\dot{\psi}^{-1}K = 3\lambda\gamma + (\nu E - I)\beta \quad (2)$$

Если  $\lambda = 0$ , т.е. если  $\gamma$  – собственный вектор матрицы  $I$ , то ориентация гиростата по отношению к вектору  $\beta$  может быть произвольной. Она может регулироваться КМР согласно соотношению (2). КМР, обеспечивающий данную ориентацию гиростата, образует однопараметрическое семейство по отношению к параметру  $\nu$ , который может быть записан так:  $\nu = (I\beta, \beta) + \dot{\psi}^{-1}(K, \beta)$ .

Параметры  $\lambda$  и  $\nu$  в отличие от  $\sigma^*$  имеют достаточно простой механический смысл.



Фиг. 2



Фиг. 3

Параметр  $\lambda$  пропорционален величине момента сил ньютоновского притяжения. Параметр  $\nu$ , как и для спутника-гиростата [4], пропорционален проекции вектора кинетического момента системы на ось  $\beta$ , перпендикулярную плоскости орбиты. Такие движения могут быть названы *коллинеарными относительными равновесиями*.

Метод параметрического представления относительных равновесий для спутника-гиростата, предложенный ранее [5, 6], оказывается справедливым и для рассматриваемого класса движений.

Рассмотрим уравнения (1) как линейную систему относительно  $\beta$  и  $\gamma$ , предполагая, что остальные параметры фиксированы. Решение этой системы можно записать в виде

$$\frac{\beta_i}{\sigma^* - I_i} = \frac{\gamma_i}{\lambda} = \frac{\psi^{-1} K_i}{3\lambda^2 + (\nu - I_i)(\sigma^* - I_i)}$$

Подставляя это решение в условия ортонормальности векторов  $\beta$  и  $\gamma$ , получаем линейную систему уравнений относительно  $K_1^2, K_2^2, K_3^2$ . Решив эту систему и подставив выражения для  $K_i^2$  в соотношения для  $\beta$  и  $\gamma$ , имеем

$$\gamma_1^2 = \frac{(I_3 - I_2)(\lambda^2 + (\sigma^* - I_2)(\sigma^* - I_3))}{(I_2 - I_3)(I_3 - I_1)(I_1 - I_2)}, \quad \beta_1^2 = \frac{(\sigma^* - I_1)^2}{\lambda^2} \gamma_1^2 \quad (3)$$

Невыписанные выражения получаются круговой перестановкой индексов.

Таким образом, целое множество относительных равновесий и обеспечивающих эти равновесия КМР оказывается параметризованным величинами  $(\lambda, \sigma^*, \nu)$ . Выражения для этих величин, определяющих ориентацию гиростата, не зависят от  $\nu$ . Этот параметр оказывает влияние лишь на выражения для КМР. Однако параметры  $(\lambda, \sigma^*)$  не могут быть произвольными.

Предположим, например, что

$$I_1 < I_2 < I_3 \quad (4)$$

Условия неотрицательности выражений в правых частях (3) имеют вид

$$\Lambda_1 = \lambda^2 + (\sigma^* - I_2)(\sigma^* - I_3) \geq 0, \quad \Lambda_2 = \lambda^2 + (\sigma^* - I_3)(\sigma^* - I_1) \leq 0,$$

$$\Lambda_3 = \lambda^2 + (\sigma^* - I_1)(\sigma^* - I_2) \geq 0 \quad (5)$$

Эти условия выполнены в цилиндрической области  $D$  пространства  $(\lambda, \sigma^*, \nu)$ , ограниченной цилиндрической поверхностью  $\{\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 = 0\} \times R^1(\nu)$ . Круги в сечении области  $D$  плоскостью  $\nu = 0$ , изображенные на фиг. 2, аналогичны кругам Мора, известным из теории упругости. Цилиндры могут быть изображены как на фиг. 3. Аналогичные фигуры для спутника-гиростата были обнаружены и исследованы ранее [5, 6].

Прямым  $\lambda = 0$ ,  $\sigma^* = I_j$ , принадлежащим границе области  $D$ , вдоль которых имеет место касание каждой пары из тройки цилиндров, отвечают семейства относительных равновесий

$$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = \gamma_3 = \beta_1 = 0, \beta_2 = \sin\theta, \beta_3 = \cos\theta \quad (123)$$

Для относительных равновесий, отвечающих первому индексу из циклической перестановки, первая ось инерции указывает на притягивающий центр и гиростат повернут вокруг этой оси на угол  $\theta$ . Ось ротора ортогональна вектору  $\gamma$  и располагается в плоскости  $Sx_2x_3$ . Интерпретация остальных относительных равновесий аналогична. Относительные равновесия этого класса аналогичны соответствующим относительным равновесиям спутника-гиростата [4, 7].

Точкам цилиндров  $\Lambda_i = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) отвечают относительные равновесия

$$\gamma_1 = \cos\theta, \gamma_2 = -\sin\theta, \gamma_3 = \beta_3 = 0, \beta_1 = \sin\theta, \beta_2 = \cos\theta \quad (123)$$

$$\lambda = (I_2 - I_3)\sin\theta\cos\theta, \sigma^* = I_1\cos^2\theta + I_2\sin^2\theta$$

$$K_1\dot{\psi}^{-1} = (v - I_1 + 3(I_1 - I_2)\cos^2\theta)\sin\theta$$

$$K_2\dot{\psi}^{-1} = (v - I_2 + 3(I_2 - I_1)\sin^2\theta)\cos\theta, K_3 = 0$$

Для относительных равновесий, отвечающих первому индексу из циклической перестановки, третья ось инерции направлена вдоль касательной к орбите, определяемой вектором  $\alpha$ , плоскость  $Sx_1x_2$  совпадает с плоскостью  $(\beta, \gamma)$ , ось  $Sx_2$  образует угол  $\theta$  с вектором  $\beta$ . Ось ротора расположена в плоскости  $Sx_1x_2$ , т.е. ортогональна вектору  $\alpha$ . Интерпретация остальных относительных равновесий аналогична. Относительные равновесия этого класса аналогичны соответствующим относительным равновесиям спутника-гиростата, исследованным ранее [4, 7].

Наконец, можно отметить, что в теоретической механике круги Мора появляются не только в динамике орбитальных систем с гиростатами. Они также известны и в теории колебаний для систем с двумя степенями свободы [8]. Эти же круги возникают и в динамике твердых тел с неподвижной точкой [9].

Работа А.Б. выполнена при поддержке Австрийского научного фонда (FWF) стипендией Лизы Майтнер M00282TEC, частично в рамках проектов Международной ассоциации содействия сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (93-1621-ext), Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00261, 96-15-96051), а также проекта ИНТЕГРАЦИЯ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Moccia A., Vetrella S., Grossi M. Attitude dynamics and control of a vertical interferometric radar tethered altimeter // J. Guid. Control and Dyn. 1993. Т. 16. № 2. С. 264–269.
2. Hughes, Peter C. Spacecraft Attitude Dynamics. New York et. al.: Wiley, 1986. 564 p.
3. Bourov A.A., Troger H. On relative equilibria of a tethered gyrostat in a central Newtonian field // ZAMM. 1997. V. 77. Suppl. 1. S53–S54.
4. Степанов С.Я. О множестве стационарных движений спутника-гиростата в центральном ньютоновском поле сил и об их устойчивости // ПММ. 1969. Т. 33. № 4. С. 737–744.
5. Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988. 304 с.
6. Рубановский В.Н. Об относительных равновесиях спутника-гиростата, их ветвлении и устойчивости // ПММ. 1988. Т. 52. № 6. С. 909–914.
7. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 141 с.
8. den Hartog J.P. Mechanical Vibrations. New York, et. al.: McGraw-Hill, 1956. – 436 p.
9. Rimrott F.P.J., Saitov A. Attitude diagrams for the description of the attitude drift of torquefree asymmetric gyros // In: GAMM Tagung Programm. Prag: Karls-Universitaet, 1996. S. 46.