УДК 532.51

© 1998 г. В.А. Городцов

ТЕПЛОПЕРЕНОС И ТУРБУЛЕНТНАЯ ДИФФУЗИЯ В ОДНОМЕРНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ БЕЗ ДАВЛЕНИЯ

Рассматривается одномерная нестационарная нелинейная задача механики сплошных сред, возможность точного аналитического решения которой в дальнейшем базируется на общем локальном анализе сингулярных решений, известном как испытание Пенлеве. Для одномерных нелинейных гидродинамических моделей без давления с переносом пассивной примеси, обобщающих хорошо изученную модель Бюргерса, показана возможность приведения к линейным задачам при равенстве кинетических коэффициентов (вязкости и теплопроводности). На примерах точных их решений демонстрируется большая чувствительность структуры ударных волн с примесными фронтами к выполнимости закона сохранения примеси в моделях. При его выполнении каждая стационарно распространяющаяся ударная волна с вязкой структурой поля скоростей сопровождается примесным солитоном. В итоге слияния нескольких таких ударных волн (точно решаемая задача) происходит концентрирование примеси в одном суммарном солитоне. Показано, что при учете действия гауссовских случайных сил, зависящих от времени, на линеаризуемое вязкое поведение основных моделей накладывается дополнительное диффузионное размазывание возмущений с коэффициентом диффузии, зависящим от времени.

1. Приводимость нелинейной задачи к линейной. Простейшей диссипативной моделью однокомпонентной сплошной среды является модель вязкой теплопроводной жидкости без давления, а простейшие ее одномерные течения с учетом переноса пассивной примеси, не оказывающей обратного влияния на динамику, описываются системой нелинейных уравнений в частных производных

$$\frac{du}{dt} \equiv \partial_t u + u\partial_x u = \nu\partial_x^2 u, \quad \frac{d\theta}{dt} \equiv \partial_t\theta + u\partial_x\theta = \chi\partial_x^2\theta \tag{1.1}$$

Здесь $u = u(x, t)$ – скорость течения, $\theta = \theta(x, t)$ – характеристика примеси (температура при теплопереносе или концентрация при массопереносе в двухкомпонентной жидкости), обозначения $\partial_t u$, $\partial_x u$,... используются для частных производных, ν, χ – коэффициенты вязкости и температуропроводности (диффузии), безразмерным отношением которых является число Прандтля (Шмидта) $\Pr \equiv \nu/\chi$.

Возможность полной интегрируемости такой системы уравнений может быть выявлена с помощью испытания Пенлеве для дифференциальных уравнений в частных производных (следуем установившейся в зарубежной литературе терминологии, хотя более справедливо в связи с историей исследований [1, 2] именовать его "испытанием Ковалевской – Пенлеве"). Используем здесь локальный анализ поведения особых точек решений уравнений в варианте, предложенном Вейсом, Табором и Карневалом [3]. При анализе сингулярного решения обсуждаемой системы уравнений в окрестности сингулярного многообразия $\varepsilon(x, t) = 0$, $\varepsilon_x \equiv \partial_x\varepsilon \equiv \partial\varepsilon/\partial x \neq 0$, $\varepsilon_t \equiv \partial_t\varepsilon \equiv \partial\varepsilon/\partial t \neq 0$ представляем его в виде разложений в ряды Лорана с полюсными особенностями конечного порядка (конечными главными частями лорановских разложений)

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n\varepsilon^{n-\alpha},\quad \theta(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\theta_n\varepsilon^{n-\beta} \tag{1.2}$$

$$u_n=u_n(x,t),\quad \varepsilon=\varepsilon(x,t),\quad \theta_n=\theta_n(x,t)$$

В силу независимости первого уравнения системы, хорошо известного под именем уравнения Бюргерса, от второго задача его анализа может быть выполнена сначала отдельно. Согласно известным результатам [3] при испытании Пенлеве решение уравнения Бюргерса представимо в виде ряда, содержащего простую полюсную сингулярность (равенство $\alpha=1$ и вид первой коэффициентной функции $u_0=-2\nu\varepsilon_x$ находятся уже подстановкой в уравнение только главного сингулярного члена разложения)

$$u=-2\nu\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon}+u_1+u_2\varepsilon+\sum_{m=0}^{\infty}u_{m+3}\varepsilon^{m+2} \tag{1.3}$$

для коэффициентов которого должно выполняться рекуррентное соотношение

$$-(n-2)(n-1)\nu\varepsilon_x^2u_n+(\partial_t-\nu\partial_x^2)u_{n-2}+(n-2)(\varepsilon_t-2\nu\varepsilon_x\partial_x-\nu\varepsilon_{xx})u_{n-1}+$$
$$+\sum_m u_{n-m}[(m-1)\varepsilon_xu_m+\partial_xu_{m-1}]=0,\quad u_k\,|_{k<0}=0$$

В частности, для двух низших коэффициентов ряда (при $n=0$ и $n=1$) отсюда имеем

$$u_0=-2\nu\varepsilon_x,\quad u_1\varepsilon_x+\varepsilon_t=\nu\varepsilon_{xx} \tag{1.4}$$

а при $n=2$ коэффициент u_2 выпадает из рекуррентного соотношения и получается ограничение

$$\partial_x(\varepsilon_t+u_1\varepsilon_x-\nu\varepsilon_{xx})=0$$

которое является следствием предыдущего.

В итоге уже на этом шаге становится ясно, что рассматриваемое локальное разложение решения обладает требуемой общностью для решения дифференциального уравнения второго порядка, уравнения Бюргерса: оно содержит две произвольные функции $\varepsilon(x,t)$, $u_2(x,t)$, и тем самым выдерживает испытание Пенлеве. Общее решение задачи Коши для него как раз должно иметь такую степень произвола. В силу известной теоремы Ковалевской (Коши – Ковалевской) о существовании аналитического решения задачи Коши для дифференциальных уравнений [4] этих двух функций (по числу начальных условий для уравнения второго порядка) достаточно для отыскания любых аналитических решений. Начальные данные вполне определяют коэффициенты разложений таких решений.

С учетом выражений для низших коэффициентов рекуррентное соотношение можно переписать также, явно выделив высший коэффициент, в виде

$$(n-2)(n+1)\nu\varepsilon_x^2u_n=(n-2)(\varepsilon_t+u_1\varepsilon_x-\nu\varepsilon_{xx}+2\nu\varepsilon_x\partial_x)u_{n-1}-2\nu\varepsilon_x\partial_xu_{n-1}+$$
$$+\sum_{m=1}^{n-2}u_{n-m}[(m-1)\varepsilon_xu_m+\partial_xu_{m-1}]+(\partial_t+u_1\partial_x-\nu\partial_x^2)u_{n-2} \tag{1.5}$$

При такой записи становится очевидным "резонансный" характер случая $n=2$ (при "резонансе" одновременно обращаются в нуль левая и правая части соотношения).

Отсюда при $n=3$ с учетом предыдущих выражений (1.4) получаем

$$4\nu\varepsilon_x^2u_3=-2\nu(2\varepsilon_x\partial_x+\varepsilon_{xx})u_2+(\partial_t+u_1\partial_x-\nu\partial_x^2)u_1 \tag{1.6}$$

Воспользовавшись произволом в выборе u_2, полагая $u_2=0$ и считая аддитивный добавок в решении u_1 удовлетворяющим исходному уравнению Бюргерса

$$u_2 = 0, \quad \partial_t u_1 + u_1 \partial_x u_1 - \nu \partial_x^2 u_1 = 0$$

достигаем обращения в нуль третьего коэффициента, а вместе с ним, как видно из рекуррентного соотношения, и обращения в нуль всех более старших коэффициентов. Таким образом, ряд Лорана оказывается оборванным на конечном члене

$$u_n|_{n\geq 2} = 0 \tag{1.7}$$

В итоге решение уравнения Бюргерса оказывается выраженным через две функции, удовлетворяющие простым уравнениям, из которых одно вновь является уравнением Бюргерса

$$u = -2\nu\varepsilon^{-1}\varepsilon_x + u_1, \quad \varepsilon_t + u_1\varepsilon_x = \nu\varepsilon_{xx}, \quad \partial_t u_1 + u_1\partial_x u_1 = \nu\partial_x^2 u_1 \tag{1.8}$$

Вместе эти соотношения составляют преобразование Бэклунда, позволяющее строить по одним решениям уравнения Бюргерса другие [3]. В частности, при выборе $u_1 = 0$ получается представление решения уравнения Бюргерса с помощью известного преобразования Коула – Хопфа через решения линейного уравнения теплопроводности

$$u = -2\nu\varepsilon^{-1}\varepsilon_x, \quad \varepsilon_t = \nu\varepsilon_{xx} \tag{1.9}$$

Уравнение для пассивной примеси также допускает решение в виде разложений в вышеуказанные ряды Лорана (1.2), если выполняется дополнительно к предыдущему рекуррентное соотношение

$$-\chi(n-\beta)(n-\beta-1)\varepsilon_x^2\theta_n + \sum_m u_{n-m}[\partial_x\theta_{m-1} + (m-\beta)\varepsilon_x\theta_m] +$$
$$+(n-\beta-1)(\varepsilon_t - \chi\varepsilon_{xx} - 2\chi\varepsilon_x\partial_x)\theta_{n-1} + (\partial_t - \chi\partial_x^2)\theta_{n-2} = 0, \ \theta_k|_{k<0} = 0$$

На первом шаге при $n = 0$ оно дает

$$[2\nu - \chi(\beta+1)]\beta\varepsilon_x^2\theta_0 = 0: \quad \beta = 2\,\mathrm{Pr} - 1 \tag{1.10}$$

так что в разложении для примеси коэффициентная функция $\theta_0(x, t)$ остается произвольной.

При обсуждавшемся выше обрыве ряда для поля скорости, таком, что выполняются соотношения (1.7) и (1.8), в последнем рекуррентном соотношении за знаком суммы фактически скрывается лишь один член с $m = n - 1$, и оно, если учесть (1.10), принимает вид формулы связи между тройками соседних коэффициентов θ_n, θ_{n-1}, θ_{n-2}

$$n(n+1-2\,\mathrm{Pr})\varepsilon_x^2\theta_n = [(n-2\,\mathrm{Pr})(\mathrm{Pr}-1)\varepsilon_{xx} - (\mathrm{Pr}-n)2\varepsilon_x\partial_x]\theta_{n-1} +$$
$$+\chi^{-1}(\partial_t + u_1\partial_x - \chi\partial_x^2)\theta_{n-2} \tag{1.11}$$

Отсюда видно, что кроме вышеуказанного случая $n = 0$ "резонансными" могли быть также случаи целых положительных значений $n = N = 2\,\mathrm{Pr} - 1$ при условии одновременного обращения в нуль правых частей в (1.11). Подстановка таких значений дает

$$0 \cdot \theta_N = \tfrac{1}{2}(1-N)(\varepsilon_{xx} + 2\varepsilon_x\partial_x)\theta_{N-1} + \chi^{-1}(\partial_t + u_1\partial_x - \chi\partial_x^2)\theta_{N-2}$$

что возможно лишь при $N = 1 = \mathrm{Pr}$, т.е. при равенстве кинетических коэффициентов.

В случае $\mathrm{Pr} = 1$ действительно вторым "резонансным" значением показателя оказывается $n = 1$, что очевидно из равенства

$$2(1-\mathrm{Pr})\varepsilon_x^2\theta_1 = (1-\mathrm{Pr})[(2\,\mathrm{Pr}-1)\varepsilon_{xx} - 2\varepsilon_x\partial_x]\theta_0$$

В нуль одновременно обращаются левая и правая части, и коэффициентная функция $\theta_1(x, t)$ остается произвольной (второй произвольной функцией). Тем самым имеется требуемая общность (в две произвольных функции) решения уравнения для примеси в виде разложений (1.2) также.

При одинаковых кинетических коэффициентах рекуррентное соотношение (1.11) в частном случае $n = 2$ сводится к следующему:

$$2\varepsilon_x^2\theta_2 = -2\varepsilon_x\partial_x\theta_1 + \chi^{-1}(\partial_t + u_1\partial_x - \chi\partial_x^2)\theta_0$$

Видно, что коэффициентная функция $\theta_2(x, t)$ исчезает при исчезновении θ_1 и подчинении θ_0 уравнению для примеси с конвективной скоростью u_1, типа исходного (1.2). При этом согласно рекуррентному соотношению (1.11) исчезают все последующие коэффициенты, так что происходит обрыв ряда Лорана для примеси

$$\theta_n\,|_{n\geq 1} = 0$$

В итоге в случае гидродинамики с одинаковыми диссипативными коэффициентами получаем совокупность соотношений

$$u = -2\nu\partial_x \ln\varepsilon + u_1, \quad \theta = \theta_0 / \varepsilon + \mathrm{const}$$

$$e_t + u_1\varepsilon_x = \nu\varepsilon_{xx}, \quad \partial_t u_1 + u_1\partial_x u_1 = \nu\partial_x^2 u_1, \quad \partial_t\theta_0 + u_1\partial_x\theta_0 = \nu\partial_x^2\theta_0$$

позволяющих строить по одним частным решениям системы нелинейных уравнений (1.1) другие (преобразования Бэклунда). В частности, при выборе тривиального начального решения $u_1 = 0$ получим представление решений в виде

$$u = -2\nu\partial_x \ln\varepsilon, \quad \theta = \theta_0 / \varepsilon, \quad \partial_t\varepsilon = \nu\partial_x^2\varepsilon, \quad \partial_t\theta_0 = \nu\partial_x^2\theta_0 \tag{1.12}$$

так что заменой неизвестных (заменами Коула – Хопфа и Хироты [5]) удается свести решение исходных нелинейных уравнений с одинаковыми кинетическими коэффициентами к решению линейного уравнения теплопроводности.

Реально числами Прандтля, близкими к единице, характеризуются ламинарные течения воздуха, а также многие турбулентные течения различных жидкостей при градиентной аппроксимации турбулентных потоков импульса и тепла.

Решение задачи с начальными данными

$$u\,|_{t=0} = U(x), \quad \theta\,|_{t=0} = \Theta(x) \tag{1.13}$$

для исходных нелинейных уравнений (1.1) при равенстве диссипативных коэффициентов теперь приводится к решению линейных уравнений теплопроводности из (1.12) с начальными данными

$$\varepsilon\,|_{t=0} = \exp\left(\frac{1}{2\nu}\int_x^\infty U(\xi)d\xi\right), \quad \theta_0\,|_{t=0} = \Theta(x)\varepsilon\,|_{t=0}$$

которое с помощью функции Грина уравнения теплопроводности ($H(t)$ – единичная функция Хевисайда)

$$(\partial_t - \nu\partial_x^2)G = \delta(x)\delta(t): \quad G(x,t) = H(t)D(x,t) = \frac{H(t)}{2\sqrt{\pi\nu t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\nu t}\right) \tag{1.14}$$

может быть записано в общем виде через интегральные свертки начального распределения с "фундаментальным решением" однородного уравнения $D(x, t)$

$$\varepsilon(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} D(x-y,t)\varepsilon(y,t=0)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} D(x-y,t)\exp\left(\frac{1}{2\nu}\int_y^\infty dzU(z)\right)dy$$

$$\theta_0(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} D(x-y,t)\Theta(y)\varepsilon(y,t=0)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} D(x-y,t)\Theta(y)\exp\left(\frac{1}{2\nu}\int_y^\infty dzU(z)\right)dy$$

В случае примера задачи о формировании структуры ударной волны (УВ) и теплового фронта, первоначально имевших вид разрывных распределений скорости и концентрации пассивной примеси

$$U(x) = 2u_0 H(-x), \quad \Theta(x) = \Theta_0 H(-x) \tag{1.15}$$

результат выражается через интеграл вероятностей

$$\begin{gathered} 2\varepsilon(x,t) = \operatorname{erfc}(-\xi) + \exp[-k(x-u_0t)]\operatorname{erfc}(\xi - k\sqrt{\nu t}) \\ 2\theta_0(x,t) = \Theta_0 \exp[-k(x-u_0t)]\operatorname{erfc}(\xi - k\sqrt{\nu t}), \quad \xi \equiv x/(2\sqrt{\nu t}), \quad k = u_0/\nu \end{gathered} \tag{1.16}$$

С течением времени эти распределения стремятся к экспоненциальным предельным, описывающим простую структуру полей скорости и температуры в равномерно распространяющихся УВ с вязким переходным слоем

$$\begin{gathered} \varepsilon = 1 + \exp(-kX), \quad \theta_0 = \Theta_0 \exp(-kX) \\ u = \frac{2u_0}{1+\exp(kX)} = u_0\left(1 - \operatorname{th}\frac{kX}{2}\right), \quad \theta = \frac{\Theta_0}{1+\exp(kX)}, \quad X \equiv x - u_0 t \end{gathered} \tag{1.17}$$

В случае примера задачи эволюции сконцентрированного вначале в некоторой точке тепловыделения ($\delta(x-x_0)$ – дельта-функция Дирака)

$$\theta|_{t=0} = \Theta(x) = Q_0\delta(x-x_0) \tag{1.18}$$

в поле скоростей равномерно движущейся УВ вида (1.17) для изменений температуры находим

$$\begin{gathered} \theta(x,t) = \frac{\theta_0}{\varepsilon} = Q_0 D(x-x_0,t)\frac{\varepsilon(x_0,t=0)}{\varepsilon(x,t)} = \\ = \frac{Q_0}{2\sqrt{\pi\nu t}}\frac{1+\exp(-kx_0)}{1+\exp[-k(x-u_0t)]}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4\nu t}\right] \end{gathered} \tag{1.19}$$

Следовательно, происходит диффузионное расплывание первоначально сконцентрированного теплового возмущения с некоторой дополнительной деформацией полем течения УВ. Никакой равновесный баланс между диффузионным размазыванием и конвективным переносом здесь не достигается.

2. Течение и теплоперенос при действии случайных сил. При течении жидкости, турбулизуемом случайной внешней силой, наиболее прост для аналитического рассмотрения случай, когда пространственной зависимостью силы можно пренебречь. Это подразумевает ограничение анализом турбулентных пульсаций более мелкомасштабных, чем масштабно соответствующих радиусу корреляции случайной силы.

Задача решения неоднородных уравнений одномерной гидродинамики с внешней силой, зависящей от времени,

$$\partial_t v + v\partial_x v - \nu\partial_x^2 v = f(t), \quad \partial_t T + v\partial_x T - \chi\partial_x^2 T = 0 \tag{2.1}$$

заменой переменных

$$v(x,t) = u_0(t) + u(x - x_0(t), t), \ T(x,t) = \theta(x - x_0(t), t), \ \partial_t x_0 = u_0, \ \partial_t u_0 = f(t)$$

приводится к решению задачи для исходных однородных уравнений (1.1). Таким образом, решение неоднородных уравнений в частных производных приводится к решению таких же однородных, решению обыкновенных дифференциальных уравнений для $x_0(t)$, $u_0(t)$ и простой замене переменных (обобщенному галилеевскому преобразованию).

При гауссовой дельта-коррелированной случайной силе с нулевым средним

$$\langle f(t)\rangle = 0, \quad \langle f(t_1)f(t_2)\rangle = f_0^2\delta(t_1 - t_2) \tag{2.2}$$

для $x_0(t)$ и $u_0(t)$ будем иметь благодаря линейной связи с такой силой также гауссово случайное поведение с характеристиками

$$\langle x_0(t)\rangle = 0, \quad \langle u_0(t)\rangle = 0$$

$$\langle x_0^2(t)\rangle = f_0^2 t^3/3 \equiv 2\tau, \quad \langle u_0^2(t)\rangle = f_0^2 t, \quad \langle x_0(t)u_0(t)\rangle = f_0^2 t^2/2$$

Благодаря гауссовости высшие моменты выражаются через вторые и, в частности,

$$\langle x_0^n(t)\rangle = \delta_{n,2m}(2m-1)!!\langle x_0^2\rangle^m, \quad \langle \exp(ax_0)\rangle = \exp\frac{a^2\langle x_0^2\rangle}{2} \tag{2.3}$$

С помощью последней формулы и выражения для оператора сдвига легко выполняется осреднение полей скорости и температуры

$$\langle v(x,t)\rangle = \langle u(x - x_0(t), t)\rangle = \exp\left(\frac{\langle x_0^2\rangle}{2}\partial_x^2\right)u(x,t)$$

$$\langle T(x,t)\rangle = \langle \theta(x - x_0(t), t)\rangle = \exp\left(\frac{\langle x_0^2\rangle}{2}\partial_x^2\right)\theta(x,t) \tag{2.4}$$

Из этого следует, что благодаря действию гауссовой случайной силы, зависящей от времени, на обычное диффузионное поведение полей в вязкой теплопроводной жидкости накладывается дополнительное универсальное (одинаковое для полей скорости и температуры даже при различии их кинетических коэффициентов) диффузионное расплывание осредненных возмущений обоих типов, описываемое одним и тем же линейным параболическим дифференциальным оператором

$$(\partial_\tau - \partial_x^2)\langle v\rangle = 0, \quad (\partial_\tau - \partial_x^2)\langle T\rangle = 0, \quad \tau \equiv 1/2\langle x_0^2(t)\rangle \tag{2.5}$$

Если в качестве примера рассмотреть действие случайной силы на УВ с фронтом вида (1.17), то для измерения осредненного уклона волны в силу (2.4) с использованием фурье-разложения получаем

$$\partial_x\langle v(x,t)\rangle = -\frac{ku_0}{2}\exp\left(\frac{\langle x_0^2\rangle}{2}\partial_x^2\right)\mathrm{sech}^2\left(\frac{kX}{2}\right) = -\frac{u_0}{k}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{q}{\mathrm{sh}(\pi q/k)}\exp(-q^2\tau + iqX)dq$$

Асимптотика больших времен

$$\partial_x\langle v\rangle \approx -\frac{u_0}{\sqrt{\pi\tau}}\exp\left(-\frac{X^2}{4\tau}\right)$$

показывает, что уклон УВ на конечном этапе падает пропорционально $\tau^{-1/2}$, т.е. как $t^{-3/2}$. Поведение теплового фронта в рассматриваемой модели аналогично.

Одномерная гидродинамика при учете сохранения примеси. Изменим теперь несколько исходную систему уравнений (1.1) так, чтобы уравнение для концентрации примеси допускало закон сохранения полного количества вещества

$$\partial_t u + u\partial_x u = \nu\partial_x^2 u, \quad \partial_t c + \partial_x(uc) = \chi\partial_x^2 c: \ \partial_t\int c\,dx = 0 \tag{3.1}$$

Такая система уравнений при равных кинетических коэффициентах ($\nu = \chi$) также допускает преобразование к линейным уравнениям с помощью аналогичной замены Коула – Хопфа – Хироты (рассматриваемая система уравнений элементарной заменой искомой переменной $c = \partial\theta/\partial x$ связана с системой (1.1))

$$u = -2\nu\partial_x \ln\varepsilon, \quad c = \partial_x(\theta_0/\varepsilon), \quad \partial_t\varepsilon = \nu\partial_x^2\varepsilon, \quad \partial_t\theta_0 = \nu\partial_x^2\theta_0 \tag{3.2}$$

Решение уравнений (3.1) с начальными данными

$$u|_{t=0} = \frac{2u_0}{1+\exp(kx)}, \quad c|_{t=0} = Q_0\delta(x - x_0) \tag{3.3}$$

т.е. решение задачи о диффузии первоначально сконцентрированной примеси при течении жидкости, связанном с равномерно движущейся структурированной УВ, в соответствии с (3.2) имеет несколько другой по сравнению с (1.19) вид

$$c = \partial_x \frac{\theta_0}{\varepsilon} = Q_0\partial_x \int\limits_{x_0}^{\infty} D(x-y,t)\frac{\varepsilon(y,t=0)}{\varepsilon(x,t)}dy = \frac{Q_0}{2\sqrt{\pi\nu t}}\frac{1+\exp(-kx_0)}{1+\exp(-kX)}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4\nu t}\right] +$$

$$+\frac{kQ_0}{8}\left[\operatorname{erfc}\frac{x_0-x}{2\sqrt{\nu t}} - \operatorname{erfc}\frac{x_0-x+2u_0t}{2\sqrt{\nu t}}\right]\operatorname{sec}h^2\left(\frac{kX}{2}\right) \tag{3.4}$$

Это решение состоит из двух групп слагаемых. Первая совпадает с выражением (1.19), полученным при решении такой же начальной задачи для системы уравнений (1.1) и описывающим полное затухание начального возмущения при диффузионном размазывании его по пространству. Асимптотикой больших времен для второй группы слагаемых является стационарно распространяющееся распределение примеси типа уединенной волны

$$c(x,t) = \frac{1}{4}kQ_0 \operatorname{sec}h^2\frac{k(x-u_0t)}{2} \tag{3.5}$$

Такой солитон в соответствии с сохранением вещества при описании уравнениями (3.1) стационарно переносит количество примеси Q_0, т.е. имеет место баланс между диффузионным размазыванием примеси и ее концентрированием при переносе полем течения УВ в отличие от случая решения (1.19) для модели (1.1). Стационарно распространяющуюся УВ типа (1.17) сопровождает примесный солитон вида (3.5). Точное решение задачи о слиянии нескольких УВ получается аналогично через представление решения линейного уравнения теплопроводности для $\varepsilon(x, t)$ суммой экспоненциальных вкладов от каждой волны [6]. Примесные солитоны, сопровождающие УВ, при слиянии образуют более высокий и узкий быстро движущийся вместе с суммарной ударной волной солитон. Подобное концентрирование примеси происходит в соответствии с сохранением полного количества примеси.

4. Многомерное обобщение. Развитый подход допускает простое формальное обобщение на случай многомерной модели среды без давления, когда течение жидкости можно считать потенциальным,

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = \nu\nabla^2\mathbf{u}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\theta = \chi\nabla^2\theta$$

Такая система при равных кинетических коэффициентах заменой Коула – Хопфа – Хироты

$$\mathbf{u} = -2\nu\nabla\ln\varepsilon, \quad \theta = \frac{\theta_0}{\varepsilon}$$

независимо от размерности приводится к паре линейных уравнений теплопроводности

$$\partial_t\varepsilon = \nu\nabla^2\varepsilon, \quad \partial_t\theta_0 = \nu\nabla^2\theta_0$$

Если принять также во внимание потенциальные внешние силы $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = -\nabla U(\mathbf{r}, t)$, то такая замена для уравнений с одинаковыми кинетическими коэффициентами, по-прежнему, остается эффективной, но конечное линейное уравнение однако становится уравнением с переменным коэффициентом

$$\partial_t \varepsilon = \nu \nabla^2 \varepsilon + \frac{1}{2\nu} U(\mathbf{r}, t)\varepsilon, \quad \partial_t \theta_0 = \nu \nabla^2 \theta_0 + \frac{1}{2\nu} U(\mathbf{r}, t)\theta_0$$

При случайности внешних сил это позволяет алгебраически нелинейную стохастическую гидродинамическую задачу привести к гораздо более простой алгебраически линейной задаче, хотя и сохраняющей стохастическую нелинейность.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 480 с.
2. *Ковалевская С.В.* Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки // Научные работы. М.; Изд-во АН СССР. 1948. 153–220.
3. *Weiss J., Tabor M., Carnevale G.* The Painlevé property for partial differential equations // J. Math. Phys. 1983. V. 24. № 3. P. 522–526.
4. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961. 400 с.
5. *Хирота Р.* Прямые методы в теории солитонов // Солитоны / Под ред.: Р. Буллафа и Ф. Кодри. М.: Мир, 1983. С. 175–192.
6. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.IV.1998