

УДК 539.3 : 534.26

© 1998 г. Л.А. Толоконников

ПРОХОЖДЕНИЕ ЗВУКА ЧЕРЕЗ НЕОДНОРОДНЫЙ АНИЗОТРОПНЫЙ СЛОЙ, ГРАНИЧАЩИЙ С ВЯЗКИМИ ЖИДКОСТЯМИ

Рассмотрена задача об отражении и прохождении плоской звуковой волны через плоский неоднородный упругий слой, материал которого обладает анизотропией общего вида, а граничащие с ним жидкости вязкие. Получено аналитическое описание акустических полей вне слоя. Построенная для определения поля смещений в упругом слое краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений сведена к задачам с начальными условиями. Проведены численные расчеты коэффициента поглощения.

Ранее исследовалось отражение и прохождение звуковых волн через плоский неоднородный изотропный упругий слой [1], однородный трансверсально-изотропный упругий слой [2, 3] и неоднородный трансверсально-изотропный упругий слой [4]. Во всех указанных работах полагалось, что упругий слой граничит с идеальными жидкостями.

1. Рассмотрим неоднородный анизотропный плоский слой толщиной $2h$, модули упругости и плотность материала которого описываются непрерывными дифференцируемыми функциями координаты x_3 . При этом система прямоугольных координат x_1, x_2, x_3 выбрана таким образом, что ось x_1 лежит в средней плоскости слоя, а ось x_3 направлена вниз по нормали к поверхности слоя. Полагаем, что верхняя и нижняя поверхности слоя граничат с вязкими однородными жидкостями, которые имеют плотности ρ_1, ρ_2 , скорости звука c_1, c_2 и кинематические коэффициенты вязкости ν_1, ν_2 соответственно.

Пусть из полупространства $x_3 < -h$ на упругий слой падает плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой равен

$$\Psi_i = \exp\{i[k_{11}x_1 + k_{13}(x_3 + h) - \omega t]\} \quad (1.1)$$

где $k_{11} = k_1 \sin \theta_1$, $k_{13} = k_1 \cos \theta_1$ – проекции волнового вектора \mathbf{k}_1 на оси координат x_1 и x_3 соответственно, $k_1 = \omega/c_1$ – волновое число в верхнем полупространстве, ω – круговая частота, θ_1 – угол падения плоской волны. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ в дальнейшем опускаем.

Определим отраженную от слоя и прошедшую через слой волны, а также найдем поле смещений внутри упругого слоя.

2. Распространение упругих волн в неоднородном анизотропном слое описывается общими уравнениями движения упругой среды [5]

$$\rho \ddot{u}_i = \partial \sigma_{ij} / \partial x_j, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

где $\rho = \rho(x_3)$ – плотность материала слоя, u_i – проекция вектора смещения \mathbf{u} на ось x_i , σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, которые в общем случае анизотропии связаны с

компонентами тензора деформаций ϵ_{kl} следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijkl} \epsilon^{kl}, \quad \epsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (2.2)$$

Здесь $\lambda_{ijkl} = \lambda_{ijkl}(x_3)$ – модули упругости анизотропного материала.

В дальнейшем будем пользоваться двухиндексным обозначением модулей упругости λ_{ik} , где $i, k = 1, 2, \dots, 6$. При этом значениям индексов 1, 2, ..., 6 отвечают соответственно пары индексов 11, 22, 33, 23, 13, 12.

Поскольку волновой вектор падающей волны лежит в плоскости x_1, x_3 и, следовательно, возбуждающее поле не зависит от координаты x_2 , а неоднородность материала слоя проявляется лишь по оси x_3 , то от координаты x_2 не должны зависеть ни отраженное, ни прошедшее в полупространство $x_3 > h$, ни возбужденное в упругом слое поля. Заметим также, что, согласно закону Снеллиуса [6], зависимость составляющих вектора смещения от координаты x_1 будет иметь вид $\exp(ik_{11}x_1)$. Поэтому проекции вектора смещения будем искать в виде

$$u_j = U_j(x_3) \exp(ik_{11}x_1) \quad (2.3)$$

Помимо неизвестных величин u_1, u_2, u_3 введем в качестве дополнительных неизвестных, характеризующих движение упругой среды, компоненты тензора напряжений $\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$. Эти компоненты на основе соображений, приведенных выше, представим в виде

$$\sigma_{j3}(x_1, x_3) = \sigma_j(x_3) \exp(ik_{11}x_1), \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

Получим уравнения для определения неизвестных величин $U_j(x_3)$ и $\sigma_j(x_3)$ ($j = 1, 2, 3$). Подставим выражения (2.3) в соотношения Гука (2.2). Затем из полученных уравнений выразим производные U'_j по координате x_3 через функции $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Объединяя полученные выражения с уравнением движения (2.1), после подстановки в них (2.3) и (2.4) получим следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных U_1, U_2, U_3 и $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}' &= -s\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{P} \\ \mathbf{P}' &= [-s^2(\mathbf{C} - \mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) - \omega^2\rho\mathbf{I}]\mathbf{U} - s\mathbf{B}^T\mathbf{P} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь

$$\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)^T, \quad \mathbf{P} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T, \quad s = ik_{11}$$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \lambda_{55} & \lambda_{54} & \lambda_{53} \\ \lambda_{45} & \lambda_{44} & \lambda_{43} \\ \lambda_{35} & \lambda_{34} & \lambda_{33} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \lambda_{51} & \lambda_{56} & \lambda_{55} \\ \lambda_{41} & \lambda_{46} & \lambda_{45} \\ \lambda_{31} & \lambda_{36} & \lambda_{35} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{16} & \lambda_{15} \\ \lambda_{61} & \lambda_{66} & \lambda_{65} \\ \lambda_{51} & \lambda_{56} & \lambda_{55} \end{vmatrix}$$

\mathbf{I} – единичная матрица.

Отметим, что использование компонент тензора деформаций σ_{j3} ($j = 1, 2, 3$) в качестве неизвестных функций привело к дифференциальным уравнениям, коэффициенты которых не содержат производных от модулей упругости. Это позволяет при решении поставленной задачи ограничиться требованием непрерывности модулей упругости и плотности материала слоя.

Скорость частиц жидкости в отраженной и прошедшей через слой звуковых волнах представим в виде

$$\mathbf{v}_1 = \text{grad } \Psi_1 + \text{rot } \Phi_1, \quad \mathbf{v}_2 = \text{grad } \Psi_2 + \text{rot } \Phi_2$$

Потенциалы скоростей продольных волн Ψ_1, Ψ_2 и векторные потенциалы скоростей вязких волн Φ_1, Φ_2 (в верхнем и нижнем полупространствах соответственно) являются решениями следующих уравнений:

$$\Delta \Psi_j + k_j^2 \Psi_j = 0 \quad (2.6)$$

$$\Delta \Phi_j + \kappa_j^2 \Phi_j = 0, \quad j = 1, 2 \quad (2.7)$$

где $k_j = \omega/c_j$ – волновое число продольных волн; $\kappa_j = i\omega/\nu_j$ – волновое число вязких волн.

Отметим, что уравнение (2.7) представляет собой систему трех скалярных уравнений относительно трех функций $\Phi_{j1}, \Phi_{j2}, \Phi_{j3}$, где Φ_{ji} – проекция вектора Φ_j на ось x_i ($i = 1, 2, 3$). Однако уравнение $\text{div } \Phi_j = 0$ ($j = 1, 2$) дает зависимость между тремя функциями $\Phi_{j1}, \Phi_{j2}, \Phi_{j3}$, и из этих трех функций линейно независимыми остаются две.

В качестве неизвестных будем рассматривать функции Ψ_1, Ψ_2 и Φ_{12}, Φ_{22} . Наряду с ними введем дополнительные неизвестные v_{12}, v_{22} (проекции векторов v_1, v_2 на ось x_2).

Получим уравнения для функций Φ_{j2} и v_{j2} ($j = 1, 2$). Для установившегося режима движения из линеаризованных уравнений Навье–Стокса и неразрывности получим следующее уравнение относительно вектора скорости v_j :

$$-\text{rot rot } v_j + \frac{\kappa_j^2}{k_j^2} \text{grad div } v_j + \kappa_j^2 v_j = 0, \quad j = 1, 2 \quad (2.8)$$

Спроектируем векторные уравнения (2.7) и (2.8) на координатную ось x_2 , учитывая, что $\Phi_j = \Phi_j(x_1, x_3)$ и $v = v(x_1, x_3)$. В результате получим два одинаковых уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \kappa_j^2 \right) \begin{Bmatrix} \Phi_{j2} \\ v_{j2} \end{Bmatrix} = 0, \quad j = 1, 2$$

С учетом закона Снеллиуса функции $\Psi_j, \Phi_{j2}, v_{j2}$ ($j = 1, 2$) будем искать в виде

$$\Psi_j = A_{j1} \exp[ik_{11}x_1 \mp ik_{j3}(x_3 \pm h)], \quad \Phi_{j2} = A_{j2} \exp[ik_{11}x_1 \mp ik_{j3}(x_3 \pm h)] \quad (2.9)$$

$$v_{j2} = A_{j3} \exp[ik_{11}x_1 \mp ik_{j3}(x_3 \pm h)]$$

где верхние знаки берутся при $j = 1$, нижние – при $j = 2$; $k_{j3} = \sqrt{k_j^2 - k_{j1}^2}$ и $\kappa_{j3} = \sqrt{\kappa_j^2 - k_{j1}^2}$ – проекции волновых векторов k_j и κ_j на ось координат x_3 .

Коэффициенты A_{jk} ($j = 1, 2; k = 1, 2, 3$) подлежат определению из граничных условий, которые заключаются в непрерывности скоростей и напряжений на обеих поверхностях упругого слоя. Имеем

$$x_3 = -h: -i\omega u = v, \quad \sigma_{13} = \sigma_{13}^{(1)}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{23}^{(1)}, \quad \sigma_{33} = \sigma_{33}^{(1)} \quad (2.10)$$

$$x_3 = h: -i\omega u = v_2, \quad \sigma_{13} = \sigma_{13}^{(2)}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{23}^{(2)}, \quad \sigma_{33} = \sigma_{33}^{(2)}$$

где $v = \text{grad } \Psi_i + v_1$ – скорость частиц жидкости в верхнем полупространстве; $p_1 = i\omega\rho_1(\Psi_i + \Psi_1)$, $p_2 = i\omega\rho_2\Psi_2$ – акустические давления в верхнем и нижнем полу-

пространства; $\sigma_{kl}^{(j)}$ – компоненты тензора напряжений вязких жидкостей в верхнем ($j = 1$) и нижнем ($j = 2$) полупространствах. При этом

$$\sigma_{kl}^{(j)} = -p_j \delta_{kl} + \rho_j \left[v_j \left(\frac{\partial v_{jl}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{jk}}{\partial x_l} \right) + \delta_{kl} \left(v'_j - \frac{2}{3} v_j \right) \operatorname{div} v_j \right] \quad (2.11)$$

где v'_j – второй кинематический коэффициент вязкости j -й жидкости.

Подставим выражения (1.1), (2.3), (2.4), (2.9) и (2.11) в граничные условия (2.10). В результате получим

$$A_{11} = [k_{13} \kappa_{13} - k_{11}^2 + \omega(\kappa_{13} U_3 - k_{11} U_1)] / \Delta_1 |_{x_3 = -h}$$

$$A_{12} = -[2k_{11} k_{13} + \omega(k_{13} U_1 + k_{11} U_3)] / \Delta_1 |_{x_3 = -h}$$

$$A_{13} = -i\omega U_2 |_{x_3 = -h} \quad (2.12)$$

$$A_{21} = -\omega(k_{11} U_1 + \kappa_{23} U_3) / \Delta_2 |_{x_3 = h}$$

$$A_{22} = \omega(k_{23} U_1 - k_{11} U_3) / \Delta_2 |_{x_3 = h}, \quad A_{23} = -i\omega U_2 |_{x_3 = h}$$

и шесть условий для нахождения частного решения системы (2.5)

$$[\mathbf{P} + E_1 \mathbf{U}]_{x_3 = -h} = \mathbf{D}, \quad [\mathbf{P} + E_2 \mathbf{U}]_{x_3 = h} = 0 \quad (2.13)$$

где

$$E_j = \frac{\omega \rho_j v_j}{\Delta_j} \begin{vmatrix} \pm k_{j3} \kappa_j^2 & 0 & k_{11}(\kappa_j^2 - 2\Delta_j) \\ 0 & \pm \kappa_{j3} \Delta_j & 0 \\ k_{11}(2\Delta_j - a_j) & 0 & \pm \kappa_{j3} a_j \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{D} = -2k_{13} \frac{\rho_1 v_1}{\Delta_1} (k_{11} \kappa_1^2, 0, \kappa_{13} a_1)^T$$

$$\Delta_j = k_{11}^2 + k_{j3} \kappa_{j3}, \quad a_j = \kappa_j^2 + k_j^2 \left(\frac{4}{3} + \frac{v'_j}{v_j} \right), \quad j = 1, 2$$

Заметим, что коэффициенты A_{jk} могут быть вычислены после определения значений функций U_1, U_2, U_3 на поверхностях слоя (при $x_3 = -h$ и $x_3 = h$).

3. Для нахождения функций U_1, U_2, U_3 необходимо решить краевую задачу (2.5), (2.13).

Сведем эту краевую задачу к задаче с начальными условиями. Найдем три линейно независимых решения системы дифференциальных уравнений (2.5) U_k, P_k ($k = 1, 2, 3$), удовлетворяющих второму краевому условию (2.13). В качестве начальных условий для них выберем следующие:

$$U_k |_{x_3 = h} = (\delta_{1k}, \delta_{2k}, \delta_{3k})^T, \quad P_k |_{x_3 = h} = -E_2 U_k |_{x_3 = h}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

Решение задачи Коши (2.5), (3.1) можно провести одним из численных методов.

Очевидно, что решением системы (2.5), удовлетворяющим второму краевому условию (2.13), будет являться любая линейная комбинация, составленная из решений

указанных задач Коши

$$U = \sum_{k=1}^3 C_k U_k, \quad P = \sum_{k=1}^3 C_k P_k \quad (3.2)$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные. Подбором этих коэффициентов удовлетворим первому краевому условию (2.13). Подставляя в него (3.2), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных C_1, C_2, C_3

$$\sum_{k=1}^3 C_k (P_k + E_1 U_k)|_{x_3=-h} = D$$

Решив эту систему, найдем коэффициенты C_1, C_2, C_3 . Функции U_1, U_2, U_3 определим согласно (3.2), а по формулам (2.12) найдем коэффициенты отражения A_{1k} и прохождения A_{2k} . В результате получаем аналитическое описание акустических полей вне слоя. Поля смещений и напряжений внутри упругого слоя определяются с помощью функций $U(x_3)$ и $P(x_3)$, которые в случае численного решения краевой задачи (2.5), (2.13) будут представлять собой дискретные наборы значений в точках отрезка интегрирования $[-h, h]$.

4. Для оценки влияния вязкости граничащих со слоем жидкостей на процесс отражения и прохождения звука через неоднородный анизотропный упругий слой были проведены численные расчеты коэффициента поглощения α , характеризующего потерю энергии падающей звуковой волны вследствие вязкости жидкостей. В случае, когда жидкости по обе стороны слоя одинаковы, имеем

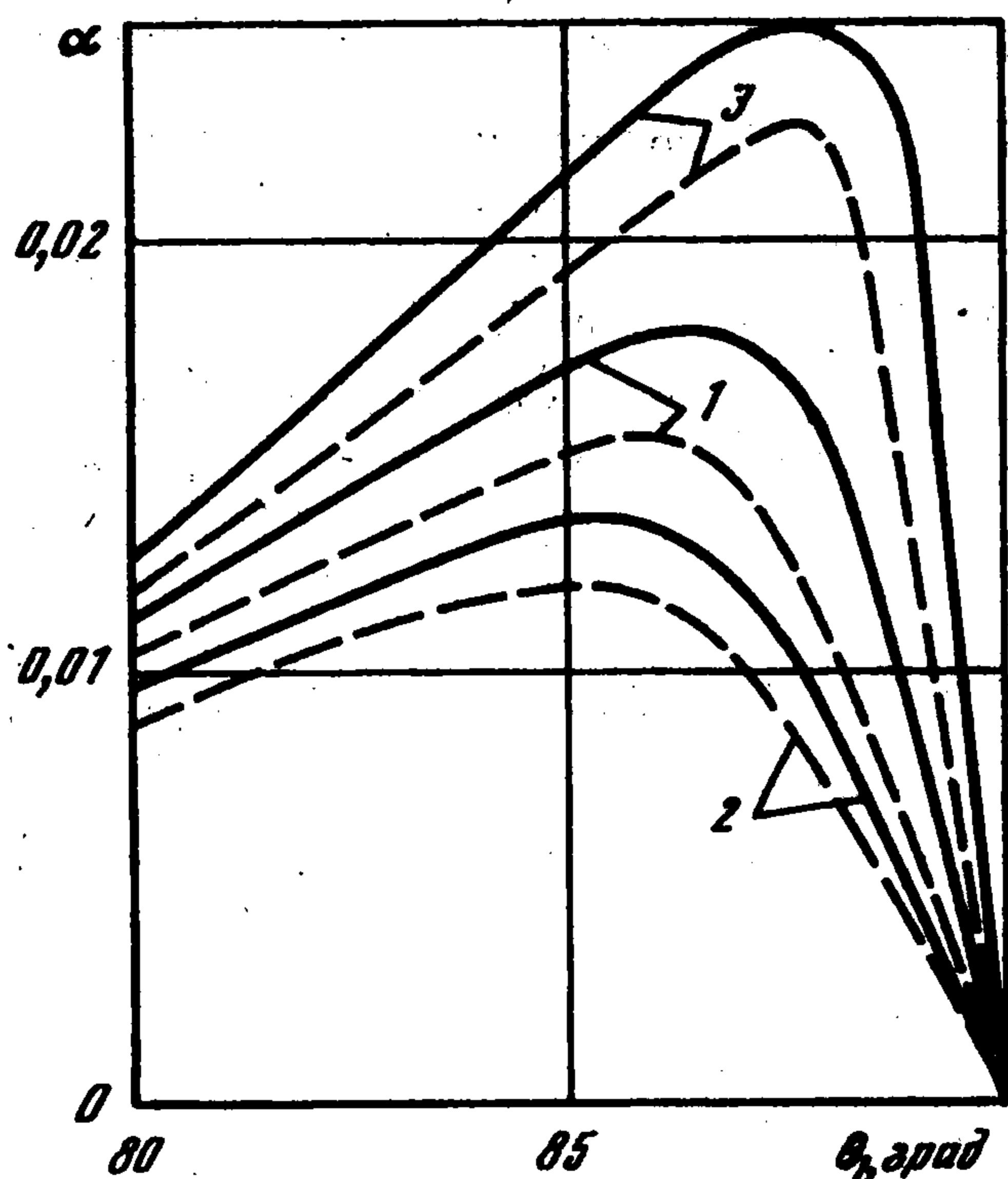
$$\alpha = 1 - |A_{11}|^2 - |A_{21}|^2$$

Расчеты проводились для изотропных и двух типов трансверсально-изотропных пластин, находящихся в воде ($\rho_1 = \rho_2 = 10^3$ кг/м³; $c_1 = c_2 = 1485$ м/с; $\nu_1 = \nu_2 = 0,13 \cdot 10^{-5}$ м²/с). Исследования проводились как для случая однородных материалов с плотностью $\rho_0 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, так и для слоя со следующим видом неоднородности: $\rho(x_3) = \rho_0 f(x_3)$, где $f(x_3) = a\{0,2 + \exp[-16(x_3 + h)^2]\}$. При этом множитель a выбран так, чтобы среднее значение функции $f(x_3)$ по толщине слоя было равно единице.

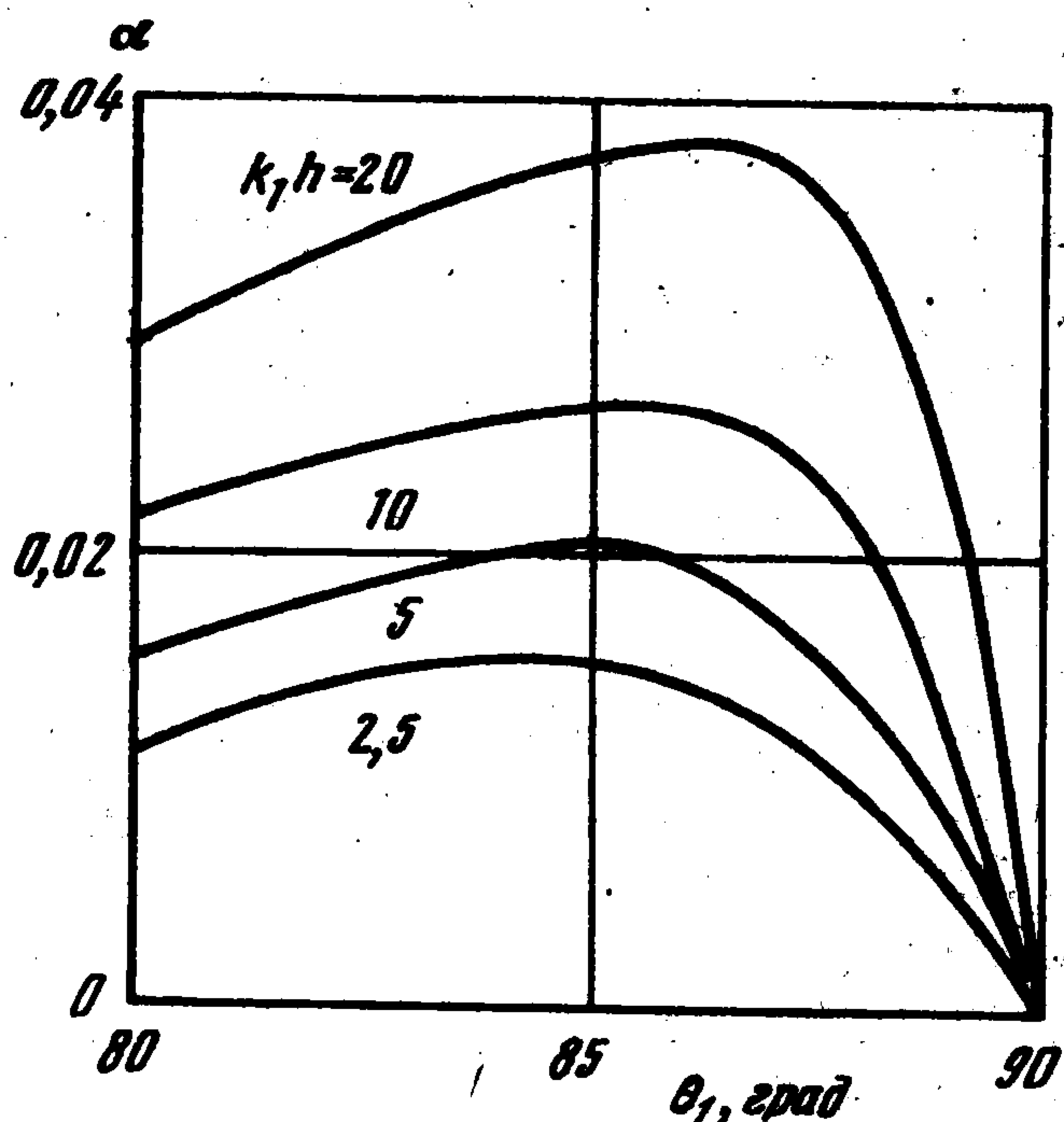
При расчетах были приняты следующие значения модулей упругости анизотропного материала: $\lambda_{11} = 16,4 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $\lambda_{13} = 3,28 \cdot 10^{10}$, $\lambda_{33} = 5,74 \cdot 10^{10}$, $\lambda_{44} = 2,54 \cdot 10^{10}$ (тип 1) и $\lambda_{11} = 5,74 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\lambda_{13} = 0,819 \cdot 10^{10}$, $\lambda_{33} = 16,4 \cdot 10^{10}$, $\lambda_{44} = 2,95 \cdot 10^{10}$ (тип 2). Значение модуля упругости λ_{12} не фиксируется, так как в случае трансверсально-изотропного слоя он не присутствует ни в уравнениях (2.5), ни в граничных условиях (2.13). Выбранные материалы отличаются тем, что максимум фазовой скорости квазипродольных волн в материале типа 1 достигается в направлении, параллельном границам слоя, т.е. в плоскости изотропии, а в материале типа 2 – в направлении оси упругой симметрии. При этом как максимумы, так и минимумы значений скоростей квазипродольных волн в обоих случаях совпадают, а их отношение равно 1,7. Для выбранного изотропного материала $\lambda_{11} = 10,5 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\lambda_{13} = 5,3 \cdot 10^{10}$, $\lambda_{33} = 10,5 \cdot 10^{10}$, $\lambda_{44} = 2,6 \cdot 10^{10}$, причем он имеет такую же плотность, что и анизотропные материалы, и занимает промежуточное положение по скорости продольных волн относительно скорости квазипродольных волн в рассматриваемых анизотропных материалах.

При проведении численных исследований решения задач Коши (2.5), (3.1) находились методом Рунге–Кутты четвертого порядка с автоматическим выбором шага интегрирования.

На фиг. 1 представлены зависимости коэффициента α от угла падения плоской волны θ_1 для однородных и неоднородных пластин с разными типами анизотропии при фиксированной частоте падающей волны ($k_1 h = 2,5$). Кривые, соответствующие изотропным пластинам и пластинам из анизотропных материалов типа 1 и 2, отмечены цифрами 1, 2, 3 соответственно. Кривые для однородных материалов изображены сплошными линиями, а для неоднородных – штриховыми.



Фиг. 1



Фиг. 2

Отметим, что при углах падения вплоть до $\theta_1 = 75^\circ$ величина α незначительна и почти одинакова для всех рассматриваемых материалов. При возрастании угла падения наблюдается увеличение диссипации энергии. Вблизи $\theta_1 = 90^\circ$ величина потерь достигает некоторого максимального значения α_{\max} при некотором критическом угле θ_* , а затем снижается до нуля при $\theta_1 = 90^\circ$. Такой качественный характер зависимости коэффициента поглощения от угла падения оказывается сходным с характером аналогичной зависимости, полученной при изучении отражения плоской волны от абсолютно жесткой поверхности (эффект Константинова) [7]. Отмеченное увеличение коэффициента α происходит неодинаково для слоев с различными типами анизотропии. В меньшей степени оно выражено для материала типа 1 (для однородного слоя величина α возрастает лишь до 0,015). Для изотропного материала это увеличение несколько больше ($\alpha_{\max} = 0,018$). Наибольшее возрастание потерь энергии наблюдается для материала типа 2 ($\alpha_{\max} = 0,026$). Для разных типов материалов различными оказываются и величины критических углов падения. Для однородного слоя типа 1 $\theta_* = 85,2^\circ$, для изотропного слоя $\theta_* = 86,4^\circ$, для слоя типа 2 $\theta_* = 87,8^\circ$.

Таким образом, влияние анизотропии слоя проявляется в следующем: анизотропия типа 1 в сравнении с изотропным материалом несколько снижает величину α_{\max} и уменьшает θ_* ; анизотропия типа 2 увеличивает и максимальное значение потерь, и соответствующий критический угол падения.

Отметим, что сравнение соответствующих графиков для однородных и неоднородных материалов показывает, что они практически не отличаются при $\theta_1 < 70^\circ$. Вблизи критического угла для неоднородных пластин проявляется небольшое снижение потерь по сравнению с соответствующими однородными пластинами. При этом величина α уменьшается на 12–15%. Меньшее из указанных значений относится к материалу типа 2, а большее – к материалу типа 1.

Влияние изменения частоты падающей волны на величину поглощения звуковой энергии и величину критического угла видно из графиков фиг. 2, где представлены зависимости α от θ_1 для изотропного неоднородного слоя при различных значениях волнового размера пластины: $k_1h = 2,5; 5; 10; 20$. Графики показывают, что повышение частоты приводит к увеличению поглощения не только в области критических углов, но и при меньших углах падения. Повышение частоты смещает положение критического угла в область меньших значений.

Анализ результатов численных расчетов показывает, что поглощение акустической энергии вследствие вязкости окружающих жидкостей при отражении и прохождении звука через упругий слой в области критических углов заметно зависит от типа анизотропии и неоднородности материала слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Приходько В.Ю., Тютюкин В.В. Расчет коэффициента отражения звуковых волн от твердых слоисто-неоднородных сред // Акуст. журн. 1986. Т. 32. Вып. 2. С. 212–218.
2. Лонкевич М.П. Прохождение звука через слой трансверсально-изотропного материала конечной толщины // Акуст. журн. 1971. Т. 17. Вып. 1. С. 85–92.
3. Шендеров Е.Л. Прохождение звука через трансверсально-изотропную пластину // Акуст. журн. 1984. Т. 30. Вып. 1. С. 122–129.
4. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Прохождение звуковых волн через трансверсально-изотропный неоднородный плоский слой // Акуст. журн. 1990. Т. 36. Вып. 4. С. 740–744.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.
6. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
7. Константинов Б.П. Гидродинамическое звукообразование и распространение звука в ограниченной среде. Л.: Наука, 1974. 144 с.

Тула

Поступила в редакцию
24.III.1998