

УДК 539.3

© 1998 г. В.В. Лохин, В.М. Панферов, И.В. Панферов

## СЛОЖНЫЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ С КВАДРАТНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Исследуется сложный пространственный изгиб длинного стержня (с квадратным поперечным сечением) из изотропного идеально пластического и идеально циклического материала. Изгиб стержня происходит под действием двух моментов, приложенных на его концах таким образом, что процесс продольной деформации срединных волокон двух соседних боковых граней описывается ломаной линией.

Были сформулированы [1] основные уравнения типа теории малых упругопластических деформаций при повторных и знакопеременных нагружениях. Эта теория является обобщением известной теории малых упругопластических деформаций А.А. Ильюшина на случай знакопеременных нагружений. В данной статье решается задача, постановка которой выходит за рамки указанной теории.

**1. Сложный пространственный изгиб.** Исследуется сложный пространственный изгиб длинного стержня, поперечное сечение которого – квадрат  $|x| \leq a$ ,  $|y| \leq a$  из изотропного идеально пластического и идеально циклического несжимаемого материала. Используется декартова система координат  $(x, y, z)$ , где ось  $z$  – ось стержня, а  $z = \pm L$  – его концы. Изгиб стержня происходит под действием моментов  $M_x$  и  $M_y$ , приложенных на его концах таким образом, что процесс продольной деформации срединных волокон двух соседних боковых граней ( $x = -a, y = 0$ ) и ( $x = 0, y = a$ ) описывается двузвенной ломаной линией с ортогональными кусками в плоскости деформаций  $(\varepsilon_z(-a, 0), \varepsilon_z(0, a))$ , где  $\varepsilon_z = \varepsilon_z(x, y)$  – продольная деформация.

Из условия задачи ясно, что напряжения и деформации не зависят от продольной координаты.

В дальнейшем используются безразмерные координаты, отнесенные к  $a$ , т.е.  $x = \pm 1$ ,  $y = \pm 1$  – боковые грани исследуемого стержня, а  $z = \pm l$  – его концы.

С учетом несжимаемости и изотропии материала точное решение задачи будем искать в виде

$$\sigma_z = \sigma(x, y), \varepsilon = -\varepsilon^{(1)}x + \varepsilon^{(2)}y, \varepsilon_z = \varepsilon, \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\varepsilon/2 \quad (1.1)$$

Другие компоненты тензоров напряжений и деформаций равны нулю.

Механический смысл постоянных  $\varepsilon^{(1)}$ ,  $\varepsilon^{(2)}$  будет пояснен ниже.

В дальнейшем продольные напряжения и деформации будем обозначать величинами  $\sigma$  и  $\varepsilon$  соответственно.

При учете (1.1) уравнения равновесия и совместности деформаций пространственной задачи выполняются автоматически. Граничные условия в напряжениях на боковых гранях стержня также выполнены.

В поперечных сечениях стержня действуют моменты  $M_x$  и  $M_y$  таким образом, что реализуется следующий процесс деформирования стержня: вначале при  $\varepsilon(0, 1) \equiv 0$  деформация  $\varepsilon(-1, 0)$  возрастает до величины  $\varepsilon^{(1)}$ , затем происходит возрастание деформации  $\varepsilon(0, 1)$  до величины  $\varepsilon^{(2)}$  при постоянном значении  $\varepsilon(-1, 0) \equiv \varepsilon^{(1)}$ .

Для определенности примем, что  $\epsilon^{(1)} > 0$ ,  $\epsilon^{(2)} \geq 0$ , причем  $\epsilon^{(1)} > \epsilon_s$  (предел упругости при чистом растяжении).

Запишем связь между напряжениями и деформациями при одноосном переменном нагружении (по оси  $z$ ) идеально пластического и идеально циклического несжимаемого материала. Активное нагружение осуществляется до накопления упругопластической деформации  $\epsilon'$ . Далее реализуется разгрузка и накопление вторичных пластических деформаций.

При активном нагружении имеем

$$\begin{aligned} \sigma &= E\epsilon, \quad \epsilon_x = \epsilon_y = -\epsilon/2 \quad \text{при } |\epsilon| \leq \epsilon_s \\ \sigma &= \sigma_s \operatorname{sign}(\epsilon), \quad \epsilon_x = \epsilon_y = -\epsilon/2 \quad \text{при } |\epsilon| \geq \epsilon_s \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $\epsilon_s$  – предел упругости при растяжении и  $\sigma_s = E\epsilon_s$ .

При разгрузке из деформированного упругопластического состояния  $\epsilon'$  справедливы следующие соотношения между напряжениями и деформациями

$$\sigma - \sigma' = E(\epsilon - \epsilon'), \quad \sigma' = \sigma_s \operatorname{sign}(\epsilon'), \quad \epsilon_x = \epsilon_y = -0,5\epsilon$$

при  $|\epsilon - \epsilon'| \leq 2\epsilon_s$  и

$$\sigma = -\sigma_s \operatorname{sign}(\epsilon'), \quad \epsilon_x = \epsilon_y = -\epsilon/2 \quad (1.3)$$

при  $|\epsilon - \epsilon'| \geq 2\epsilon_s$ .

Соотношения (1.2), (1.3) предполагают симметрию связи  $\sigma \sim \epsilon$  на сжатие и растяжение (пределы упругости на сжатие и растяжение по модулю одинаковы). На основании этих формул напряжение  $\sigma$  – нечетная функция относительно начала координат.

Следовательно, условие равенства нулю равнодействующей осевой силы выполняется автоматически.

В дальнейшем будем использовать обозначения

$$\eta = \epsilon_s/\epsilon^{(1)}, \quad \mu = \epsilon_s/\epsilon^{(2)}$$

На начальной стадии решения задачи определим распределение осевых напряжений  $\sigma'(x, y)$  на первом отрезке процесса деформирования стержня, т.е. при  $\epsilon^{(2)} = 0$ .

Распределение деформаций имеет вид

$$\epsilon' = -\epsilon^{(1)}x$$

В стержне реализуется активный упругопластический процесс нагружения. В области  $-\eta \geq x \geq -1$  накоплены упругопластические деформации  $\epsilon'$  и  $\sigma' = \sigma_s$ . В упругопластической области  $\eta \leq x \leq 1$  соответственно имеем  $\sigma' = -\sigma_s$ . В области  $|x| \leq \eta$  распределены упругие деформации и  $\sigma' = E\epsilon'$ .

В поперечных сечениях стержня действуют моменты

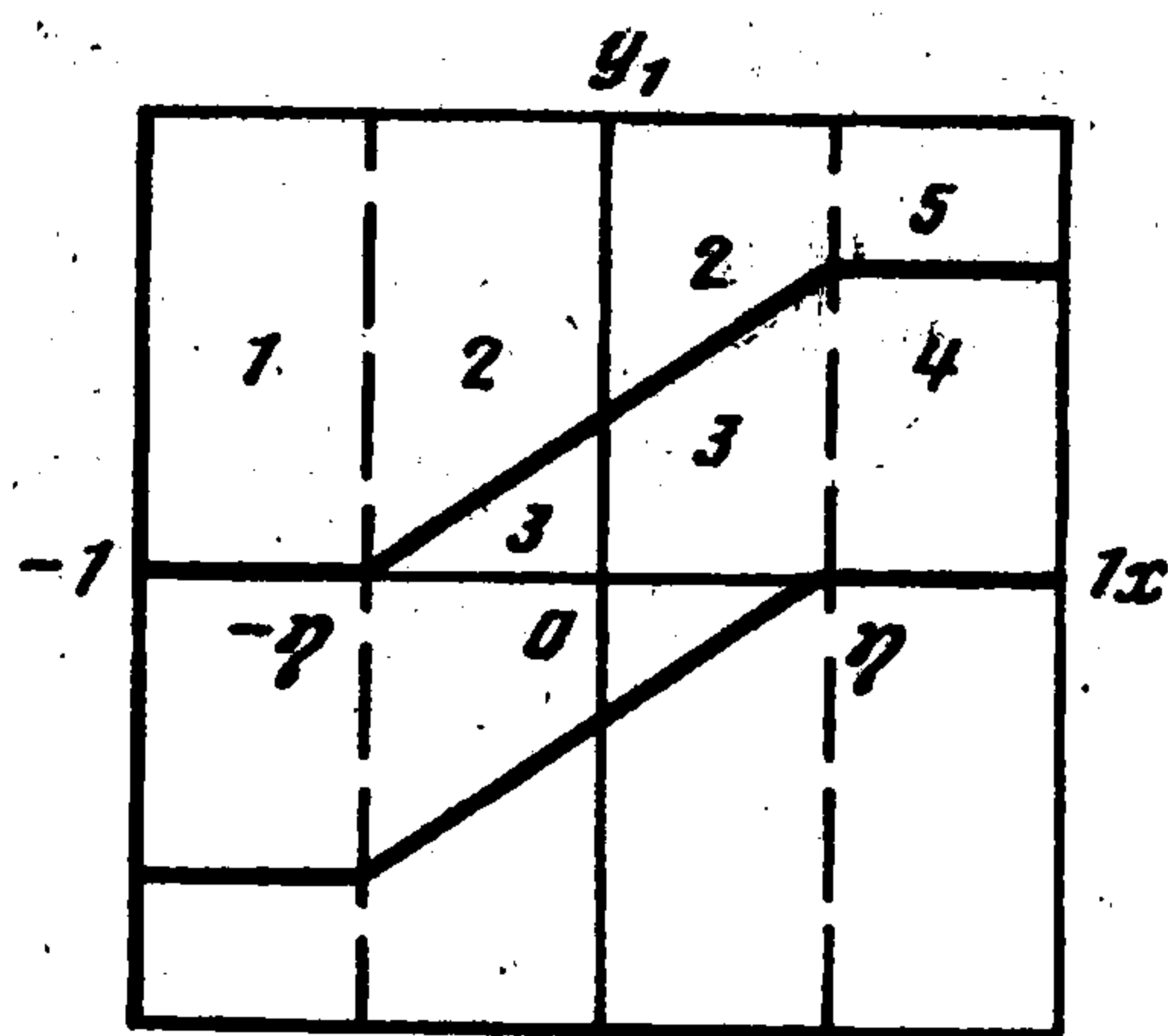
$$M_x = 0 \text{ и } M_y = -2(a^3\sigma_s) \left( \frac{1}{3}\eta^2 - 1 \right)$$

Поскольку при  $\epsilon^{(2)} = 0$  известны деформации  $\epsilon'$  и пластические области, можно при  $\epsilon^{(2)} > 0$  найти области поперечного сечения стержня, в которых реализуются активное нагружение материала, разгрузка, накопление вторичных пластических деформаций, а также чисто упругое нагружение. Затем при учете соотношений (1.2)–(1.3) вычисляются осевые напряжения  $\sigma(x, y)$ .

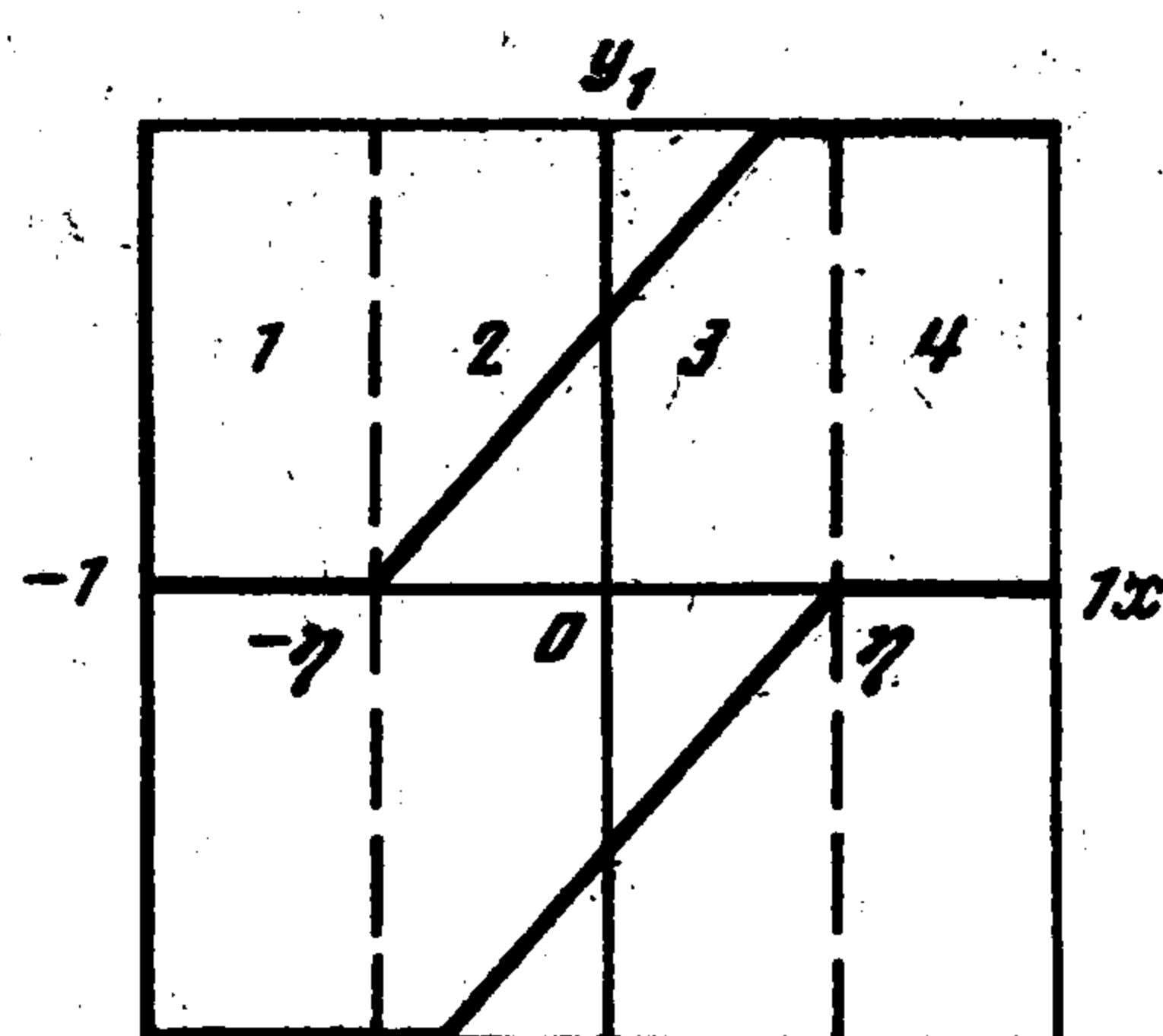
В силу нечетности  $\sigma(x, y)$  относительно начала координат достаточно определить напряжения в области  $y \geq 0$ .

Рассмотрим случай  $2\mu \leq 1$  (фиг. 1). Деформации  $\epsilon$ ,  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  определены формулой (1.1). Область  $y \geq 0$  условно разбита на пять областей  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$  (фиг. 1).

В области  $F_1$  в силу равенства  $\operatorname{sign}(\epsilon') = \operatorname{sign}(\epsilon - \epsilon')$  имеет место активный процесс



Фиг. 1



Фиг. 2

нагружения и  $\sigma = \sigma_s$ . В области  $F_2$  происходит нагружение из упругого состояния. Поскольку  $\epsilon \geq \epsilon_s$ , имеем  $\sigma = \sigma_s$ . Область  $F_3$  упруго нагружена. Следовательно,  $\sigma = E\epsilon$ . Отметим, что граница раздела пластической области  $F_2$  и упругой области  $F_3$  описывается уравнением  $\epsilon_s = -\epsilon^{(1)}x + \epsilon^{(2)}y$ . В области  $F_4$  имеет место упругая разгрузка, так как  $|\epsilon - \epsilon'| \leq 2\epsilon_s$ ,  $\text{sign}(\epsilon') = -\text{sign}(\epsilon - \epsilon')$ . При учете (1.2) получим  $\sigma = -\sigma_s + E\epsilon^{(2)}y$ . В области  $F_5$  накоплены вторичные пластические деформации, поскольку  $\text{sign}(\epsilon') = -\text{sign}(\epsilon - \epsilon')$  и  $|\epsilon - \epsilon'| \geq 2\epsilon_s$ . Имеем,  $\sigma = \sigma_s$ . Граница раздела двух последних областей описывается уравнением  $y = 2\mu$ .

В упругой области  $F_3$  линии равных напряжений описываются уравнением  $-\epsilon^{(1)}x + \epsilon^{(2)}y = \text{const}$ . В областях  $F_4$  и  $F_5$  линии равных напряжений:  $y = \text{const}$ .

Запишем формулы для вычисления моментов

$$M_x = 2(a^3\sigma_s)\left(1 - \frac{4}{3}\mu^2 + \frac{2}{3}\eta\mu^2\right)$$

$$M_y = 2(a^3\sigma_s)\mu\left(1 - \frac{1}{3}\eta^2\right)$$

Рассмотрим случай  $2\mu \geq 1$  (фиг. 2). Этот вариант отличается от предыдущего тем, что отсутствует зона вторичных пластических деформаций  $F_5$ . Формулы для определения напряжений в областях  $F_1, F_2, F_3, F_4$  записаны выше.

Моменты вычисляются по формулам

$$M_x = 2(a^3\sigma_s)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\eta - \frac{\eta}{8\mu}\right)\frac{1}{\mu}$$

$$M_y = -2(a^3\sigma_s)\left[\frac{1}{3}\eta^2 - 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{\eta}{\mu}\right)^2 - \frac{1}{24\mu}\left(\frac{\eta}{\mu}\right)^2 + \frac{1}{4\mu}(1 - \eta^2)\right]$$

Определим безразмерные перемещения (отнесенные к  $a$ ) из условий Коши

$$u_x = C_1 - \frac{1}{2}\epsilon^{(2)}xy - \frac{1}{4}\epsilon^{(1)}(y^2 - x^2) + \frac{1}{2}z^2\epsilon^{(1)}$$

$$u_y = D_1 + \frac{1}{4}\epsilon^{(2)}(x^2 - y^2) + \frac{1}{2}\epsilon^{(1)}xy - \frac{1}{2}z^2\epsilon^{(2)}$$

$$u_z = z\epsilon$$

Перемещения  $u_x$  и  $u_y$  симметричны по координате  $z$ . Постоянные  $C_1$  и  $D_1$  вычисляются с учетом способа приложения моментов  $M_x$  и  $M_y$  на концах стержня  $z = \pm l$ .

Обычно принимается условие

$$u_x = u_y = 0 \text{ при } z = l; x = 0, y = 0.$$

**2. Простой пространственный изгиб.** Предполагается, что в поперечных сечениях стержня действуют такие моменты  $M_x$  и  $M_y$ , что реализуется следующий процесс деформирования:

$$\epsilon^{(2)}/\epsilon^{(1)} = \text{const или } \epsilon^{(1)} = 0$$

Отметим, что при учете последних соотношений в поперечных сечениях стержня реализуется активный упругопластический процесс нагружения, области разгрузки отсутствуют. Линии равных напряжений описываются уравнением  $-\epsilon^{(1)}x + \epsilon^{(2)}y = \text{const}$ .

Деформации и напряжения определяются по формулам (1.1), (1.2). Формулы для вычисления перемещений даны в конце предыдущего раздела.

Указанный процесс деформирования стержня хорошо известен в механике деформируемого твердого тела.

Ниже приведены значения безразмерных моментов (отнесенных к величине  $a^3\sigma_s$ )  $M_x^*, M_y^*, M^* = [(M_x^*)^2 + (M_y^*)^2]^{1/2}$  и  $M_x^{**}, M_y^{**}, M^{**}$  при  $\epsilon^{(1)} = 6\epsilon_s$  и различных значениях величин  $\epsilon^{(2)}/\epsilon_s$  (звезда соответствует случаю простого изгиба, две звезды – случаю сложного изгиба)

$\epsilon^{(2)}/\epsilon_s$	0,00	0,50	1,25	2,25	3,00	4,00	6,00	8,00	10,0
$M_x^*$	0,00	0,11	0,28	0,50	0,67	0,89	1,32	1,61	1,75
$M_y^*$	1,98	1,98	1,95	1,89	1,81	1,69	1,32	1,00	0,80
$M^*$	1,98	1,98	1,97	1,95	1,93	1,91	1,87	1,90	1,93
$M_x^{**}$	0,00	0,38	0,91	1,52	1,73	1,85	1,93	1,96	1,98
$M_y^{**}$	1,98	1,74	1,36	0,88	0,66	0,50	0,33	0,25	0,20
$M^{**}$	1,98	1,78	1,64	1,75	1,85	1,91	1,96	1,98	1,99

Результаты показывают, что компоненты  $M_x$  и  $M_y$  более зависимы от процесса деформирования, чем абсолютная величина момента  $M$ . Наблюдается характерный провал диаграммы  $M^{**}(\epsilon^{(2)}/\epsilon_s)$  по отношению к диаграмме  $M^*(\epsilon^{(2)}/\epsilon_s)$  вблизи точки  $\epsilon^{(2)} = 0$ . При больших значениях  $\epsilon^{(2)}/\epsilon_s$  моменты  $M^*$  и  $M^{**}$  практически совпадают. Этот эффект аналогичен известному эффекту запаздывания скалярных свойств пластических материалов при сложном нагружении типа двузвенной ломаной линии в пятимерном пространстве деформаций А.А. Ильюшина [1, 2].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Москвитин В.В. Циклические нагружения элементов конструкций. М.: Наука, 1981. 344 с.
2. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.

Москва

Поступила в редакцию  
28.III.1996