УДК 533.6.011.72

© 1998 г. В.Н. Малоземов, А.В. Омельченко, В.Н. Усков

О МИНИМИЗАЦИИ ПОТЕРЬ ПОЛНОГО ДАВЛЕНИЯ ПРИ ТОРМОЖЕНИИ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА

Рассматривается задача минимизации потерь полного давления при торможении сверхзвукового потока до дозвуковых скоростей в системе из последовательно расположенных скачков уплотнения. В результате перехода к соответствующей задаче нелинейного программирования с нелинейными ограничениями – неравенствами определяется точка, подозрительная на экстремум, и доказывается, что она является точкой строгого локального минимума. Отмечается, что при увеличении числа скачков до бесконечности оптимальная ударно-волновая система переходит в изоэнтропную волну.

Данная задача возникла в середине 40-х годов в связи с проблемой конструирования эффективных сверхзвуковых воздухозаборников. Одной из первых в этой области была работа Осватича (см. библиографию в [1]), где рассматривались системы из n косых и замыкающего $(n+1)$-го прямого скачка уплотнения. По отношению к минимизации потерь полного давления такие системы при любых интенсивностях первых n косых скачков оказались эффективнее одиночного прямого скачка. При этом для заданных числа Маха невозмущенного потока и количества n косых скачков существуют оптимальные значения интенсивностей косых скачков, при которых потери полного давления минимальны.

Результаты работы Осватича, выполненной в 1943 г. в Германии и засекреченной, после окончания Второй Мировой войны оказались в США. В 1947 г. Г.И. Петров и Е.П. Ухов предложили численное решение задачи (см. [2]), причем в отличие от Осватича рассмотрели не только системы с замыкающим прямым скачком уплотнения, но и системы, состоящие из n косых и замыкающего звукового скачка. Как оказалось, последние обеспечивают лучшее восстановление полного давления [2].

В середине 80-х годов Г.И. Петров предложил одному из авторов представленной статьи попытаться получить аналитическое решение задачи при условии, что тип замыкающего скачка заранее не фиксируется, а получается как один из результатов решения.

В данной работе такое решение предъявлено уже на этапе предварительного анализа задачи. Дано сравнение полученного решения с результатами Осватича.

1. Постановка задачи. Рассматривается плоский сверхзвуковой поток совершенного невязкого газа, последовательно проходящий систему S_{n+1} из $(n+1)$-го скачка уплотнения. Было показано (см., например, [3]), что при фиксированных числе Маха набегающего потока и показателе адиабаты $\gamma \in (1, 2]$ отношение любых газодинамических переменных за системой и до нее выражается через интенсивности $J_k = p_k/p_{k-1}$ скачков уплотнения. В частности, коэффициент $K_{n+1}^{(p_0)}$ потерь полного давления, представляющий собой отношение полного давления за S_{n+1} к полному давлению невозмущенного потока, определяется по формуле

$$K_{n+1}^{(p_0)} = \prod_{k=1}^{n+1} \left[J_k \left(\frac{J_k + \varepsilon}{J_k(1+\varepsilon J_k)} \right)^{\lambda} \right], \quad \lambda = \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \tag{1.1}$$

Одной из важнейших и часто встречающихся на практике задач является задача торможения сверхзвукового потока в системе S_{n+1} до дозвуковых скоростей с минимальными потерями полного давления, т.е. задача

$$K_{n+1}^{(p_0)} \to \sup_{M_{n+1} \leq 1} \qquad (1.2)$$

где M_{n+1} – число Маха за системой S_{n+1}, связанное с числом Маха M невозмущенного потока соотношением [3]

$$1+\varepsilon(M_{n+1}^2-1)=(1+\varepsilon(M^2-1))\Pi_{n+1}, \Pi_{n+1}=\prod_{k=1}^{n+1}\frac{J_k+\varepsilon}{J_k(1+\varepsilon J_k)} \qquad (1.3)$$

Начиная с работы Осватича в качестве замыкающего (n + 1)-го скачка априори берут прямой скачок уплотнения с интенсивностью

$$J_{n+1}^1=(1+\varepsilon)M_n^2-\varepsilon \qquad (1.4)$$

за которым поток всегда дозвуковой [4], и тем самым обеспечивают выполнение условия $M_{n+1} \leq 1$. Затем из условий оптимальности находят интенсивности J_k оставшихся скачков. Однако такой подход не приводит к оптимальному результату (см., например, [2]). Действительно, при любом числе $M_n > 1$ существует замыкающий скачок уплотнения, тормозящий поток до скорости, равной скорости звука. Интенсивность такого скачка рассчитывается по формуле [5]

$$J_{n+1}^0=\frac{\mu_n-1}{2\varepsilon}+\left[\left(\frac{\mu_n-1}{2\varepsilon}\right)^2+\mu_n\right]^{1/2}, \quad \mu_n=1+\varepsilon(M_n^2-1) \qquad (1.5)$$

Можно проверить, что $J_{n+1}^0 < J_{n+1}^1$. Следовательно, в качестве замыкающего скачка уплотнения можно брать любой скачок с интенсивностью из диапазона [J_{n+1}^0, J_{n+1}^1].

Цель данной работы – отыскание решения задачи (1.2) в случае, когда интенсивность J_{n+1} замыкающего скачка лежит в указанном диапазоне.

2. Формализация задачи. Положим $\mu = 1 + \varepsilon(M^2 - 1)$. Согласно (1.3) неравенство $M_{n+1} \leq 1$ можно записать в эквивалентном виде

$$-\mu\Pi_{n+1} + 1 \geq 0 \qquad (2.1)$$

Однако ограничение (2.1) на значения J_k не является единственным. Действительно, теорема Цемплена [4] накладывает дополнительные ограничения

$$J_k - 1 \geq 0, \quad k = 1,\ldots, n + 1 \qquad (2.2)$$

Кроме того, для существования системы S_{n+1} необходимо, чтобы число Маха за каждым из первых скачков n было больше или равно единицы. Это условие имеет вид

$$\mu\Pi_k - 1 \geq 0, \quad k = 1,\ldots, n \qquad (2.3)$$

Наконец, интенсивность J_{n+1} замыкающего скачка не должна превышать интенсивность прямого скачка уплотнения (1.4), что приводит к неравенству

$$-(1 + \varepsilon J_{n+1}) + (1 + \varepsilon)\mu\Pi_n \geq 0 \qquad (2.4)$$

Ограничения (2.1)–(2.4) полностью описывают множество Ω планов рассматриваемой экстремальной задачи. Однако некоторые из этих ограничений излишни.

Действительно, неравенство (2.1) означает, что интенсивность замыкающего (n + 1)-го скачка должна быть больше или равна "звуковой" интенсивности J_{n+1}^0 (1.5). Но последняя всегда больше или равна единице, так что интенсивность J_{n+1} замыкающего скачка автоматически удовлетворяет теореме Цемплена. Следовательно, условие (2.2) с учетом (2.1) можно переписать так

$$J_k - 1 \geq 0, \quad k = 1,\ldots, n \qquad (2.5)$$

Далее, из всех неравенств (2.3) с учетом ограничений (2.5) содержательным является только последнее (при $k = n$). Остальные неравенства выполняются автоматически, поскольку

$(J_i + \varepsilon)/[J_i(1 + \varepsilon J_i)] \leqslant 1$ при $J_i \geqslant 1$

Таким образом, окончательно множество планов Ω экстремальной задачи можно описать следующей системой неравенств:

$$J_k - 1 \geqslant 0, \quad k = 1,\ldots, n$$

$$\mu\Pi_n - 1 \geqslant 0, \; -\mu\Pi_{n+1} + 1 \geqslant 0, \; -(1+\varepsilon J_{n+1}) + (1+\varepsilon)\mu\Pi_n \geqslant 0 \tag{2.6}$$

Входящие в эту систему параметры удовлетворяют ограничениям

$$\mu > 1, \quad \varepsilon \in (0, 1/3] \tag{2.7}$$

В качестве целевой функции вместо $K_{n+1}^{(p_0)}$ удобно ввести обратную ей величину $I(\mathbf{J}) = 1/K_{n+1}^{(p_0)}$, где $\mathbf{J} = (J_1,\ldots, J_{n+1})$. Согласно (1.1),

$$I(\mathbf{J}) = \prod_{k=1}^{n+1} \left[\frac{1}{J_k} \left(J_k \frac{1+\varepsilon J_k}{J_k + \varepsilon} \right)^{\lambda} \right] \tag{2.8}$$

Приходим к окончательной записи требуемой экстремальной задачи

$$I(\mathbf{J}) \to \inf_{\mathbf{J}\in\Omega} \tag{2.9}$$

3. Предварительный анализ. Множество планов Ω задачи (2.9) непусто: вектор $\mathbf{J} = (1,\ldots, 1, J_{n+1}^1)$ удовлетворяет ограничениям задачи (2.9) при любых значениях μ, ε из диапазонов (2.7).

Обратим внимание на третье ограничение (2.6). Его можно переписать в виде

$$a(\mathbf{J}) := 1/\Pi_{n+1} \geqslant \mu \tag{3.1}$$

При этом согласно (2.8)

$$I(\mathbf{J}) = a^{\lambda}(\mathbf{J}) \prod_{k=1}^{n+1} \frac{1}{J_k} \tag{3.2}$$

Когда неравенство (3.1) обращается в равенство, первый сомножитель в правой части (3.2) принимает минимальное значение. Отметим также, что целевая функция $I(\mathbf{J})$ симметрична. Это дает основание полагать, что компоненты решения $\mathbf{J}^*$ равны между собой. Таким образом, можно предположить, что точка $\mathbf{J}^* = (x,\ldots, x)$, на которой соотношение (3.1) выполняется как равенство, будет точкой, подозрительной на экстремум. Можно проверить, что компоненты x точки $\mathbf{J}^*$ вычисляются по формуле

$$x = \frac{\alpha - 1}{2\varepsilon} + \left[\left(\frac{\alpha - 1}{2\varepsilon} \right)^2 + \alpha \right]^{1/2}, \quad \alpha = \mu^{1/(1+n)} \tag{3.3}$$

Покажем, что в точке $\mathbf{J}^*$ первые два и последнее ограничения неактивны. Относительно первого это очевидно, поскольку $x > 1$. Левые части второго и последнего неравенств в точке $\mathbf{J}^*$ равны соответственно

$$\frac{x(1+\varepsilon x)}{x+\varepsilon} - 1 \text{ и } (1+\varepsilon x)\left[\frac{(1+\varepsilon)x}{x+\varepsilon} - 1 \right]$$

Они положительны при $x > 1$. Таким образом, в точке $\mathbf{J}^*$ активным является только третье ограничение.

4. Строгая локальная оптимальность. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$I(\mathbf{J}) \to \inf, \quad a(\mathbf{J}) - \mu \geqslant 0 \tag{4.1}$$

Покажем, что точка $\mathbf{J}^* = (x, \ldots, x)$, где x вычисляется по формуле (3.3), является для этой задачи точкой строгого локального минимума. Отсюда очевидным образом будет следовать, что $\mathbf{J}^*$ – точка строгого локального минимума и для задачи (2.9).

Напомним, что ограничение $a(\mathbf{J}) - \mu \geqslant 0$ активно в точке $\mathbf{J}^*$. Воспользуемся достаточными условиями строгого локального минимума для задачи нелинейного программирования [6]. Строгая локальная оптимальность $\mathbf{J}^*$ будет установлена, если укажем положительное число u^*, такое, что $I'(\mathbf{J}^*) = u^* a'(\mathbf{J}^*)$ и

$$\langle (I''(\mathbf{J}^*) - u^* a''(\mathbf{J}^*))\mathbf{g}, \mathbf{g}\rangle > 0 \tag{4.2}$$

для всех ненулевых векторов $\mathbf{g}$ из касательного подпространства

$$\langle a'(\mathbf{J}^*), \mathbf{g}\rangle = 0 \tag{4.3}$$

Частную производную функции $a(\mathbf{J})$ по J_k будем обозначать $a'_k(\mathbf{J})$. Имеем согласно (3.1)

$$a'_k(\mathbf{J}) = \varepsilon b(J_k)c(J_k)a(\mathbf{J}) \tag{4.4}$$

$$b(t) = t^2 + 2\varepsilon t + 1, \quad c(t) = [t(t+\varepsilon)(1+\varepsilon t)]^{-1}$$

В частности,

$$a'_k(\mathbf{J}^*) = \varepsilon b(x)c(x)a(\mathbf{J}^*) \tag{4.5}$$

Сразу отметим, что условие (4.3) равносильно следующему:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \mathbf{g}_k = 0 \tag{4.6}$$

Далее, согласно (3.2), (4.4) и определению λ,

$$I'_k(\mathbf{J}) = [\lambda a^{\lambda-1}(\mathbf{J})a'_k(\mathbf{J}) - a^{\lambda}(\mathbf{J})J_k^{-1}]\prod_{i=1}^{n+1} J_i^{-1} = \frac{1-\varepsilon}{2}(J_k-1)^2 c(J_k)I(\mathbf{J}) \tag{4.7}$$

В частности,

$$I'_k(\mathbf{J}^*) = \frac{1-\varepsilon}{2}(x-1)^2 c(x)I(\mathbf{J}^*) \tag{4.8}$$

Положим

$$u^* := \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}\frac{(x-1)^2}{b(x)}\frac{I(\mathbf{J}^*)}{a(\mathbf{J}^*)} > 0 \tag{4.9}$$

Тогда в силу (4.5) и (4.8) будет выполняться равенство $I'(\mathbf{J}^*) = u^* a'(\mathbf{J}^*)$.

Переходим к проверке условия (4.2). При $j \neq k$ согласно (4.4) и (4.7) имеем

$$a''_{kj}(\mathbf{J}) = \varepsilon^2 b(J_k)c(J_k)b(J_j)c(J_j)a(\mathbf{J})$$

$$I''_{kj}(\mathbf{J}) = \frac{1}{4}(1-\varepsilon)^2(J_k-1)^2 c(J_k)(J_j-1)^2 c(J_j)I(\mathbf{J})$$

При $j = k$

$$a''_{kk}(\mathbf{J}) = \varepsilon c^2(J_k)a(\mathbf{J})[\varepsilon b^2(J_k) + \eta(J_k)]$$

$$I''_{kk}(\mathbf{J}) = \frac{1}{2}(1-\varepsilon)c^2(J_k)I(\mathbf{J})\left[\frac{1}{2}(1-\varepsilon)(J_k-1)^4 + \rho(J_k)\right]$$

$$\eta(t) = 2(t+\varepsilon)c^{-1}(t) - b(t)[c^{-1}(t)]', \quad \rho(t) = 2(t-1)c^{-1}(t) - (t-1)^2[c^{-1}(t)]'$$

В частности,

$$a''(\mathbf{J}^*) = \varepsilon c^2(x)a(\mathbf{J}^*)[\varepsilon b^2(x)C + \eta(x)E]$$

$$I''(\mathbf{J}^*) = \frac{1}{2}(1-\varepsilon)c^2(x)I(\mathbf{J}^*)\left[\frac{1}{2}(1-\varepsilon)(x-1)^4 C + \rho(x)E\right]$$

где C – матрица, все элементы которой равны единице, а E – единичная матрица. Учитывая равенства (4.6) и (4.9), получаем

$$\langle (I''(\mathbf{J}^*) - u^* a''(\mathbf{J}^*))\mathbf{g}, \mathbf{g}\rangle = \xi \|\mathbf{g}\|^2 \tag{4.10}$$

$$\xi = (1-\varepsilon^2)(x^2-1)b^{-1}(x)c(x)I(\mathbf{J}^*)$$

Очевидно, что $\xi > 0$. Теперь неравенство (4.2) следует из (4.10).

Таким образом, доказано, что в точке $\mathbf{J}^*$ выполнены достаточные условия оптимальности. Отметим, что такого типа результаты в нелинейном программировании удается получить крайне редко.

5. Анализ результата. Выше показано, что в случае, когда интенсивность замыкающего скачка уплотнения принадлежит диапазону $[J^0_{n+1}, J^1_{n+1}]$, решение $\mathbf{J}^*$ поставленной задачи имеет вид

$$J^*_k = \frac{\alpha-1}{2\varepsilon} + \left[\left(\frac{\alpha-1}{2\varepsilon}\right)^2 + \alpha\right]^{1/2}, \quad k = 1,\ldots,n+1 \tag{5.1}$$

При этом скорость потока за последним, замыкающим скачком уплотнения в точности равна скорости звука, а $J_{n+1} = J^0_{n+1}$.

Осватич рассматривал системы, в которых замыкающий скачок прямой, т.е. системы с $J_{n+1} = J^1_{n+1}$. Для таких систем минимум потерь полного давления достигается, если интенсивности первых n косых скачков равны между собой ($J_1 = \ldots = J_n = J_*$) и определяются из уравнения

$$\mu = A\frac{J_*^{n-1}(1+\varepsilon J_*)^n}{(J_*+\varepsilon)^n}[J_*^2 + 2BJ_* + 1 + (J_*-1)(J_*^2 + 2CJ_* + 1)^{1/2}]$$

$$A = \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{4(1+\varepsilon)^2}; \quad B = \frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon + 2}{\varepsilon(2+\varepsilon)}; \quad C = \frac{\varepsilon(3\varepsilon+4)}{(2+\varepsilon)^2} \tag{5.2}$$

Посмотрим, насколько отличается коэффициент $K^{(p_0)}_{n+1}$ потерь полного давления в системе с интенсивностями (5.1) от коэффициента потерь в оптимальной системе (5.2) с замыкающим прямым скачком уплотнения в случае $M = 3$, $\gamma = 1{,}4$ и $n = 1$. При таких значениях параметров интенсивности всех входящих в систему скачков уплотнения, рассчитанные по формуле (5.1), равны 3,591. В оптимальной системе с замыкающим прямым скачком интенсивность первого скачка равна 4,341, а интенсивность замыкающего, прямого скачка равна 3,841. При этом коэффициент потерь полного давления в первом случае равен 0,664, а во втором – 0,581.

6. Асимптотическое поведение решения. Вернемся к формуле (3.3). Величины α и x зависят от $n+1$, поэтому будем использовать обозначения α_{n+1} и x_{n+1}. Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1, \quad \lim_{n\to\infty} n(\alpha_n - 1) = \ln\mu \tag{6.1}$$

Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)^n = \mu^\lambda \tag{6.2}$$

Величина x_n удовлетворяет соотношению

$$x_n(1+\varepsilon x_n) = \alpha_n(x_n+\varepsilon)$$

которое после преобразований можно переписать в виде

$$x_n = 1 + (\alpha_n - 1)\upsilon_n, \quad \upsilon_n = \frac{1}{1+\sqrt{\alpha_n}} + \frac{x_n}{\varepsilon(x_n + \sqrt{\alpha_n})} \tag{6.3}$$

Согласно первому соотношению (6.1), имеем

$$\lim_{n\to\infty} \upsilon_n = \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} = \lambda \tag{6.4}$$

Остается возвести обе части равенства (6.3) в степень n, перейти к пределу при $n \to \infty$ и воспользоваться вторым соотношением (6.2) и (6.4).

Приведем физическую интерпретацию полученных результатов. Отношение J_σ статических давлений позади и впереди системы S_n из n скачков уплотнения, называемое иногда интенсивностью системы [3], выражается через интенсивности J_k скачков по формуле

$$J_\sigma = \frac{p_n}{p} = \prod_{k=1}^{n} \frac{p_k}{p_{k-1}} = \prod_{k=1}^{n} J_k$$

Следовательно, величина $(x_n)^n$, по определению равная произведению интенсивностей скачков в оптимальной системе $S_n^{(p_0)}$, также представляет собой отношение давлений позади и впереди $S_n^{(p_0)}$.

Известно, что торможение сверхзвукового потока до скорости, равной скорости звука, можно осуществить и в простой волне сжатия w [4]. Интенсивность такой волны связана с числом Маха набегающего потока соотношением

$$J_w = \mu^\lambda \tag{6.5}$$

При этом в отличие от скачков уплотнения потерь полного давления в ней вообще не происходит ($I \equiv 1$), т.е. с этой точки зрения она является оптимальной и идеально решает задачу (1.2).

Формулы (6.2) и (6.5), таким образом, показывают, что с увеличением числа скачков в оптимальной системе $S_n^{(p_0)}$ до бесконечности перепад давлений в ней не просто стремится к конечной величине – он стремится к интенсивности оптимальной изоэнтропной волны J_w. Кроме того, перепад давлений на отдельном скачке стремится к единице (см. первое соотношение (6.1.)), так что скачок уплотнения вырождается в слабый разрыв [4]. Следовательно, при $n \to \infty$ происходит качественный переход – система $S_n^{(p_0)}$ превращается в оптимальную изоэнтропную волну.

Приведенные рассуждения совместно с результатами работы [3] позволяют рассматривать любую систему из n скачков уплотнения как некоторую грубую модель изоэнтропной волны. Такая модель при фиксированном n наиболее точна в случае, когда интенсивности входящих в систему скачков равны между собой.

На интуитивном уровне указанные рассуждения проводились и раньше. В данной статье они получили строгое обоснование.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда по исследованиям в области фундаментального естествознания (95-0-4.2-171).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Герман Р.* Сверхзвуковые входные диффузоры. М.: Физматгиз, 1960. 290 с.
2. *Петров Г.И.* Аэромеханика больших скоростей и космические исследования. Избр. тр. М.: Наука, 1992. 306 с.
3. *Омельченко А.В., Усков В.Н.* Оптимальные ударно-волновые системы // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 6. С. 118–126.
4. *Черный Г.Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
5. *Адрианов А.Л., Старых А.Л., Усков В.Н.* Интерференция стационарных газодинамических разрывов. Новосибирск: Наука, 1995. 178 с.
6. *Фиакко А.-В., Мак-Кормик Г.-П.* Нелинейное программирование. М.: Мир, 1972. 240 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
30.VII.1996